Melhores momentos

AULA PASSADA

Busca de palavras em um texto

Dizemos que um vetor $P[1\,..\,m]$ ocorre em um vetor $T[1\,..\,n]$ se

$$P[1\,..\,m] = T[s+1\,..\,s+m]$$

para algum s em $[0\,..\,n{-}m]$.

Exemplo:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
T	x	c	b	a	b	b	c	b	a	x

	1	2	3	4
P	b	c	b	a

$P[1\,..\,4]$ ocorre em $T[1\,..\,10]$ com deslocamento 5.

O valor s é um deslocamento válido.

Busca de palavras em um texto

Problema: Dados $P[1\,..\,m]$ e $T[1\,..\,n]$, encontrar todos os deslocamentos válidos.

Exemplo:

Para $n = 10$, $m = 4$, e

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
T	b	b	a	b	a	b	a	c	b	a

	1	2	3	4
P	b	a	b	a

Os deslocamentos válidos são 1 e 3.

Simulação

$P =$ a b a b b a b a b b a

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	
	a	b	a	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a	T
1	a	b	a	b																				
2		a																						
3			a	b																				
4				a	b	a	b	b																
5					a																			
6						a	b	a	b	b	a	b	a	b	b									
7							a																	
8								a	b	a														
9									a															
10										a														
11											a	b	a	b										
12												a												
13													a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a	

Naive-String-Matcher

Recebe $P[1\,..\,m]$ e $T[1\,..\,n]$, e devolve todos os deslocamentos válidos.

NAIVE-STRING-MATCHER (P, m, T, n)

1 **para** $i \leftarrow 1$ **até** $n - m + 1$ **faça**
2 $\quad q \leftarrow 0$
3 $\quad$ **enquanto** $q < m$ **e** $P[q+1] = T[i+q]$ **faça**
4 $\quad\quad q \leftarrow q + 1$
5 $\quad$ **se** $q = m$
6 $\quad\quad$ **então** "P ocorre com deslocamento $i - 1$"

Relação invariante: na linha 3 vale que

(i0) $P[1\,..\,q] = T[i\,..\,i{+}q{-}1]$

Conclusões

O consumo de tempo do algoritmo
NAIVE-STRING-MATCHER é $\mathrm{O}((n - m + 1)m)$.

No pior caso, o consumo de tempo do algoritmo
NAIVE-STRING-MATCHER é $\Theta((n - m + 1)m)$.

AULA 19

Algoritmo do autômato finito

CLRS 32.3

Idéia

$P =$ a b a b b a b a b b a

T

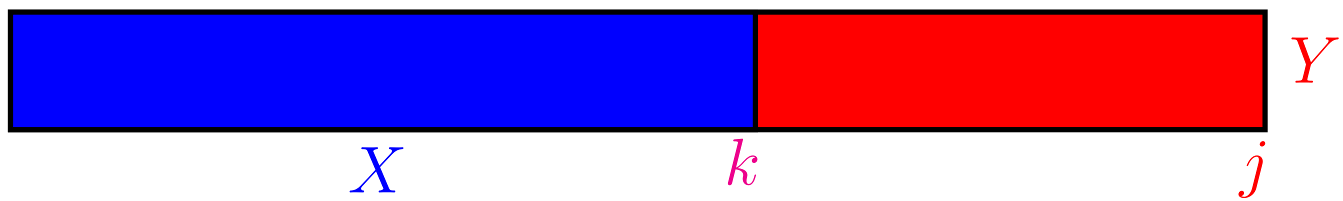
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
1	a	b	a	b																			
2		a																					
3			a	b																			
4				a	b	a	b	b															
5					a																		
6						a	b	a	b	b	a	b	a	b	b								
7							a																
8								a	b	a													
9									a														
10										a													
11											a	b	a	b									
12												a											
13													a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a

Prefixos e sufixos

$X[1\,..\,k]$ é prefixo de $Y[1\,..\,j]$ se

$$k \le j \quad \text{e} \quad X[1\,..\,k] = Y[1\,..\,k].$$

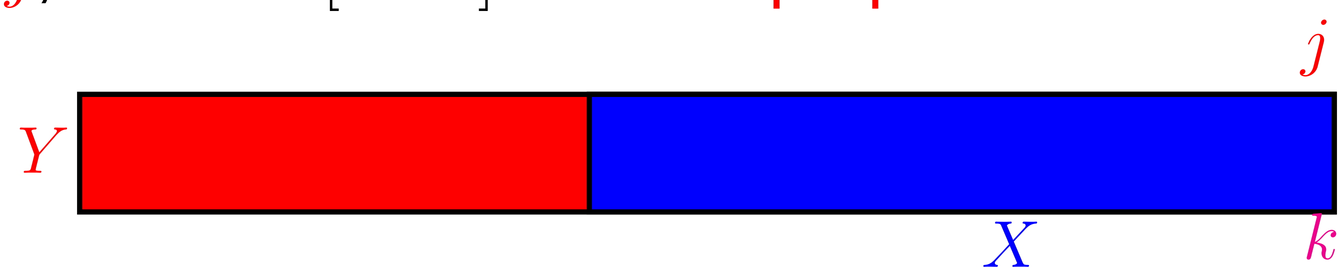
Se $k < j$, então $X[1\,..\,k]$ é prefixo próprio.



$X[1\,..\,k]$ é sufixo de $Y[1\,..\,j]$ se

$$k \le j \quad \text{e} \quad X[1\,..\,k] = Y[j{-}k{+}1\,..\,j].$$

Se $k < j$, então $X[1\,..\,k]$ é sufixo próprio.



Exemplos

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
P	a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a

$P[1\,..\,1]$ é prefixo próprio de $P[1\,..\,11]$

$P[1\,..\,3]$ é prefixo próprio de $P[1\,..\,7]$

$P[1\,..\,3]$ é sufixo próprio de $P[1\,..\,8]$

$P[1\,..\,5]$ é sufixo próprio de $P[1\,..\,10]$

$P[1\,..\,1]$ é sufixo próprio de $P[1\,..\,11]$

Algoritmo do autômato finito

Versão grosseira:

FINITE-AUTOMATON-MATCHER (P, m, T, n)

1 $q \leftarrow 0$
2 **para** $i \leftarrow 1$ **até** n **faça**
3 $\quad q \leftarrow$ maior k tal que $P[1 \,.\,.\, k]$ é sufixo de $T[1 \,.\,.\, i]$
4 $\quad$ **se** $q = m$
5 $\quad\quad$ **então** "P ocorre com deslocamento $i - m$"

Relação invariante: no final da linha 2 vale que:

(i0) q é o maior índice tal que $P[1 \,.\,.\, q]$ é sufixo de $T[1 \,.\,.\, i{-}1]$

O segredo está em saber executar a linha 3 eficientemente.

Simulação

$P =$ a b a b c a b a b b a

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
							?										?					T

8 a b a b c

18 a b a b c a b a b b

Subestrutura ótima

Suponha que:

- q é o maior índice tal que $P[1\,..\,q]$ é sufixo de $T[1\,..\,i-1]$; e
- q' é o maior índice tal que $P[1\,..\,q']$ é sufixo de $T[1\,..\,i] = T[1\,..\,i-1]a$.

Subestrutura ótima

Suponha que:

- q é o maior índice tal que $P[1\,..\,q]$ é sufixo de $T[1\,..\,i-1]$; e
- q' é o maior índice tal que $P[1\,..\,q']$ é sufixo de $T[1\,..\,i] = T[1\,..\,i-1]a$.

Portanto,

- $P[q'] = a$ e
- $P[1\,..\,q'-1]$ é prefixo de $P[1\,..\,q]$.

Logo, $P[1\,..\,q']$ é sufixo de $P[1\,..\,q]a$.

Subestrutura ótima

Suponha que:

- q é o maior índice tal que $P[1\,..\,q]$ é sufixo de $T[1\,..\,i-1]$; e
- q' é o maior índice tal que $P[1\,..\,q']$ é sufixo de $T[1\,..\,i] = T[1\,..\,i-1]a$.

Portanto,

- $P[q'] = a$ e
- $P[1\,..\,q'-1]$ é prefixo de $P[1\,..\,q]$.

Logo, $P[1\,..\,q']$ é sufixo de $P[1\,..\,q]a$.

Conclusão: q' é o maior k tal que $P[1\,..\,k]$ é sufixo de $P[1\,..\,q]a$

Subestrutura ótima

Suponha que:

- q é o maior índice tal que $P[1\,..\,q]$ é sufixo de $T[1\,..\,i-1]$; e
- q' é o maior índice tal que $P[1\,..\,q']$ é sufixo de $T[1\,..\,i] = T[1\,..\,i-1]a$.

Portanto,

- $P[q'] = a$ e
- $P[1\,..\,q'-1]$ é prefixo de $P[1\,..\,q]$.

Logo, $P[1\,..\,q']$ é sufixo de $P[1\,..\,q]a$.

Conclusão: q' é o maior k tal que $P[1\,..\,k]$ é sufixo de $P[1\,..\,q]a$

Outra conclusão: o valor de k depende apenas de $P[1\,..\,q]$ e do símbolo a.

Algoritmo do autômato finito

Versão melhorzinha:

FINITE-AUTOMATON-MATCHER (P, m, T, n)

1 $\quad q \leftarrow 0$
2 $\quad$ **para** $i \leftarrow 1$ **até** n **faça**
3 $\qquad q' \leftarrow$ maior k tq $P[1\,.\,.\,k]$ é sufixo de $P[1\,.\,.\,q]T[i]$
3 $\qquad q \leftarrow q'$
4 $\qquad$ **se** $q = m$
5 $\qquad\quad$ **então** "P ocorre com deslocamento $i - m$"

Relação invariante: no final da linha 2 vale que:

(i0) q é o maior índice tal que $P[1\,.\,.\,q]$ é sufixo de $T[1\,.\,.\,i{-}1]$

Pré-processamento

O segredo está em saber executar a linha 3 eficiente.

O valor de q' na linha 3 depende apenas de $P[1\,..\,q]$ e do alfabeto!

Alfabeto $\Sigma =$ conjunto dos possíveis símbolos de P e T.

Um pré-processamento de $P[1\,..\,m]$ produz uma tabela δ (conhecida com autômato) definida da seguinte maneira: para cada q em $0\,..\,m$ e a em Σ

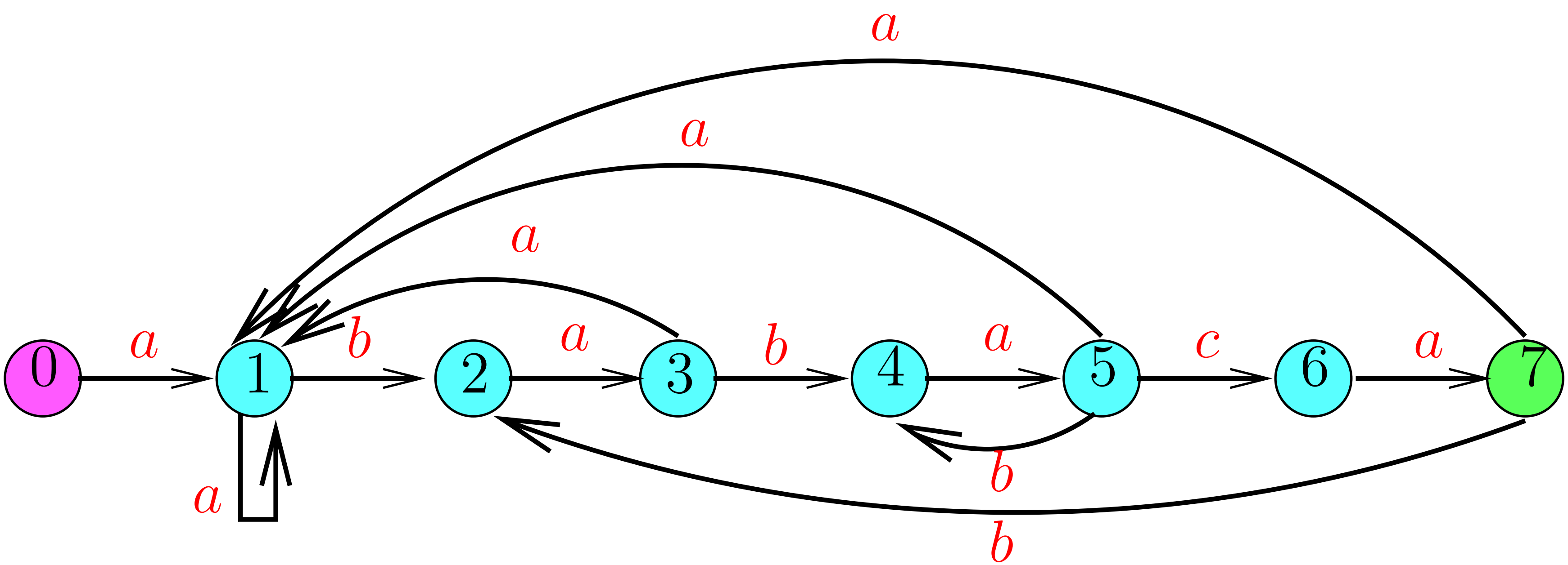
$$\delta[q,a] = \max\{k : P[1\,..\,k] \text{ é sufixo de } P[1\,..\,q]a\}.$$

Autômato

$P =$ a b a b a c a $\qquad \Sigma = \{$a, b, c$\}$

q	a	b	c	P
0	**1**	0	0	a
1	1	**2**	0	b
2	**3**	0	0	a
3	1	**4**	0	b
4	**5**	0	0	a
5	1	4	**6**	c
6	**7**	0	0	a
7	1	2	0	

Diagrama



$0\,..\,7 =$ conjunto de estados

$\Sigma = \{$a, b, c$\} =$ alfabeto

δ = função de transição

0 é estado incial e 7 é estado final

Algoritmo do autômato finito

FINITE-AUTOMATON-MATCHER (P, m, T, n)

```
0  δ ← COMPUTE-TRANSITION-FUNCTION(P, m, Σ)
1  q ← 0
2  para i ← 1 até n faça
3        q ← δ[q, T[i]]
4        se q = m
5              então "P ocorre com deslocamento i − m"
```

Relação invariante: no final da linha 2 vale que:

(i0) q é o maior índice tal que $P[1\,..\,q]$ é sufixo de $T[1\,..\,i{-}1]$

Consumo de tempo das linhas 1-5 é $\Theta(n)$.

Simulação

$P =$ a b a b a c a

i		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
T		a	b	a	b	a	b	a	c	a	b	a
q	0	1	2	3	4	5	4	5	6	7	2	3

Pré-processamento

COMPUTE-TRANSITION-FUNCTION(P, m, Σ)

para $q \leftarrow 0$ **até** m **faça**
  para cada a em Σ **faça**
    $k \leftarrow \min\{m+1, q+2\}$
    repita
      $k \leftarrow k-1$
    até que $P[1\,..\,k]$ seja sufixo de $P[1\,..\,q]a$
    $\delta[q, a] \leftarrow k$
devolva δ

Consumo de tempo

linha	consumo de todas as execuções da linha
1	$\Theta(m)$
2	$\Theta(m\|\Sigma\|)$
3	$\Theta(m\|\Sigma\|)$
4-5	$O(m^2\|\Sigma\|)$
6	$O(m^3\|\Sigma\|)$
7	$\Theta(m\|\Sigma\|)$
8	$\Theta(m\|\Sigma\|)$

total $\Theta(m + 4m|\Sigma|) + O(m^2|\Sigma| + m^3|\Sigma|)$

$$= O(m^3|\Sigma|)$$

Conclusões

O consumo de tempo do algoritmo
COMPUTE-TRANSITION-FUNCTION é $\mathrm{O}(m^3|\Sigma|)$.

O consumo de tempo do algoritmo
FINITE-AUTOMATON-MATCHER é $\mathrm{O}(n + m^3|\Sigma|)$.