Melhores momentos

AULA PASSADA

Ingredientes de programação dinâmica

- Subestrutura ótima: soluções ótimas contém soluções ótimas de subproblemas.
- Subestrutura: decomponha o problema em subproblemas menores e, com sorte, mais simples.
- *Bottom-up*: combine as soluções dos problemas menores para obter soluções dos maiores.
- Tabela: armazene as soluções dos subproblemas em uma tabela, pois soluções dos subproblemas são consultadas várias vezes.
- Número de subproblemas: para a eficiência do algoritmo é importante que o número de subproblemas resolvidos seja ‘pequeno’.
- Memoized: versão *top-down*, recursão com tabela.

AULA 14

Mais programação dinâmica

CLRS 15.4

= "recursão–com–tabela"

= transformação inteligente de recursão em iteração

Subseqüências

$\langle z_1, \ldots, z_k \rangle$ é subseqüência de $\langle x_1, \ldots, x_m \rangle$
se existem índices $i_1 < \cdots < i_k$ tais que

$$z_1 = x_{i_1} \quad \ldots \quad z_k = x_{i_k}$$

EXEMPLOS:

$\langle 5, 9, 2, 7 \rangle$ é subseqüência de $\langle 9, 5, 6, 9, 6, 2, 7, 3 \rangle$

⟨A,A, D, A, A⟩ é subseqüência de
⟨A, B, R, A, C, A, D, A, B, R, A⟩

A			A			D	A			A
|			|			|	|			|
A	B	R	A	C	A	D	A	B	R	A

Exercício

Problema: Decidir se $Z[1\,..\,m]$ é subseqüência de $X[1\,..\,n]$

Exercício

Problema: Decidir se $Z[1\,..\,m]$ é subseqüência de $X[1\,..\,n]$

SUB-SEQ- (Z, m, X, n)

$i \leftarrow m$
$j \leftarrow n$
enquanto $i \geq 1$ **e** $j \geq 1$ **faça**
    se $Z[i] = X[j]$
        então $i \leftarrow i - 1$
    $j \leftarrow j - 1$
se $i \geq 1$
    então devolva "`não é subseqüência`"
    senão devolva "`é subseqüência`"

Exercício

Problema: Decidir se $Z[1\mathinner{\ldotp\ldotp} m]$ é subseqüência de $X[1\mathinner{\ldotp\ldotp} n]$

SUB-SEQ- (Z, m, X, n)
$i \leftarrow m$
$j \leftarrow n$
enquanto $i \geq 1$ **e** $j \geq 1$ **faça**
  se $Z[i] = X[j]$
    então $i \leftarrow i - 1$
  $j \leftarrow j - 1$
se $i \geq 1$
  então devolva "`não é subseqüência`"
  senão devolva "`é subseqüência`"

Consumo de tempo é $\mathrm{O}(m + n)$ e $\Omega(\min\{m, n\})$.

Exercício

Problema: Decidir se $Z[1\,..\,m]$ é subseqüência de $X[1\,..\,n]$

```
SUB-SEQ- (Z, m, X, n)
    i ← m
    j ← n
    enquanto i ≥ 1 e j ≥ 1 faça
        se Z[i] = X[j]
            então i ← i − 1
        j ← j − 1
    se i ≥ 1
        então devolva "não é subseqüência"
        senão devolva "é subseqüência"
```

Invariantes:

(i0) $Z[i{+}1\,..\,m]$ é subseqüência de $X[j{+}1\,..\,n]$

(i1) $Z[i\,..\,m]$ **não** é subseqüência de $X[j{+}1\,..\,n]$

Subseqüência comum máxima

Z é subseq comum de X e Y

se Z é subseqüência comum de X e de Y

ssco $=$ subseqüência comum

Exemplos: X = A B C B D A B

Y = B D C A B A

ssco = B C A

Outra ssco = B D A B

Problema

Problema: Encontrar uma ssco máxima de X e Y.

Exemplos: X = A B C B D A B

Y = B D C A B A

ssco = B C A

ssco maximal = A B A

ssco máxima = B C A B

Outra ssco máxima = B D A B

LCS = Longest Common Subsequence

diff

```
> more abracadabra
A
B
R
A
C
A
D
A
B
R
A
```

```
> more yabbadabbadoo
Y
A
B
B
A
D
A
B
B
A
D
O
O
```

diff -u abracadabra yabbadabbadoo

```
+Y
 A
 B
-R
-A
-C
+B
 A
 D
 A
 B
-R
+B
 A
+D
+O
+O
```

Subestrutura ótima

Suponha que $Z[1\,..\,k]$ é ssco máxima de $X[1\,..\,m]$ e $Y[1\,..\,n]$.

- Se $X[m] = Y[n]$, então $Z[k] = X[m] = Y[n]$ e $Z[1\,..\,k-1]$ é ssco máxima de $X[1\,..\,m-1]$ e $Y[1\,..\,n-1]$.
- Se $X[m] \neq Y[n]$, então $Z[k] \neq X[m]$ implica que $Z[1\,..\,k]$ é ssco máxima de $X[1\,..\,m-1]$ e $Y[1\,..\,n]$.
- Se $X[m] \neq Y[n]$, então $Z[k] \neq Y[n]$ implica que $Z[1\,..\,k]$ é ssco máxima de $X[1\,..\,m]$ e $Y[1\,..\,n-1]$.

Algoritmo recursivo

Devolve o comprimento de uma ssco máxima de $X[1\,..\,i]$ e $Y[1\,..\,j]$.

REC-LCS-LENGTH (X, i, Y, j)

se $i = 0$ **ou** $j = 0$
  então devolva 0
se $X[i] = Y[j]$
  então $c \leftarrow$ REC-LCS-LENGTH $(X, i{-}1, Y, j{-}1)$ $+1$
  senão $q_1 \leftarrow$ REC-LCS-LENGTH $(X, i{-}1, Y, j)$
    $q_2 \leftarrow$ REC-LCS-LENGTH $(X, i, Y, j{-}1)$
    se $q_1 \geq q2$
      então $c \leftarrow q_1$
      senão $c \leftarrow q_2$
devolva c

Consumo de tempo

$T(m, n) :=$ número máximo de comparações feitas por REC-LCS-LENGTH (X, m, Y, n)

Recorrência

$$T(0, n) = 0$$

$$T(m, 0) = 0$$

$$T(m, n) = T(m-1, n) + T(m, n-1) + 1 \text{ para } n \geq 0 \text{ e } m \geq 0$$

A que classe Ω pertence $T(m, n)$?

Recorrência

Note que $T(m,n) = T(n,m)$ para $n = 0,1,\ldots$ e $m = 0,1,\ldots$.

Seja $k := \min\{m,n\}$. Temos que

$$T(m,n) \ge T(k,k) \ge S(k),$$

onde

$$S(0) = 0$$
$$S(k) = 2S(k-1) + 1 \quad \text{para } k = 1,2,\ldots$$

$S(k)$ é $\Theta(2^k) \Rightarrow T(m,n)$ é $\Omega(2^{\min\{m,n\}})$

$T(m,n)$ é exponencial

Conclusão

O consumo de tempo do algoritmo
REC-LCS-LENGTH é $\Omega(2^{\min\{m,n\}})$.

Fórmula fechada

Prove que

$$T(m,n) = \binom{m+n}{m} - 1 \,.$$

Logo,

$$\begin{aligned} T(m,m) &= \binom{2m}{m} - 1 \\ &> \frac{4^m}{2m+1} - 1. \end{aligned}$$

Portanto, $T(m,m)$ é $\Omega(4^m/m)$.

Programação dinâmica

Problema: encontrar o comprimento de uma ssco máxima.

$c[i, j] =$ comprimento de uma ssco máxima de $X[1\,..\,i]$ e $Y[1\,..\,j]$

Recorrência:

$c[0, j] = c[i, 0] = 0$

$c[i, j] = c[i{-}1, j{-}1] + 1$ se $X[i] = Y[j]$

$c[i, j] = \max\,(c[i, j{-}1], c[i{-}1, j])$ se $X[i] \neq Y[j]$

Programação dinâmica

Cada subproblema, comprimento de uma ssco máxima de

$$X[1\,..\,i] \quad \text{e} \quad Y[1\,..\,j],$$

é resolvido uma só vez.

Em que ordem calcular os componentes da tabela c?

Para calcular $c[3, 5]$ preciso de ...

Programação dinâmica

Cada subproblema, comprimento de uma ssco máxima de

$$X[1\,.\,.\,i] \quad \text{e} \quad Y[1\,.\,.\,j],$$

é resolvido uma só vez.

Em que ordem calcular os componentes da tabela c?

Para calcular $c[3,5]$ preciso de ...

$c[3,4]$, $c[2,5]$ e de $c[2,4]$.

Programação dinâmica

Cada subproblema, comprimento de uma ssco máxima de

$$X[1\,..\,i] \quad \text{e} \quad Y[1\,..\,j],$$

é resolvido uma só vez.

Em que ordem calcular os componentes da tabela c?

Para calcular $c[3,5]$ preciso de ...

$c[3,4]$, $c[2,5]$ e de $c[2,4]$.

Calcule todos os $c[i,j]$ com $i = 1, j = 0, 1, \dots, n$,
depois todos com $i = 2, j = 0, 1, \dots, n$,
depois todos com $i = 3, j = 0, 1, \dots, n$,
etc.

Programação dinâmica

	0	1	2	3	4	5	6	7	j
0	0	0	0	0	0	0	0	0	
1	0								
2	0				$\star$	$\star$			
3	0				$\star$	??			
4	0								
5	0								
6	0								
7	0								
i									

Simulação

	Y		B	D	C	A	B	A	
X		0	1	2	3	4	5	6	j
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	??						
B	2	0							
C	3	0							
B	4	0							
D	5	0							
A	6	0							
B	7	0							

i

Simulação

	Y		B	D	C	A	B	A	
X		0	1	2	3	4	5	6	j
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	??					
B	2	0							
C	3	0							
B	4	0							
D	5	0							
A	6	0							
B	7	0							

i

Simulação

	Y		B	D	C	A	B	A	
X		0	1	2	3	4	5	6	j
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	??				
B	2	0							
C	3	0							
B	4	0							
D	5	0							
A	6	0							
B	7	0							
	i								

Simulação

	Y		B	D	C	A	B	A	
X		0	1	2	3	4	5	6	j
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	??			
B	2	0							
C	3	0							
B	4	0							
D	5	0							
A	6	0							
B	7	0							

i

Simulação

	Y		B	D	C	A	B	A	
X		0	1	2	3	4	5	6	j
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	??		
B	2	0							
C	3	0							
B	4	0							
D	5	0							
A	6	0							
B	7	0							

i

Simulação

	Y		B	D	C	A	B	A	
X		0	1	2	3	4	5	6	j
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	??	
B	2	0							
C	3	0							
B	4	0							
D	5	0							
A	6	0							
B	7	0							
	i								

Simulação

	Y		B	D	C	A	B	A	
X		0	1	2	3	4	5	6	j
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	??						
C	3	0							
B	4	0							
D	5	0							
A	6	0							
B	7	0							
	i								

Simulação

	Y		B	D	C	A	B	A	
X		0	1	2	3	4	5	6	j
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	??					
C	3	0							
B	4	0							
D	5	0							
A	6	0							
B	7	0							
	i								

Simulação

	Y		B	D	C	A	B	A	
X		0	1	2	3	4	5	6	j
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	??				
C	3	0							
B	4	0							
D	5	0							
A	6	0							
B	7	0							
	i								

Simulação

	Y		B	D	C	A	B	A	
X		0	1	2	3	4	5	6	j
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	1	??			
C	3	0							
B	4	0							
D	5	0							
A	6	0							
B	7	0							
	i								

Simulação

	Y		B	D	C	A	B	A	
X		0	1	2	3	4	5	6	j
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	1	1	??		
C	3	0							
B	4	0							
D	5	0							
A	6	0							
B	7	0							
	i								

Simulação

	Y		B	D	C	A	B	A	
X		0	1	2	3	4	5	6	j
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	1	1	2	??	
C	3	0							
B	4	0							
D	5	0							
A	6	0							
B	7	0							
	i								

Simulação

	Y		B	D	C	A	B	A	
X		0	1	2	3	4	5	6	j
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	1	1	2	2	
C	3	0	??						
B	4	0							
D	5	0							
A	6	0							
B	7	0							
	i								

Simulação

	Y		B	D	C	A	B	A	
X		0	1	2	3	4	5	6	j
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	1	1	2	2	
C	3	0	1	??					
B	4	0							
D	5	0							
A	6	0							
B	7	0							
	i								

Simulação

	Y		B	D	C	A	B	A	
X		0	1	2	3	4	5	6	j
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	1	1	2	2	
C	3	0	1	1	??				
B	4	0							
D	5	0							
A	6	0							
B	7	0							
	i								

Simulação

	Y		B	D	C	A	B	A	
X		0	1	2	3	4	5	6	j
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	1	1	2	2	
C	3	0	1	1	2	??			
B	4	0							
D	5	0							
A	6	0							
B	7	0							
	i								

Simulação

	Y		B	D	C	A	B	A	
X		0	1	2	3	4	5	6	j
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	1	1	2	2	
C	3	0	1	1	2	2	??		
B	4	0							
D	5	0							
A	6	0							
B	7	0							

i

Simulação

Y			B	D	C	A	B	A	
X		0	1	2	3	4	5	6	j
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	1	1	2	2	
C	3	0	1	1	2	2	2	??	
B	4	0							
D	5	0							
A	6	0							
B	7	0							
	i								

Simulação

	Y		B	D	C	A	B	A	
X		0	1	2	3	4	5	6	j
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	1	1	2	2	
C	3	0	1	1	2	2	2	2	
B	4	0	??						
D	5	0							
A	6	0							
B	7	0							
	i								

Simulação

	Y		B	D	C	A	B	A	
X		0	1	2	3	4	5	6	j
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	1	1	2	2	
C	3	0	1	1	2	2	2	2	
B	4	0	1	??					
D	5	0							
A	6	0							
B	7	0							
	i								

Simulação

	Y		B	D	C	A	B	A	
X		0	1	2	3	4	5	6	j
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	1	1	2	2	
C	3	0	1	1	2	2	2	2	
B	4	0	1	1	??				
D	5	0							
A	6	0							
B	7	0							
	i								

Simulação

	Y		B	D	C	A	B	A	
X		0	1	2	3	4	5	6	j
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	1	1	2	2	
C	3	0	1	1	2	2	2	2	
B	4	0	1	1	2	??			
D	5	0							
A	6	0							
B	7	0							
	i								

Simulação

	Y		B	D	C	A	B	A	
X		0	1	2	3	4	5	6	j
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	1	1	2	2	
C	3	0	1	1	2	2	2	2	
B	4	0	1	1	2	2	??		
D	5	0							
A	6	0							
B	7	0							
	i								

Simulação

	Y		B	D	C	A	B	A	
X		0	1	2	3	4	5	6	j
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	1	1	2	2	
C	3	0	1	1	2	2	2	2	
B	4	0	1	1	2	2	3	??	
D	5	0							
A	6	0							
B	7	0							
	i								

Simulação

	Y		B	D	C	A	B	A	
X		0	1	2	3	4	5	6	j
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	1	1	2	2	
C	3	0	1	1	2	2	2	2	
B	4	0	1	1	2	2	3	3	
D	5	0	??						
A	6	0							
B	7	0							
	i								

Simulação

	Y		B	D	C	A	B	A	
X		0	1	2	3	4	5	6	j
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	1	1	2	2	
C	3	0	1	1	2	2	2	2	
B	4	0	1	1	2	2	3	3	
D	5	0	1	??					
A	6	0							
B	7	0							
	i								

Simulação

	Y		B	D	C	A	B	A	
X		0	1	2	3	4	5	6	j
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	1	1	2	2	
C	3	0	1	1	2	2	2	2	
B	4	0	1	1	2	2	3	3	
D	5	0	1	2	??				
A	6	0							
B	7	0							
	i								

Simulação

	Y		B	D	C	A	B	A	
X		0	1	2	3	4	5	6	j
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	1	1	2	2	
C	3	0	1	1	2	2	2	2	
B	4	0	1	1	2	2	3	3	
D	5	0	1	2	2	??			
A	6	0							
B	7	0							
	i								

Simulação

	Y		B	D	C	A	B	A	
X		0	1	2	3	4	5	6	j
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	1	1	2	2	
C	3	0	1	1	2	2	2	2	
B	4	0	1	1	2	2	3	3	
D	5	0	1	2	2	2	??		
A	6	0							
B	7	0							
	i								

Simulação

	Y		B	D	C	A	B	A	
X		0	1	2	3	4	5	6	j
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	1	1	2	2	
C	3	0	1	1	2	2	2	2	
B	4	0	1	1	2	2	3	3	
D	5	0	1	2	2	2	3	??	
A	6	0							
B	7	0							
	i								

Simulação

	Y		B	D	C	A	B	A	
X		0	1	2	3	4	5	6	j
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	1	1	2	2	
C	3	0	1	1	2	2	2	2	
B	4	0	1	1	2	2	3	3	
D	5	0	1	2	2	2	3	3	
A	6	0	??						
B	7	0							
	i								

Simulação

	Y		B	D	C	A	B	A	
X		0	1	2	3	4	5	6	j
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	1	1	2	2	
C	3	0	1	1	2	2	2	2	
B	4	0	1	1	2	2	3	3	
D	5	0	1	2	2	2	3	3	
A	6	0	1	??					
B	7	0							
	i								

Simulação

	Y		B	D	C	A	B	A	
X		0	1	2	3	4	5	6	j
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	1	1	2	2	
C	3	0	1	1	2	2	2	2	
B	4	0	1	1	2	2	3	3	
D	5	0	1	2	2	2	3	3	
A	6	0	1	2	??				
B	7	0							
	i								

Simulação

	Y		B	D	C	A	B	A	
X		0	1	2	3	4	5	6	j
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	1	1	2	2	
C	3	0	1	1	2	2	2	2	
B	4	0	1	1	2	2	3	3	
D	5	0	1	2	2	2	3	3	
A	6	0	1	2	2	??			
B	7	0							
	i								

Simulação

	Y		B	D	C	A	B	A	
X		0	1	2	3	4	5	6	j
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	1	1	2	2	
C	3	0	1	1	2	2	2	2	
B	4	0	1	1	2	2	3	3	
D	5	0	1	2	2	2	3	3	
A	6	0	1	2	2	3	??		
B	7	0							
	i								

Simulação

	Y		B	D	C	A	B	A	
X		0	1	2	3	4	5	6	j
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	1	1	2	2	
C	3	0	1	1	2	2	2	2	
B	4	0	1	1	2	2	3	3	
D	5	0	1	2	2	2	3	3	
A	6	0	1	2	2	3	3	??	
B	7	0							
	i								

Simulação

	Y		B	D	C	A	B	A	
X		0	1	2	3	4	5	6	j
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	1	1	2	2	
C	3	0	1	1	2	2	2	2	
B	4	0	1	1	2	2	3	3	
D	5	0	1	2	2	2	3	3	
A	6	0	1	2	2	3	3	4	
B	7	0	??						
	i								

Simulação

	Y		B	D	C	A	B	A	
X		0	1	2	3	4	5	6	j
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	1	1	2	2	
C	3	0	1	1	2	2	2	2	
B	4	0	1	1	2	2	3	3	
D	5	0	1	2	2	2	3	3	
A	6	0	1	2	2	3	3	4	
B	7	0	1	??					
	i								

Simulação

	Y		B	D	C	A	B	A	
X		0	1	2	3	4	5	6	j
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	1	1	2	2	
C	3	0	1	1	2	2	2	2	
B	4	0	1	1	2	2	3	3	
D	5	0	1	2	2	2	3	3	
A	6	0	1	2	2	3	3	4	
B	7	0	1	2	??				
	i								

Simulação

	Y		B	D	C	A	B	A	
X		0	1	2	3	4	5	6	j
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	1	1	2	2	
C	3	0	1	1	2	2	2	2	
B	4	0	1	1	2	2	3	3	
D	5	0	1	2	2	2	3	3	
A	6	0	1	2	2	3	3	4	
B	7	0	1	2	2	??			
	i								

Simulação

	Y		B	D	C	A	B	A	
X		0	1	2	3	4	5	6	j
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	1	1	2	2	
C	3	0	1	1	2	2	2	2	
B	4	0	1	1	2	2	3	3	
D	5	0	1	2	2	2	3	3	
A	6	0	1	2	2	3	3	4	
B	7	0	1	2	2	3	??		
	i								

Simulação

	Y		B	D	C	A	B	A	
X		0	1	2	3	4	5	6	j
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	1	1	2	2	
C	3	0	1	1	2	2	2	2	
B	4	0	1	1	2	2	3	3	
D	5	0	1	2	2	2	3	3	
A	6	0	1	2	2	3	3	4	
B	7	0	1	2	2	3	4	??	
	i								

Simulação

	Y		B	D	C	A	B	A	
X		0	1	2	3	4	5	6	j
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	1	1	2	2	
C	3	0	1	1	2	2	2	2	
B	4	0	1	1	2	2	3	3	
D	5	0	1	2	2	2	3	3	
A	6	0	1	2	2	3	3	4	
B	7	0	1	2	2	3	4	4	
	i								

Algoritmo de programação dinâmica

Devolve o comprimento de uma ssco máxima de $X[1\,..\,m]$ e $Y[1\,..\,n]$.

LCS-LENGTH (X, m, Y, n)

para $i \leftarrow 0$ **até** m **faça**
    $c[i, 0] \leftarrow 0$
para $j \leftarrow 1$ **até** n **faça**
    $c[0, j] \leftarrow 0$
para $i \leftarrow 1$ **até** m **faça**
    para $j \leftarrow 1$ **até** n **faça**
        se $X[i] = Y[j]$
            então $c[i, j] \leftarrow c[i-1, j-1] + 1$
            senão se $c[i-1, j] \geq c[i, j-1]$
                então $c[i, j] \leftarrow c[i-1, j]$
                senão $c[i, j] \leftarrow c[i, j-1]$
devolva $c[m, n]$

Conclusão

O consumo de tempo do algoritmo LCS-LENGTH é $\Theta(mn)$.

Subseqüência comum máxima

	Y		B	D	C	A	B	A	
X		0	1	2	3	4	5	6	j
	0	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	
A	1	$\star$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\nwarrow$	$\leftarrow$	$\nwarrow$	
B	2	$\star$	$\nwarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\uparrow$	$\nwarrow$	$\leftarrow$	
C	3	$\star$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\nwarrow$	$\leftarrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	
B	4	$\star$	$\nwarrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\nwarrow$	$\leftarrow$	
D	5	$\star$	$\uparrow$	$\nwarrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	
A	6	$\star$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\nwarrow$	$\uparrow$	$\nwarrow$	
B	7	$\star$	$\nwarrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\nwarrow$	$\uparrow$	

i

Algoritmo de programação dinâmica

LCS-LENGTH (X, m, Y, n)

para $i \leftarrow 0$ **até** m **faça**
    $c[i, 0] \leftarrow 0$
para $j \leftarrow 1$ **até** n **faça**
    $c[0, j] \leftarrow 0$
para $i \leftarrow 1$ **até** m **faça**
    para $j \leftarrow 1$ **até** n **faça**
        se $X[i] = Y[j]$
            então $c[i, j] \leftarrow c[i-1, j-1] + 1$
                $b[i, j] \leftarrow$ "$\nwarrow$"
            senão se $c[i-1, j] \geq c[i, j-1]$
                então $c[i, j] \leftarrow c[i-1, j]$
                    $b[i, j] \leftarrow$ "$\uparrow$"
                senão $c[i, j] \leftarrow c[i, j-1]$
                    $b[i, j] \leftarrow$ "$\leftarrow$"
devolva c e b

Get-LCS

GET-LCS $(X, m, n, b,$ máxcomp$)$

$k \leftarrow$ máxcomp
$i \leftarrow m$
$j \leftarrow n$
enquanto $i > 0$ **e** $j > 0$ **faça**
    se $b[i, j] =$ "$\nwarrow$"
        então $Z[k] \leftarrow X[i]$
            $k \leftarrow k - 1 \quad i \leftarrow i - 1 \quad j \leftarrow j - 1$
        senão se $b[i, j] =$ "$\leftarrow$"
            então $j \leftarrow j - 1$
            senão $i \leftarrow i - 1$
devolva Z

Consumo de tempo é $\mathrm{O}(m + n)$ e $\Omega(\min\{m, n\})$.

Versão recursiva eficiente

MEMOIZED-LCS-LENGTH (X, m, Y, n)

para $i \leftarrow 0$ **até** m **faça**

    para $j \leftarrow 1$ **até** n **faça**

        $c[i, j] \leftarrow \infty$

devolva LOOKUP-LCS (c, m, n)

Versão recursiva eficiente

LOOKUP-LCS (c, i, j)

se $c[i, j] < \infty$
    então devolva $c[i, j]$
se $i = 0$ **ou** $j = 0$ **então** $c[i, j] \leftarrow 0$
senão se $X[i] = Y[j]$
    então $c[i, j] \leftarrow$ LOOKUP-LCS $(c, i-1, j-1)$ $+1$
    senão $q_1 \leftarrow$ LOOKUP-LCS $(c, i-1, j)$
        $q_2 \leftarrow$ LOOKUP-LCS $(c, i, j-1)$
        se $q_1 \geq q_2$
            então $c[i, j] \leftarrow q_1$
            senão $c[i, j] \leftarrow q_2$
devolva $c[i, j]$

Exercícios

Exercício 20.A

Escreva um algoritmo para decidir se $\langle z_1, \ldots, z_k \rangle$ é subseqüência de $\langle x_1, \ldots, x_m \rangle$. Prove rigorosamente que o seu algoritmo está correto.

Exercício 20.B

Suponha que os elementos de uma seqüência $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ são distintos dois a dois. Quantas subseqüências tem a seqüência?

Exercício 20.C

Uma subseqüência crescente Z de uma seqüência X e é *máxima* se não existe outra subseqüência crescente mais longa. A subseqüência $\langle 5, 6, 9 \rangle$ de $\langle 9, 5, 6, 9, 6, 2, 7 \rangle$ é máxima? Dê uma seqüência crescente máxima de $\langle 9, 5, 6, 9, 6, 2, 7 \rangle$. Mostre que o algoritmo "guloso" óbvio não é capaz, em geral, de encontrar uma subseqüência crescente máxima de uma seqüência dada. (Algoritmo guloso óbvio: escolha o menor elemento de X; a partir daí, escolha sempre o próximo elemento de X que seja maior ou igual ao último escolhido.)

Exercício 20.D

Escreva um algoritmo de programação dinâmica para resolver o problema da subseqüência crescente máxima.

Mais exercícios

Exercício 20.E [CLRS 15.4-5]
Mostre como o algoritmo da subseqüência comum máxima pode ser usado para resolver o problema da subseqüência crescente máxima de uma seqüência numérica. Dê uma delimitação justa, em notação Θ, do consumo de tempo de sua solução.

Exercício 20.F [Printing neatly. CLRS 15-2]
Considere a seqüência $P_1, P_2, \ldots, P_n$ de palavras que constitui um parágrafo de texto. A palavra P_i tem l_i caracteres. Queremos imprimir as palavras em linhas, na ordem dada, de modo que cada linha tenha no máximo M caracteres. Se uma determinada linha contém as palavras $P_i, P_{i+1}, \ldots, P_j$ (com $i \leq j$) e há exatamente um espaço entre cada par de palavras consecutivas, o número de espaços no fim da linha é

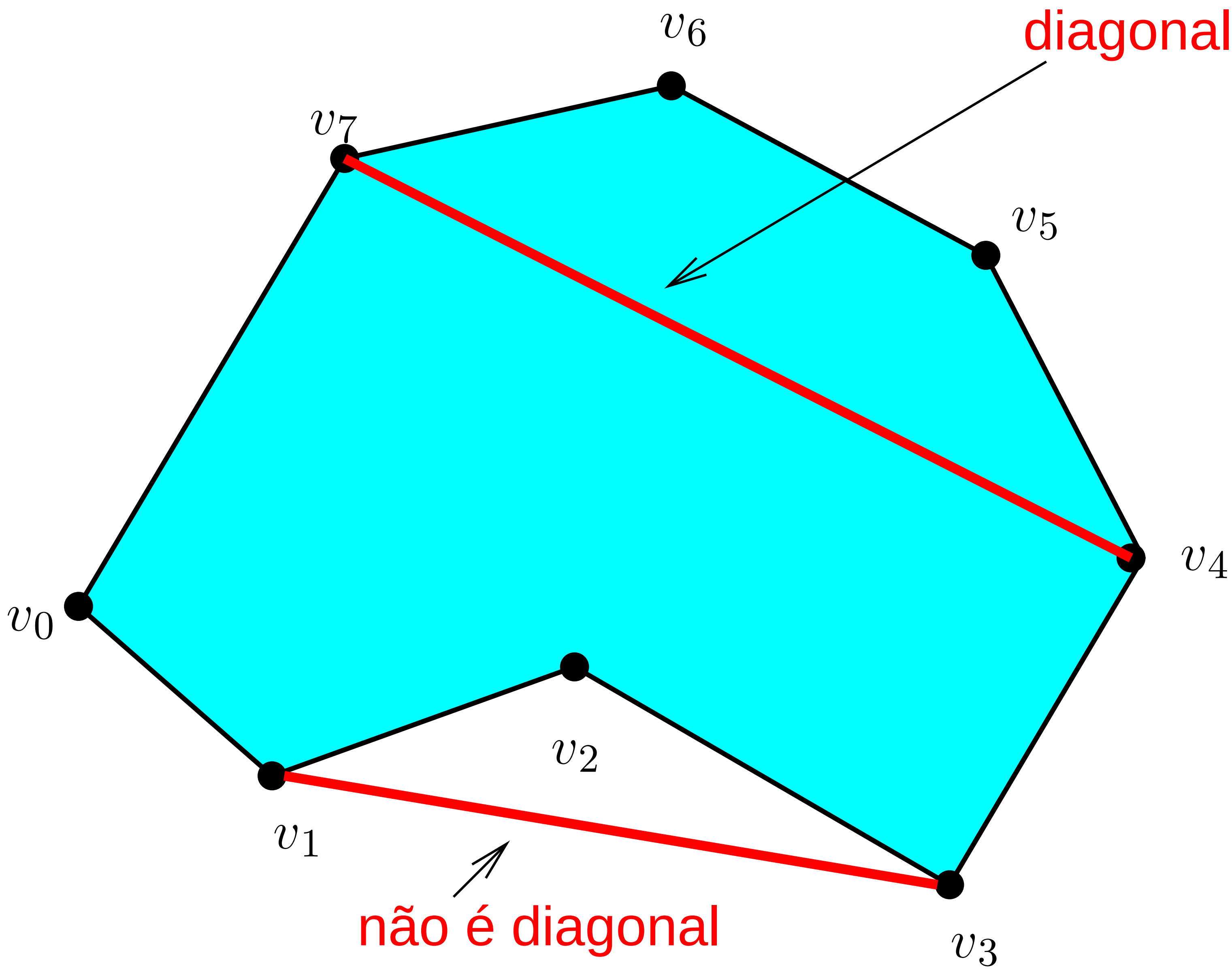
$$M - (l_i + 1 + l_{i+1} + 1 + \cdots + 1 + l_j)\,.$$

É claro que não devemos permitir que esse número seja negativo. Queremos minimizar, com relação a todas as linhas exceto a última, a soma dos cubos dos números de espaços no fim de cada linha. (Assim, se temos linhas $1, 2, \ldots, L$ e b_p espaços no fim da linha p, queremos minimizar $b_1^3 + b_2^3 + \cdots + b_{L-1}^3$).
Dê um exemplo para mostrar que algoritmos inocentes não resolvem o problema. Dê um algoritmo de programação dinâmica que resolva o problema. Qual a “optimal substructure property” para esse problema? Faça uma análise do consumo de tempo do algoritmo.

Mais programação dinâmica

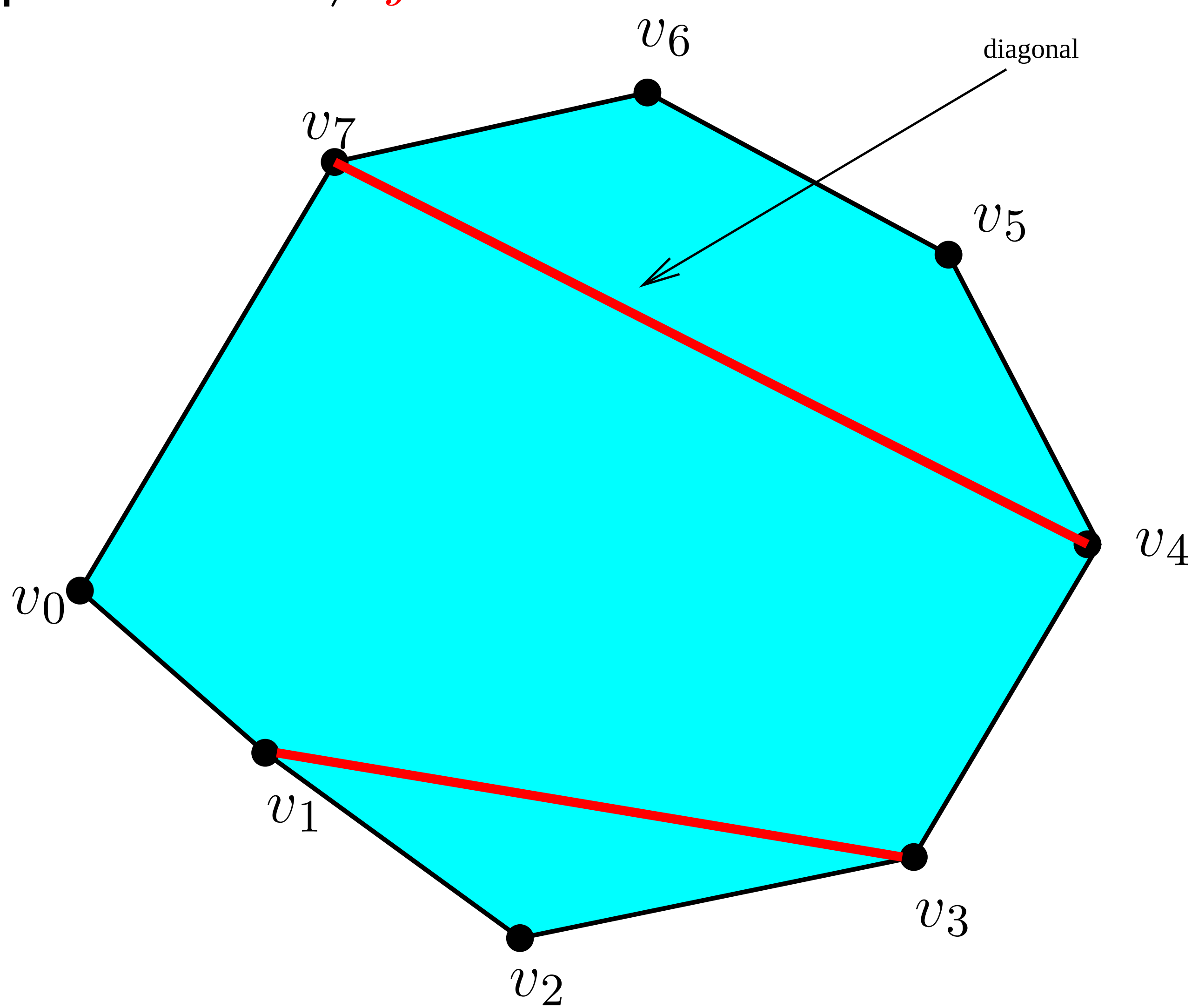
CLR 16.4

Polígono e diagonais



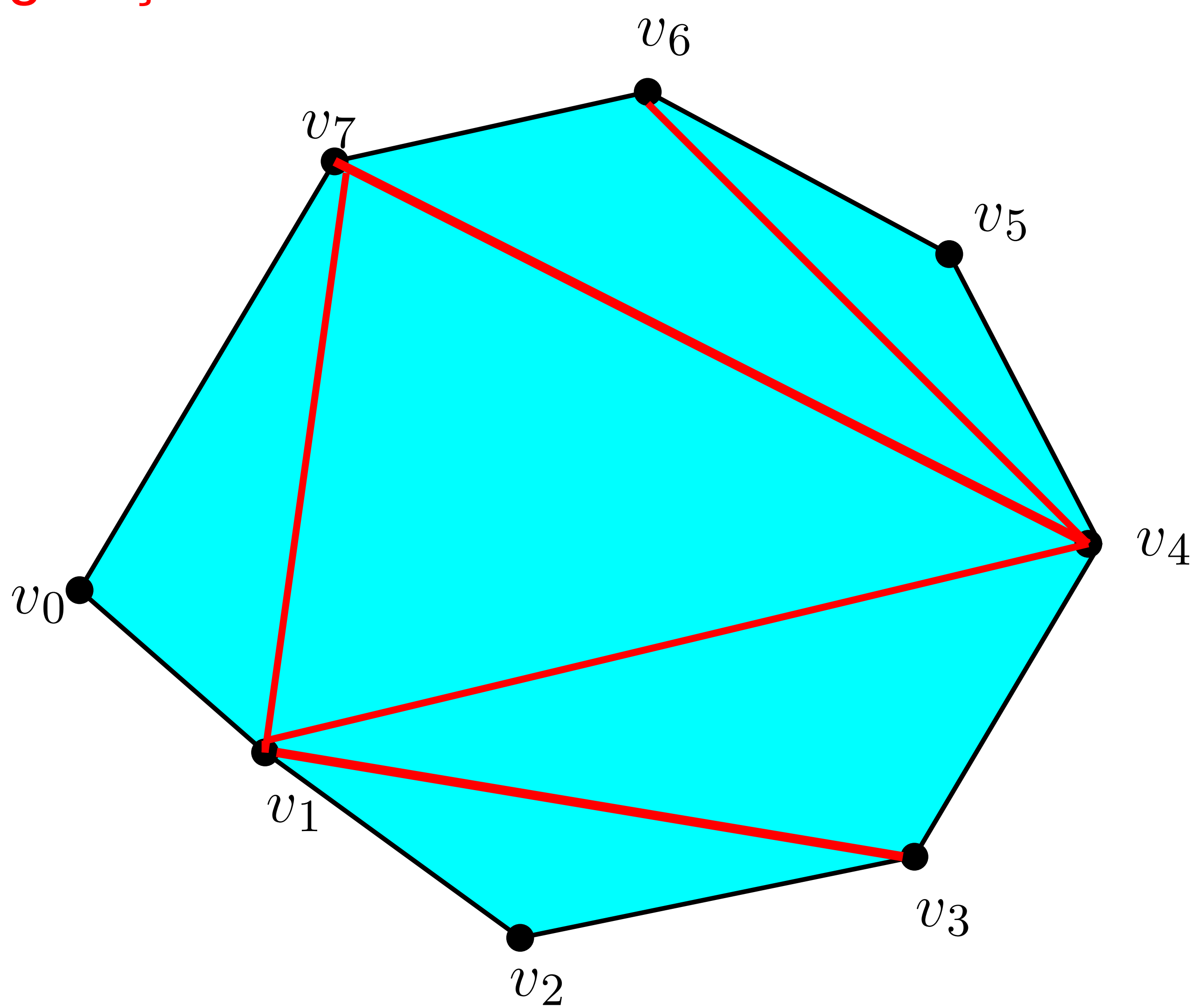
Polígono convexo

$P = \langle v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}, v_n \rangle$ é convexo se todo segmento $v_i v_j$ é diagonal para todo $i \neq j \pm 1$.



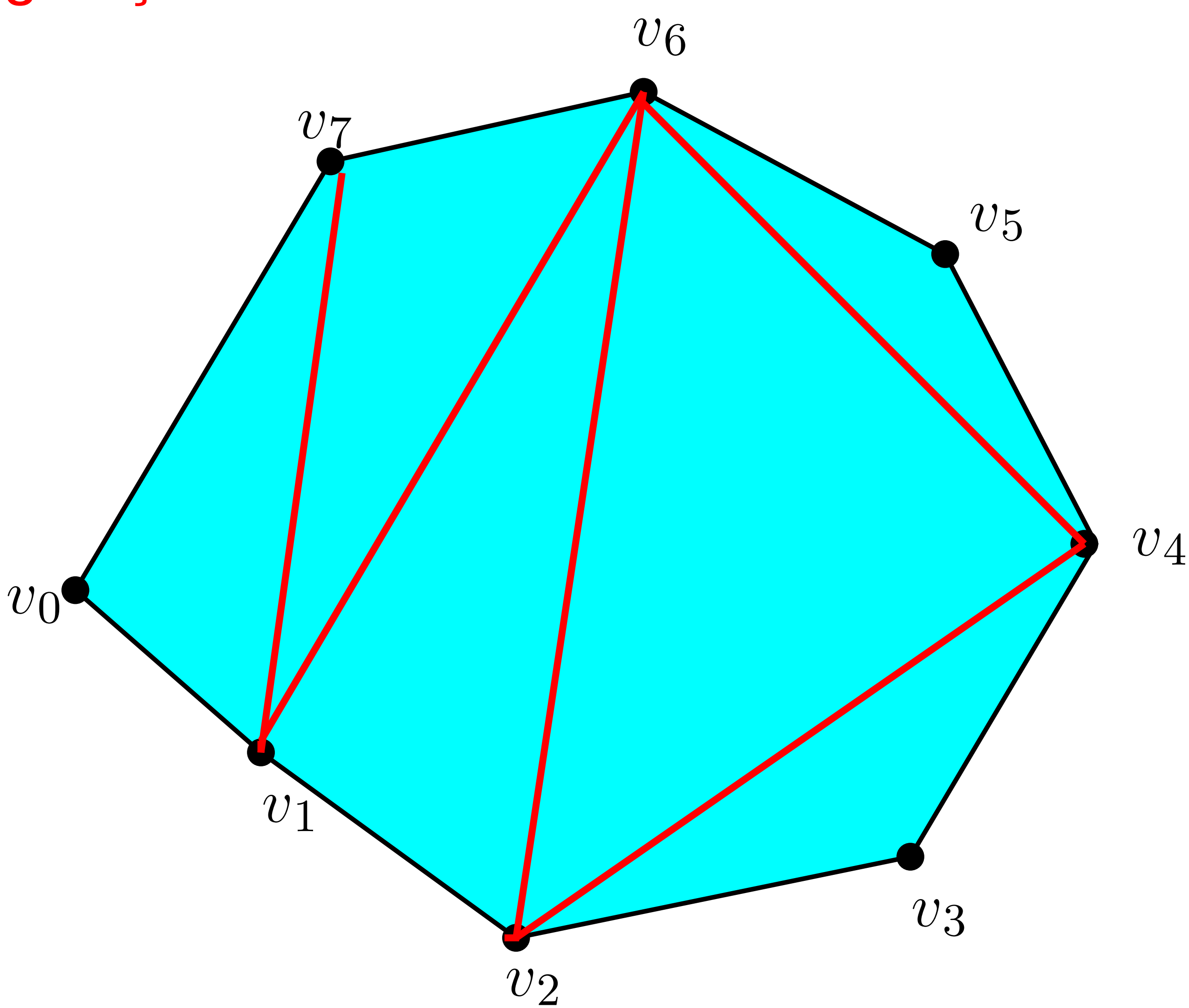
Triangulação de um polígono

Se colocarmos em um polígono P o maior número possível de diagonais que duas-a-duas não se cruzam obteremos uma triangulação de P.

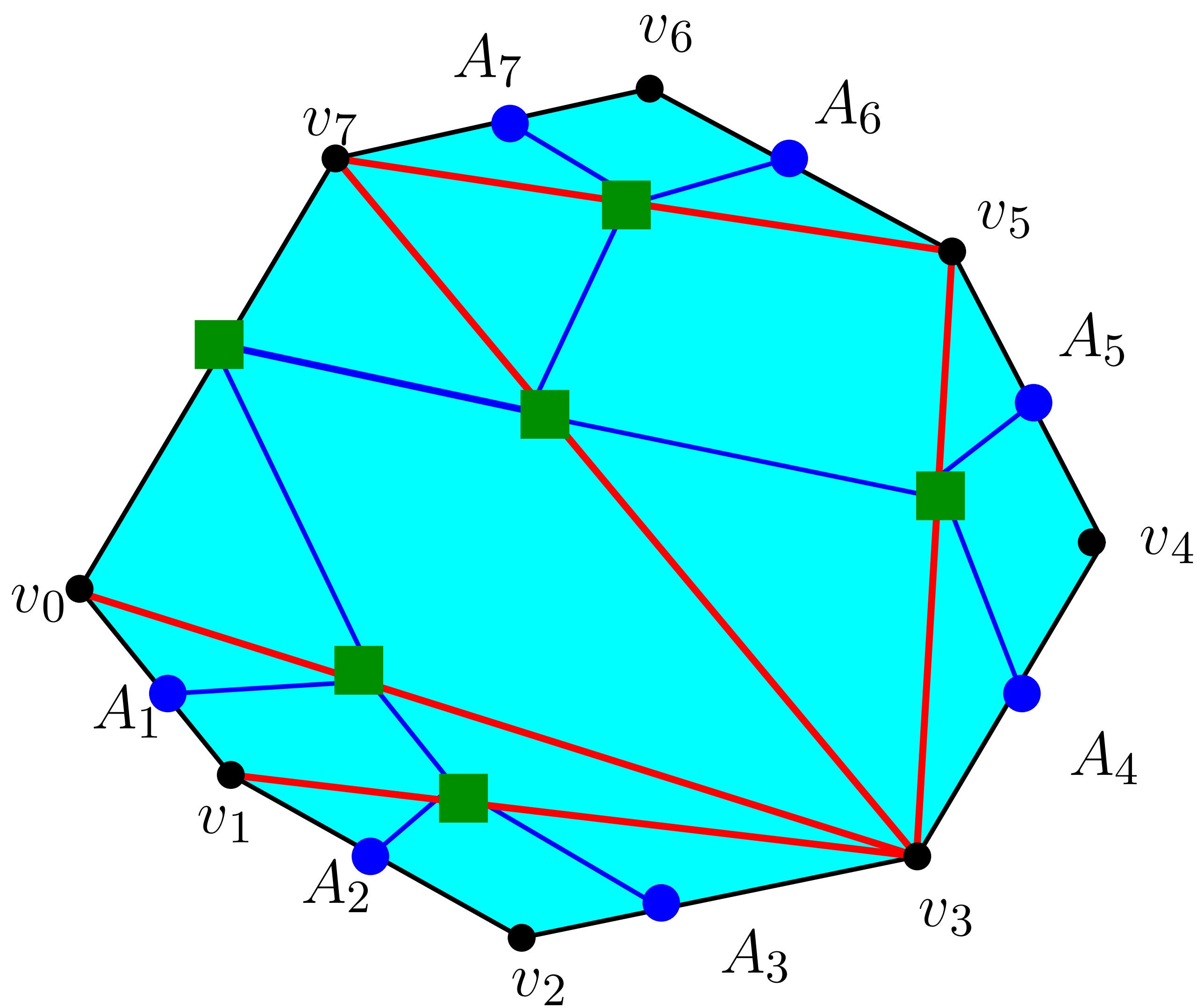


Triangulação de um polígono

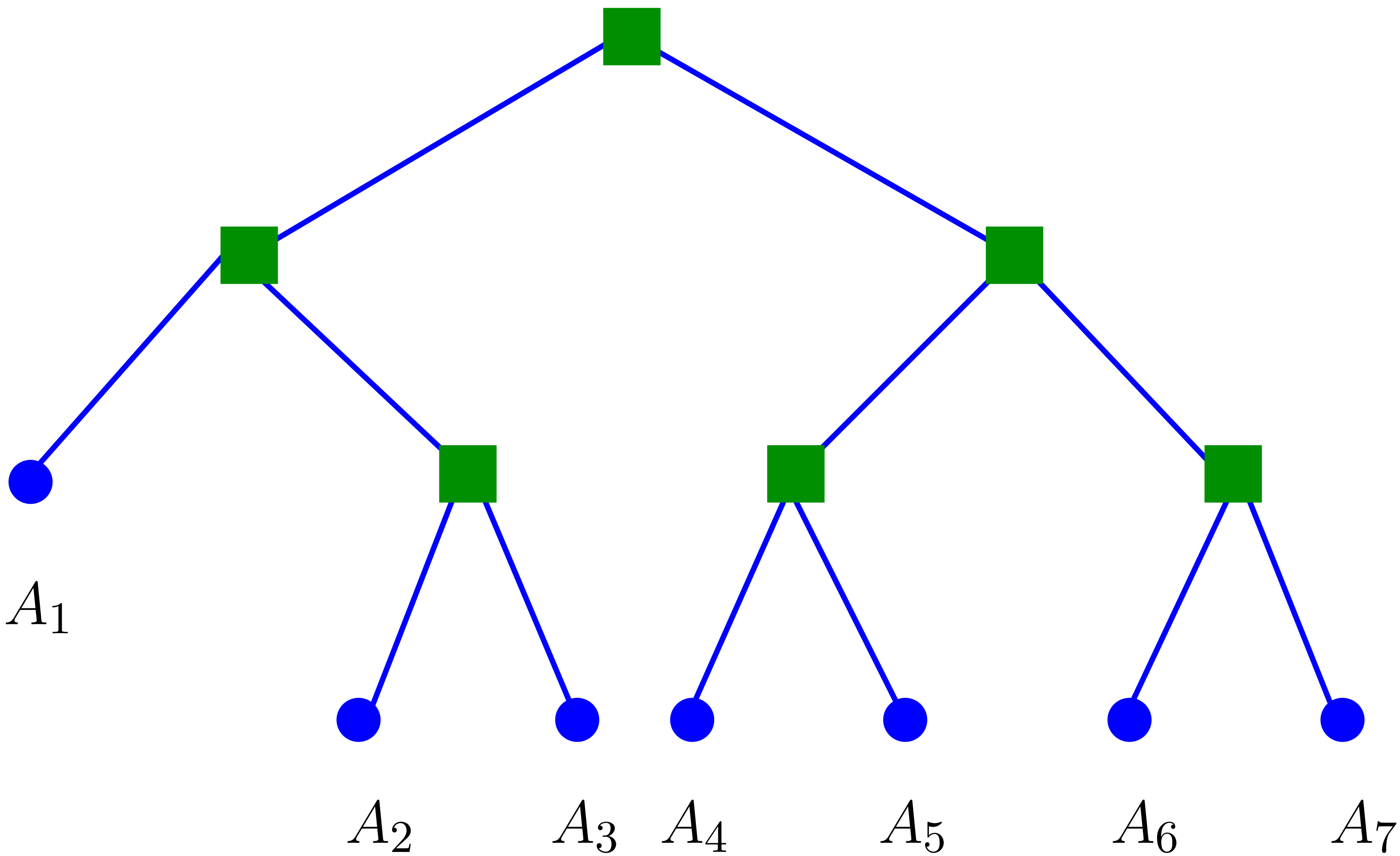
Se colocarmos em um polígono P o maior número possível de diagonais que duas-a-duas não se cruzam obteremos uma triangulação de P.



Triângulações e árvores binárias



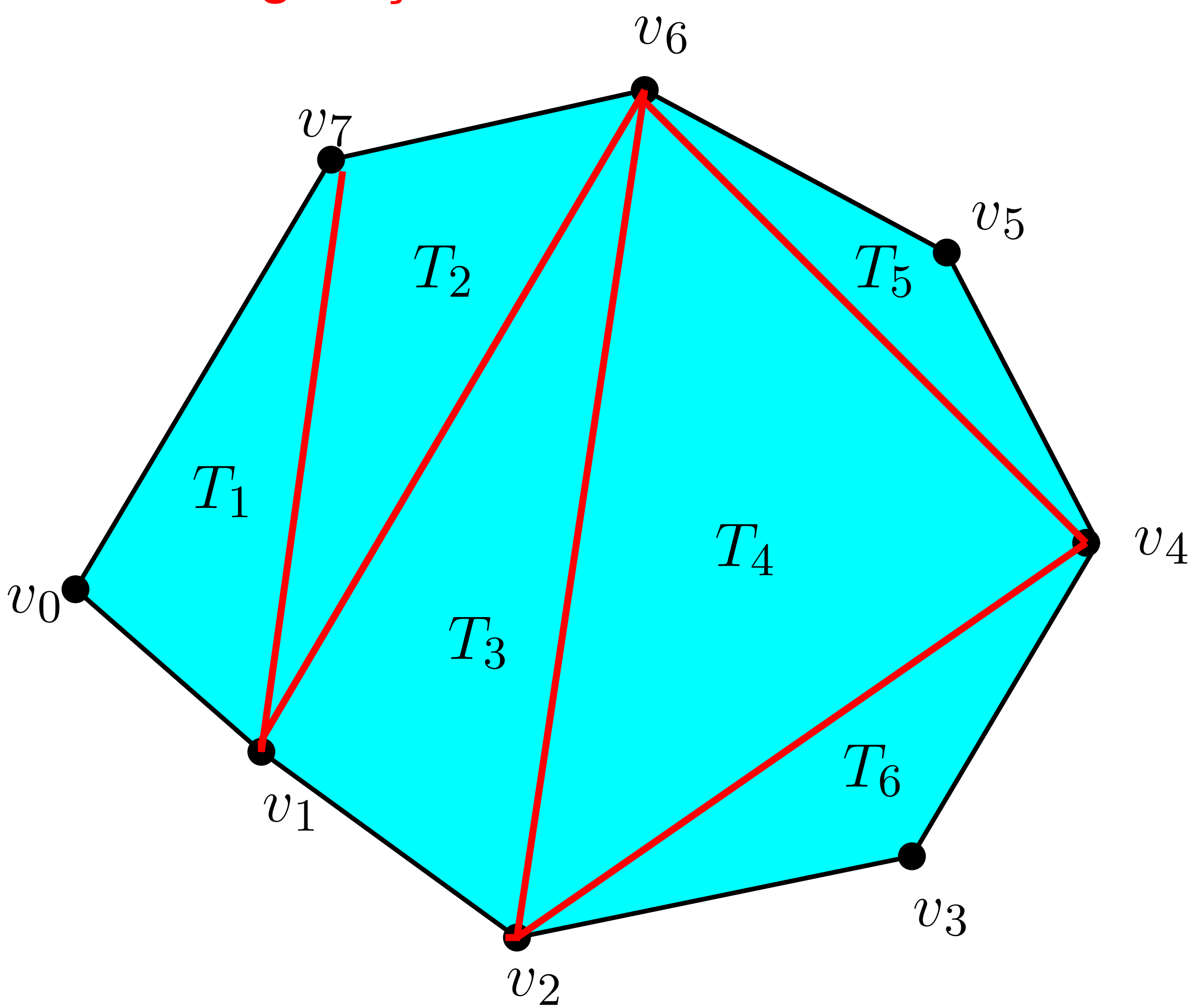
Mult. Matriz e árvores binárias



$$(A_1\,(A_2A_3))\,((A_4A_5)\,(A_6A_7))$$

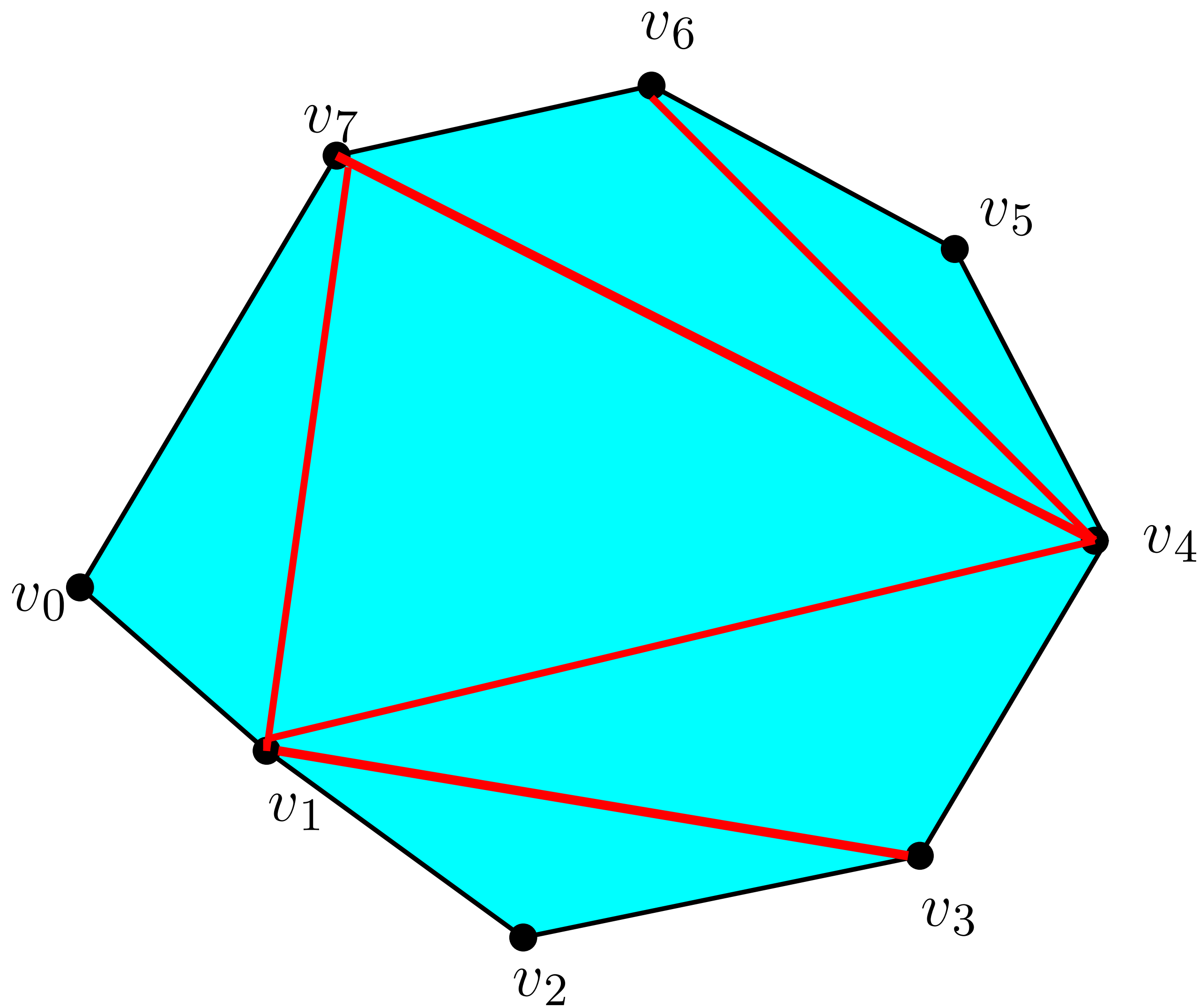
Custo de uma triangulação

c = função associa um custo $c(i, k, j)$ ao triângulo $\langle v_i, v_k, v_j \rangle$
custo de uma triangulação $=$ soma dos custos do triângulos



Triangulação ótima

Problema: Dado um polígono convexo $P = \langle v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}, v_n \rangle$ e uma função custo c encontrar uma triangulação de P de custo mínimo.



Soluções ótimas contêm soluções ótimas

Se uma triangulação $\mathcal{T}$ que contém o triângulo

$$\langle v_0, v_k, v_n \rangle$$

é de custo mínimo então a restrição de $\mathcal{T}$ aos polígonos

$$\langle v_0, v_1, \ldots, v_k \rangle \quad \text{e} \quad \langle v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n \rangle$$

também tem custo mínimo.

Decomposição: $\langle v_0, v_1, \ldots, v_k \rangle \, \langle v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n \rangle$

Decomposição sugere um algoritmo recursivo.

Algoritmo recursivo

Recebe $P = \langle v_{i-1}, v_i, \ldots, v_j \rangle$ e função custo c e devolve o custo mínimo de uma triangulação de P.

REC-TRIANG-ÓTIMA (c, i, j)

se $i = j$
    então devolva 0
$t \leftarrow \infty$
para $k \leftarrow i$ **até** $j - 1$ **faça**
    $q_1 \leftarrow$ REC-TRIANG-ÓTIMA (c, i, k)
    $q_2 \leftarrow$ REC-TRIANG-ÓTIMA $(c, k+1, j)$
    $q \leftarrow q_1 + c(i-1, k, j) + q_2$
    se $q < t$
        então $t \leftarrow q$
devolva t

Consumo de tempo?

Consumo de tempo

O consumo de tempo do algoritmo
REC-TRIANG-ÓTIMA é $\Omega(3^n)$.

Veja a análise do algoritmo REC-MAT-CHAIN.

Programação dinâmica

$t[i,j] =$ custo mínimo de uma triangulação de $\langle v_{i-1}, v_i, \ldots, v_j \rangle$

se $i = j$ então $t[i,j] = 0$

se $i < j$ então

$$t[i,j] = \min_{i \leq k < j} \{\, t[i,k] + c(i-1,k,j) + t[k+1,j] \,\}$$

Exemplo:

$$t[3,7] = \min_{3 \leq k < 7} \{\, t[3,k] + c(2,k,7) + t[k+1,7] \,\}$$

Programação dinâmica

Cada subproblema

$$\langle v_{i-1}, \ldots, v_j \rangle$$

é resolvido uma só vez.

Em que ordem calcular os componentes da tabela m?

Para calcular $t[2,6]$ preciso de ...

$t[2,2]$, $t[2,3]$, $t[2,4]$, $t[2,5]$ e de
$t[3,6]$, $t[4,6]$, $t[5,6]$, $t[6,6]$.

Calcule todos os $t[i,j]$ com $j-i+1=2$,
depois todos com $j-i+1=3$,
depois todos com $j-i+1=4$,
etc.

Programação dinâmica

	1	2	3	4	5	6	7	8	j
1	0								
2		0	$\star$	$\star$	$\star$	??			
3			0			$\star$			
4				0		$\star$			
5					0	$\star$			
6						0			
7							0		
8								0	
i									

Algoritmo de programação dinâmica

Recebe função custo c e devolve $t[1,n]$.

TRIANG-ÓTIMA (c,n)

para $i \leftarrow 1$ **até** n **faça**
  $t[i,i] \leftarrow 0$
para $l \leftarrow 2$ **até** n **faça**
  para $i \leftarrow 1$ **até** $n-l+1$ **faça**
    $j \leftarrow i+l-1$
    $t[i,j] \leftarrow \infty$
    para $k \leftarrow i$ **até** $j-1$ **faça**
      $q \leftarrow t[i,k] + c(i-1,k,j) + t[k+1,j]$
      se $q < t[i,j]$
        então $t[i,j] \leftarrow q$
devolva $t[1,n]$

Correção e consumo de tempo

O consumo de tempo do algoritmo TRIANG-ÓTIMA é $\Theta(n^3)$.

Veja a análise do algoritmo MATRIX-CHAIN-ORDER.

Versão recursiva eficiente

MEMOIZED-TRIANG-ÓTIMA (p, n)

para $i \leftarrow 1$ **até** n **faça**

    para $j \leftarrow 1$ **até** n **faça**

        $t[i, j] \leftarrow \infty$

devolva LOOKUP-TRIANG $(c, 1, n)$

Versão recursiva eficiente

LOOKUP-TRIANG (c, i, j)

se $c[i, j] < \infty$
  então devolva $c[i, j]$
se $i = j$
  então $t[i, j] \leftarrow 0$
  senão para $k \leftarrow i$ **até** $j - 1$ **faça**
    $q_1 \leftarrow$ LOOKUP-TRIANG (c, i, k)
    $q_2 \leftarrow$ LOOKUP-TRIANG $(c, k{+}1, j)$
    $q \leftarrow q_1 + c(i{-}1, k, j) + q_2$
    se $q < t[i, j]$
      então $t[i, j] \leftarrow q$
devolva $t[1, n]$

Exercícios

Exercício 20.G [CLR 16.4-1]
Prove que toda triangulação de um polígono convexo com n vértices possui $n - 3$ diagonais e $n - 2$ triângulos.

Exercício 20.H [CLR 16.4-2]
Professor Guinevere sugere que existe um algoritmo mais eficiente para resolver o problema da triângulação ótima quando custo de um triângulo é a sua área. O professor tem razão?

Exercício 20.I [CLR 16.4-3]
Suponha que um custo seja associado a cada diagonal. e que o custo de uma triangulação seja a soma dos custos de suas diagonais. Mostre que o problema da triangulação ótima com custos nas diagonais é um caso particular do problema da triangulação ótima com custos associados aos triângulos.

Exercício 20.J [CLR 16.4-4]
Encontre uma triângulação ótima de um poligono regular com 8 lados. Use para isto a função custo que associa a cada triângulo é o valor do seu perímetro.