

Melhores momentos

AULAS PASSADAS

Verificador polinomial para SIM

Um **verificador polinomial** para a resposta **SIM** a um problema Π é um algoritmo polinomial **ALG** que **recebe**

uma instância I de Π e um objeto C , tal que $\langle C \rangle$ é $O(\langle I \rangle^c)$ para alguma constante c e

$$\text{ALG}(I, C) = \text{SIM} \Leftrightarrow \Pi(I) = \text{SIM}$$

A constante c depende apenas do problema!

Verificador polinomial para NÃO

Um **verificador polinomial** para a resposta **NÃO** a um problema Π é um algoritmo polinomial **ALG** que **recebe**

uma instância I de Π e um objeto C , tal que $\langle C \rangle$ é $O(\langle I \rangle^c)$ para alguma constante c e

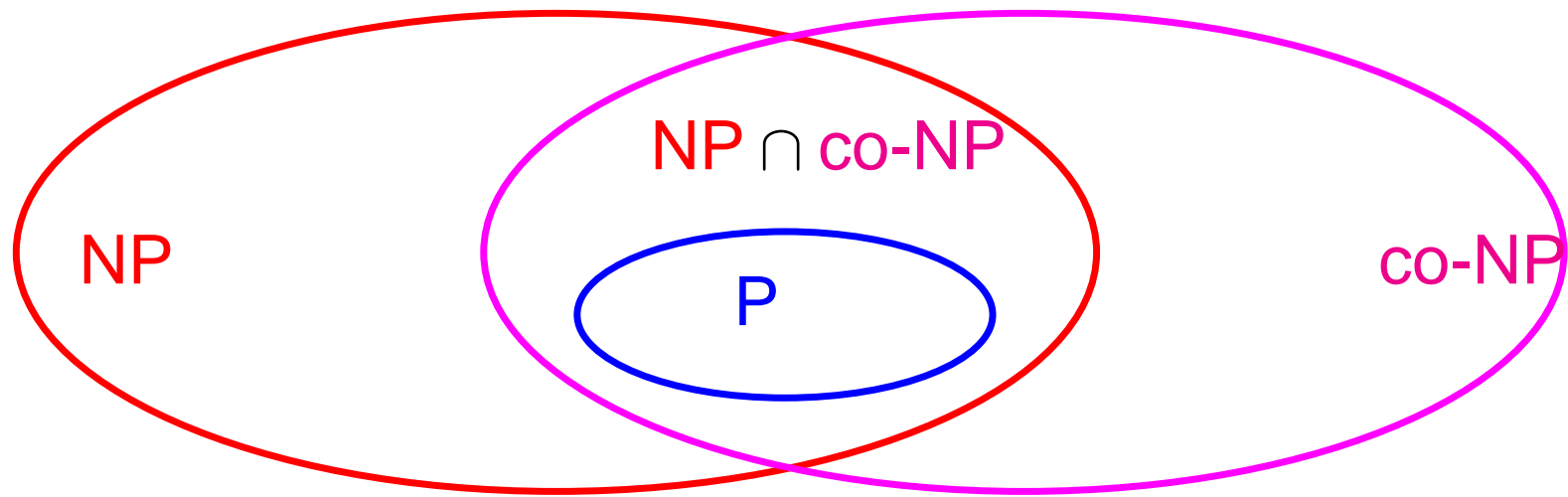
$$\text{ALG}(I, C) = \text{SIM} \Leftrightarrow \Pi(I) = \text{NÃO}$$

A constante c depende apenas do problema!

P, NP e co-NP

- Classe **P** formada por problemas de decisão que podem ser resolvidos em **tempo polinomial**
- Classe **NP** formada por problemas de decisão que possuem um **verificador polinomial** para a resposta **SIM**
- Classe **co-NP** formada por problemas de decisão que possuem um **verificador polinomial** para a resposta **NÃO**

P, NP e co-NP



$P \neq NP?$

$NP \cap co-NP \neq P?$

$NP \neq co-NP?$

Redução polinomial

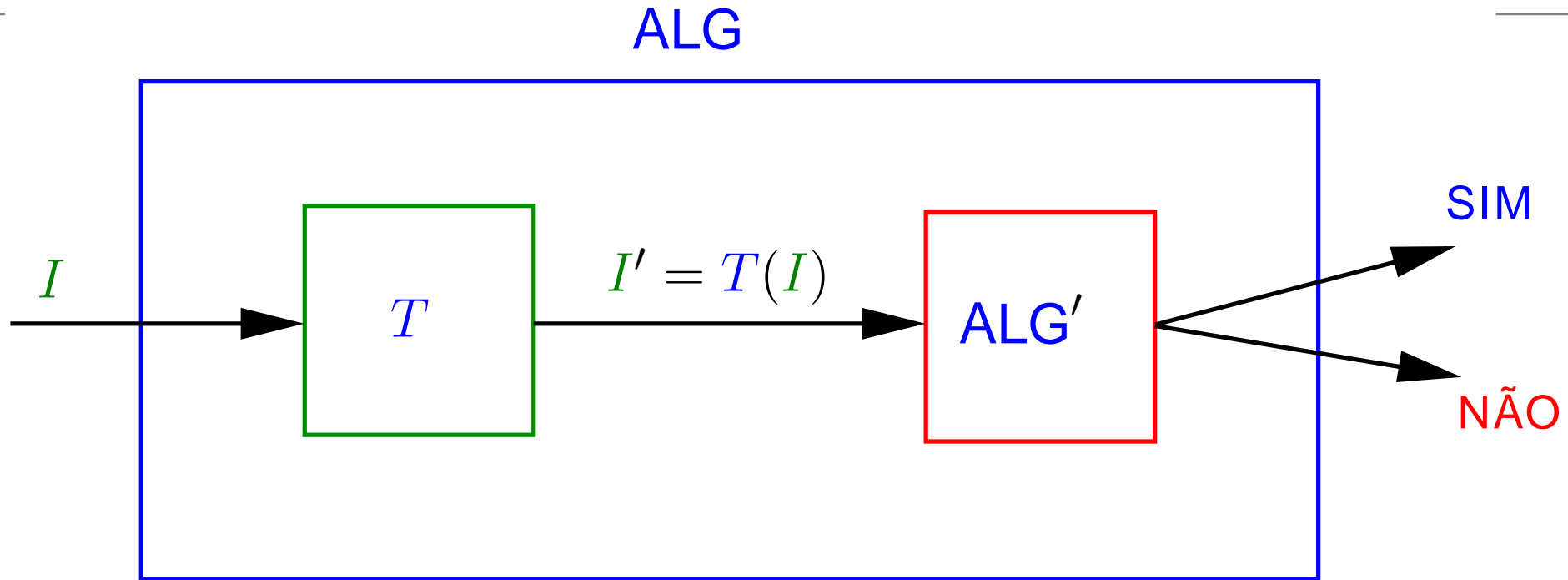
Permite comparar o “**grau de complexidade**” de problemas diferentes.

Redução (polinomial) de um problema Π a um problema Π' é um algoritmo **ALG** que resolve Π usando uma subrotina hipotética **ALG'** que resolve Π' , de tal forma que, se **ALG'** é um algoritmo polinomial, então **ALG** é um algoritmo polinomial.

$\Pi \leq_P \Pi' =$ existe uma redução de Π a Π' .

Se $\Pi \leq_P \Pi'$ e Π' está em **P**, então Π está em **P**.

Esquema comum de reduções



Faz apenas uma chamada ao algoritmo ALG' .

T transforma uma instância I de Π em uma instância $I' = T(I)$ de Π' tal que

$$\Pi(I) = \text{SIM} \text{ se e somente se } \Pi'(I') = \text{SIM}$$

T é uma espécie de “filtro” ou “compilador”.

Reduções

Satisfatibilidade \leq_P Sistemas lineares 0-1

Ciclo hamiltoniano \leq_P Caminho hamiltoniano entre u e v

Caminho hamiltoniano entre u e v \leq_P Caminho hamiltoniano

Caminho hamiltoniano \leq_P Satisfatibilidade

Hoje:

Satisfatibilidade \leq_P 3-Satisfatibilidade

3-Satisfatibilidade \leq_P Clique

AULA 26

Mais complexidade computacional ainda

CLR 36 ou CLRS 34

3-Satisfatibilidade

Problema: Dada um fórmula booleana ϕ nas variáveis x_1, \dots, x_n em que cada cláusula **tem exatamente 3 literais**, existe uma atribuição

$$t : \{x_1, \dots, x_n\} \rightarrow \{\text{VERDADE}, \text{FALSO}\}$$

que torna ϕ verdadeira?

Exemplo:

$$\phi = (x_1 \vee \neg x_1 \vee \neg x_2) \wedge (x_3 \vee x_2 \vee x_4) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4)$$

Um **literal** é uma variável x ou sua negação $\neg x$.

Exemplo 4

Satisfatibilidade \leq_P 3-Satisfatibilidade

Descreveremos um **algoritmo polinomial** T que recebe um fórmula booleana ϕ e devolve uma fórmula booleana ϕ' com **exatamente 3 literais** por cláusula tais que

ϕ é satisfatível $\Leftrightarrow \phi'$ é satisfatível.

A transformação consiste em substituir **cada cláusula** de ϕ por uma **coleção de cláusulas** com **exatamente 3 literais** cada e **equivalente** a ϕ .

Exemplo 4 (cont.)

Seja $(l_1 \vee l_2 \vee \dots \vee l_k)$ uma cláusula de ϕ .

Caso 1. $k = 1$

Troque (l_1) por

$$(l_1 \vee y_1 \vee y_2) (l_1 \vee \neg y_1 \vee y_2) (l_1 \vee y_1 \vee \neg y_2) (l_1 \vee \neg y_1 \vee \neg y_2)$$

onde y_1 e y_2 são **variáveis novas**.

Caso 2. $k = 2$

Troque $(l_1 \vee l_2)$ por $(l_1 \vee l_2 \vee y) (l_1 \vee l_2 \vee \neg y)$. onde y é uma **variável nova**.

Caso 3. $k = 3$

Mantenha $(l_1 \vee l_2 \vee l_3)$.

Exemplo 4 (cont.)

Caso 4. $k > 3$

Troque $(l_1 \vee l_2 \vee \dots \vee l_k)$ por

$$(l_1 \vee l_2 \vee y_1)$$

$$(\neg y_1 \vee l_3 \vee y_2) (\neg y_2 \vee l_4 \vee y_3) (\neg y_3 \vee l_5 \vee y_4) \dots$$

$$(\neg y_{k-3} \vee l_{k-1} \vee l_k)$$

onde y_1, y_2, \dots, y_{k-3} são **variáveis novas**

Verifique que ϕ é satisfátivel \Leftrightarrow nova fórmula é satisfátivel.

O tamanho da nova fórmula é $O(m)$, onde m é o número de literais que ocorrem em ϕ (contando-se as repetições).

Problemas completos em NP

Um problema Π em NP é NP-completo se cada problema em NP pode ser reduzido a Π .

Teorema de S. Cook e L.A. Levin: Satisfatibilidade é NP-completo.

Se $\Pi \leq_P \Pi'$ e Π é NP-completo, então Π' é NP-completo.

Existe um algoritmo polinomial para um problema NP-completo se e somente se $P = NP$.

Demonstração de NP-completude

Para demonstrar que um problema Π' é NP-completo podemos utilizar o Teorema de Cook e Levin.

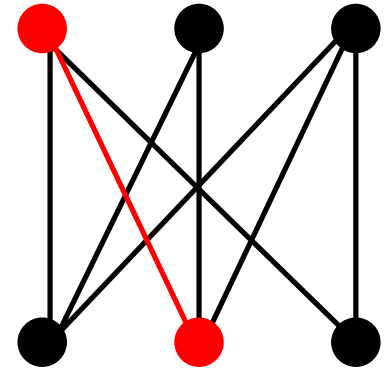
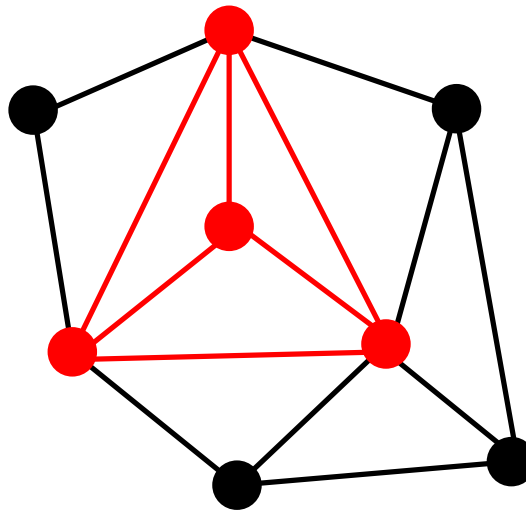
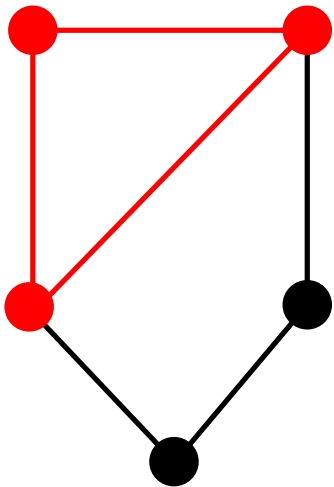
Para isto devemos:

- Demonstrar que Π' está em NP.
- Escolher um problema Π sabidamente NP-completo.
- Demonstrar que $\Pi \leq_P \Pi'$.

Clique

Problema: Dado um grafo G e um inteiro k , G possui um clique com $\geq k$ vértices?

Exemplos:



clique com k vértices = subgrafo completo com k vértices

Clique é NP-completo

Clique está em NP e 3-Satisfatibilidade \leq_P Clique.

Descreveremos um algoritmo polinomial T que recebe um fórmula booleana ϕ com k cláusulas e exatamente 3 literais por cláusula e devolve um grafo G tais que

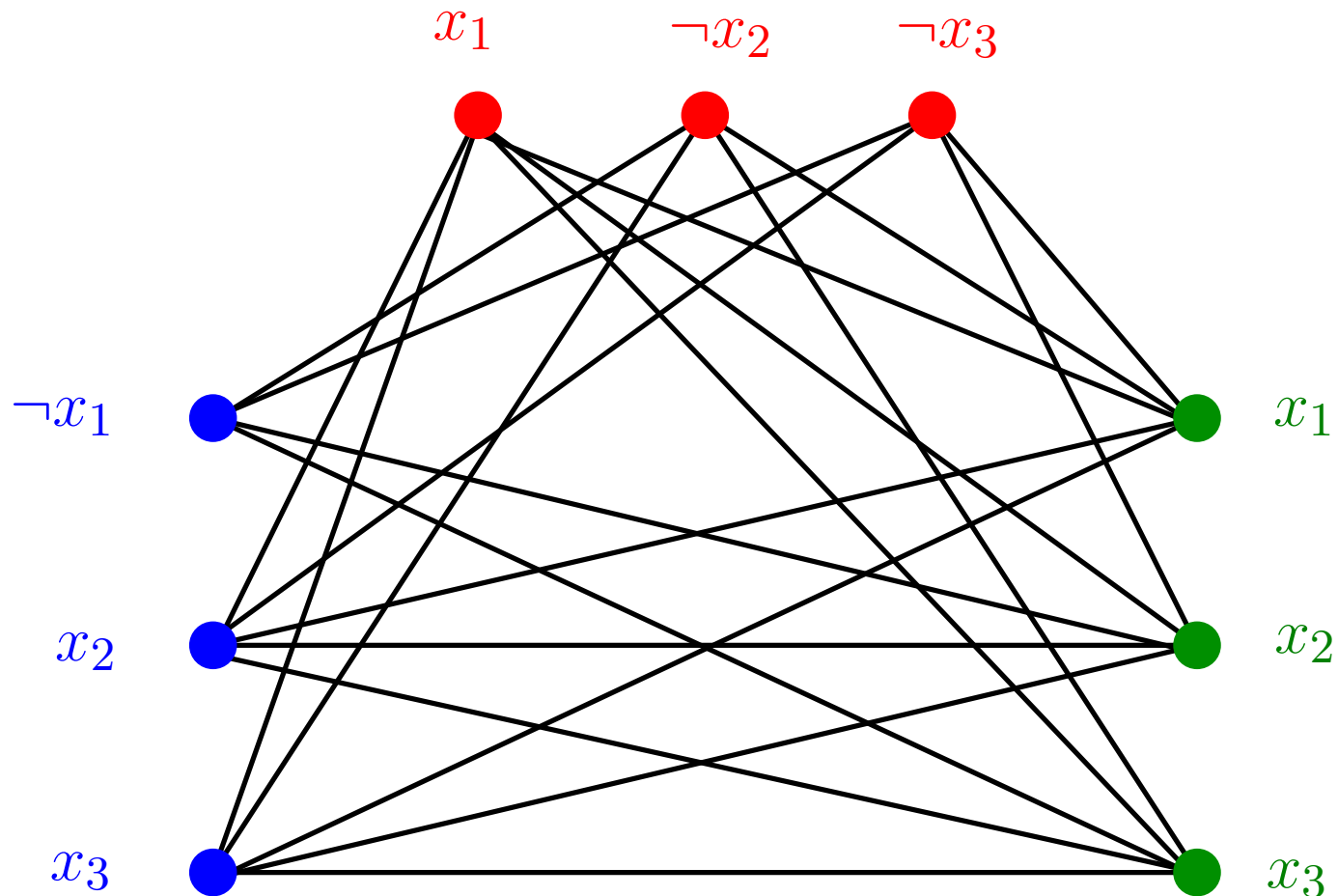
ϕ é satisfatível $\Leftrightarrow G$ possui um clique $\geq k$.

Para cada cláusula o grafo G terá três vértices, um correspondente a cada literal da cláusula. Logo, G terá $3k$ vértices. Teremos uma aresta ligando vértices u e v se

- u e v são vértices que correspondem a literais em diferentes cláusulas; e
- se u corresponde a um literal x então v não corresponde ao literal $\neg x$.

Clique é **NP**-completo (cont.)

$$\phi = (x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_3)$$



Problemas NP-difíceis

Um problema Π , não necessariamente em NP, é NP-difícil se a existência de um algoritmo polinomial para Π implica em $P = NP$.

Todo problema NP-completo é NP-difícil.

Exemplos:

- Encontrar um ciclo hamiltoniano é NP-difícil, mas não é NP-completo, pois não é um problema de decisão e portanto não está em NP.
- Satisfabilidade é NP-completo e NP-difícil.

Mais problemas NP-difíceis

Os seguintes problema são NP-difíceis:

- mochila booleana
- caminho máximo
- caminho hamiltoniano
- escalonamento de tarefas
- subset-sum
- clique máximo
- cobertura por vértices
- sistemas 0-1

e mais um montão deles ...

Exercícios

Exercício 25.A

Suponha que os algoritmos ALG e ALG' transformam cadeias de caracteres em outras cadeias de caracteres. O algoritmo ALG consome $O(n^2)$ unidades de tempo e o algoritmo ALG' consome $O(n^4)$ unidades de tempo, onde n é o número de caracteres da cadeia de entrada. Considere agora o algoritmo $ALGALG'$ que consiste na composição de ALG e ALG' , com ALG' recebendo como entrada a saída de ALG . Qual o consumo de tempo de $ALGALG'$?

Exercício 25.B [CLRS 34.1-4]

O algoritmo $MOCHILA-BOOLEANA$ é polinomial? Justifique a sua resposta.

Exercício 25.C [CLRS 34.1-5]

Seja ALG um algoritmo que faz um número constante de chamadas a um algoritmo ALG' . Suponha que se o consumo de tempo de ALG' é constante então o consumo de tempo de ALG é polinomial.

1. Mostre que se o consumo de tempo de ALG' é polinomial então o consumo de tempo de ALG é polinomial.
2. Mostre que se o consumo de tempo de ALG' é polinomial e ALG faz um número polinomial de chamadas a ALG' , então é possível que o consumo de tempo de ALG seja exponencial.

Mais exercícios

Exercício 25.D [CLRS 34.2-1]

Mostre que o problema de decidir se dois grafos dados são isomorfos está em **NP**.

Exercício 25.E [CLRS 34.2-2]

Mostre que um grafo bipartido com um número ímpar de vértices não é hamiltoniano (= possui um ciclo hamiltoniano).

Exercício 25.F [CLRS 34.2-3]

Mostre que se o problema do **Ciclo hamiltoniano** está em **P**, então o problema de listar os vértices de um ciclo hamiltoniano, na ordem em que eles ocorrem no ciclo, pode ser resolvido em tempo polinomial.

Exercício 25.G [CLRS 34.2-5]

Mostre que qualquer problema em **NP** pode ser resolvido por um algoritmo de consumo de tempo $2^{O(n^c)}$, onde n é o tamanho da entrada e c é uma constante.

Exercício 25.H [CLRS 34.2-6]

Mostre que o problema do **Caminho hamiltoniano** está em **NP**.

Exercício 25.I [CLRS 34.2-7]

Mostre que o problema do caminho hamiltoniano pode ser resolvido em tempo polinomial em grafos orientado acíclicos.

Mais exercícios

Exercício 25.J [CLRS 34.2-8]

Uma fórmula booleana ϕ é uma **tautologia** se $t(\phi) = \text{VERDADE}$ para toda atribuição de $t : \{\text{variáveis}\} \rightarrow \{\text{VERDADE}, \text{FALSO}\}$. Mostre que o problema de decidir se uma dada fórmula booleana é uma tautologia está em **co-NP**.

Exercício 25.K [CLRS 34.2-9]

Prove que $P \subseteq \text{co-NP}$.

Exercício 25.L [CLRS 34.2-10]

Prove que se $\text{NP} \neq \text{co-NP}$, então $P \neq \text{NP}$.

Exercício 25.M [CLRS 34.2-11]

Se G é um grafo conexo com pelo menos 3 vértices, então G^3 é o grafo que se obtém a partir de G ligando-se por uma aresta todos os pares de vértices que estão conectados em G por um caminho com no máximo três arestas. Mostre que G^3 é hamiltoniano.

Exercício 25.N [CLRS 34.3-2]

Mostre que se $\Pi_1 \leq_P \Pi_2$ e $\Pi_2 \leq_P \Pi_3$, então $\Pi_1 \leq_P \Pi_3$.

Mais exercícios

Exercício 25.O [CLRS 34.3-7]

Suponha que Π e Π' são problemas de decisão sobre o mesmo conjunto de instâncias e que $\Pi(I) = \text{SIM}$ se e somente se $\Pi'(I) = \text{NÃO}$. Mostre que Π é NP-completo se e somente se Π' é co-NP-completo.

(Um problema Π' é co-NP-completo se Π' está em co-NP e $\Pi \leq_P \Pi'$ para todo problema Π em co-NP.)

Exercício 25.P [CLRS 34.4-4]

Mostre que o problema de decidir se uma fórmula booleana é uma tautologia é co-NP-completo. (Dica: veja o exercício 25.O.)

Exercício 25.Q [CLRS 34.4-6]

Suponha que ALG' é um algoritmo polinomial para Satisfatibilidade. Descreva um algoritmo polinomial ALG que recebe um fórmula booleana ϕ e devolve uma atribuição $t : \{\text{variáveis}\} \rightarrow \{\text{VERDADE}, \text{FALSO}\}$ tal que $t(\phi) = \text{VERDADE}$.

Exercício 25.Q [CLRS 34.5-3]

Prove que o problema Sistemas lineares 0-1 é NP-completo.

Exercício 25.R [CLRS 34.5-6]

Mostre que o problema Caminho hamiltoniano é NP-completo.

Mais um exercício

Exercício 25.S [CLRS 34.5-7]

Mostre que o problema de encontrar um ciclo de comprimento máximo é **NP**-completo.

Algoritmos de aproximação

CLRS 35

Transparências de Cristina Gomes Fernandes
MAC5727 Algoritmos de Aproximação

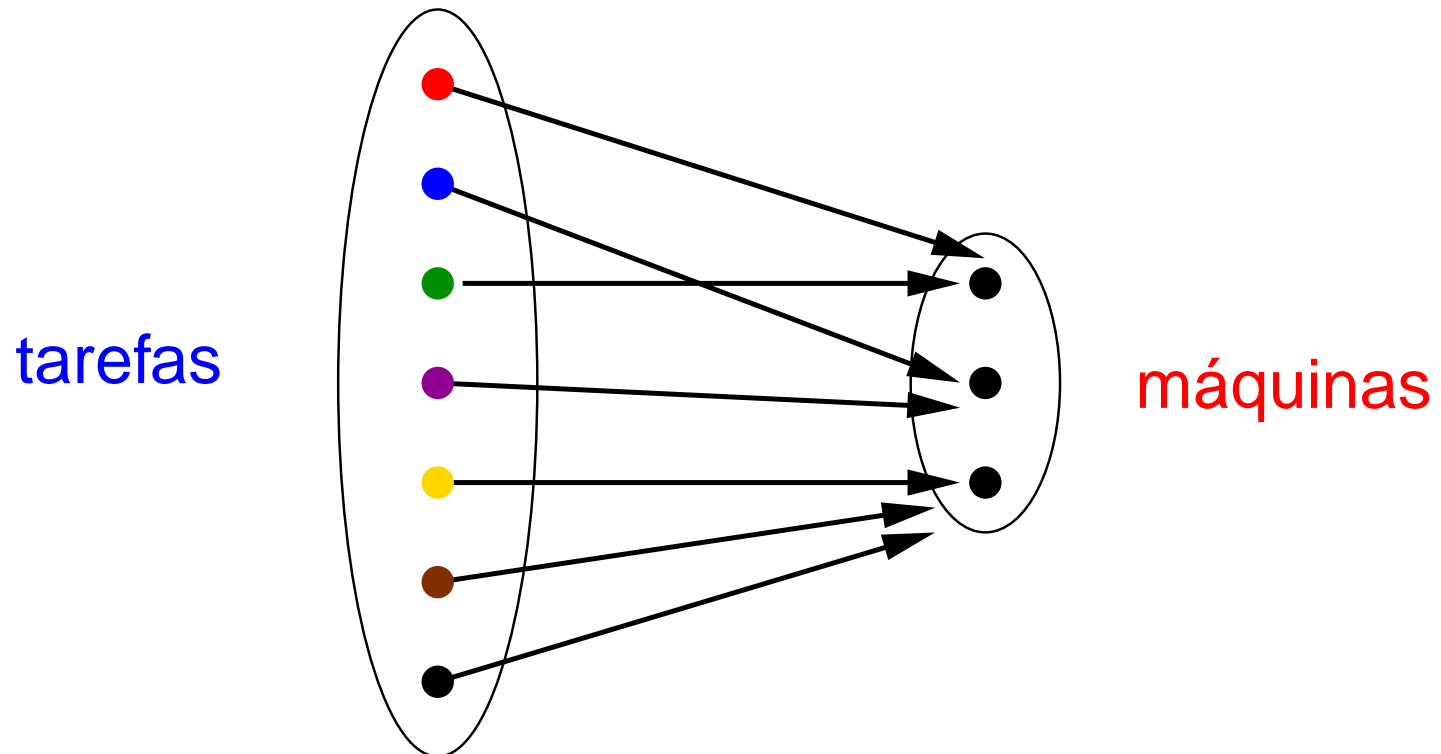
Escalonamento de máquinas idênticas

Dados: m máquinas

t tarefas








duração $d[i]$ da tarefa i ($i = 1, \dots, t$)










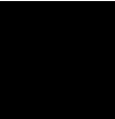
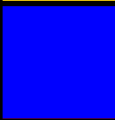

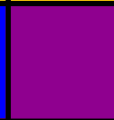
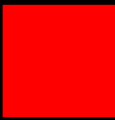
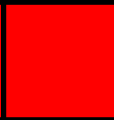
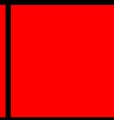
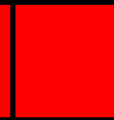
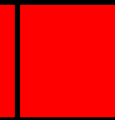
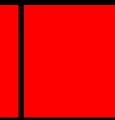
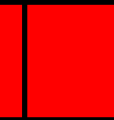
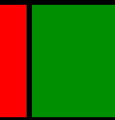

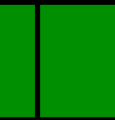



um **escalonamento** é uma **partição** $\{M[1], \dots, M[m]\}$
de $\{1, \dots, t\}$



Exemplo 1

$$m = 3 \quad t = 7$$








						
$d[1]$	$d[2]$	$d[3]$	$d[4]$	$d[5]$	$d[6]$	$d[7]$
3	2	7	5	1	6	2





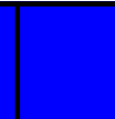
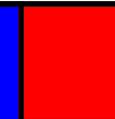



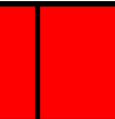

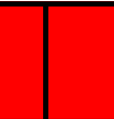






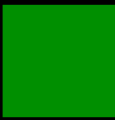



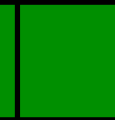


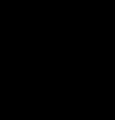
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$M[1]$														
$M[2]$														
$M[3]$														

$\{\{1, 4, 7\}, \{2, 5\}, \{3, 6\}\} \Rightarrow \text{Tempo de conclusão} = 13$

Exemplo 2

$$m = 3 \quad t = 7$$

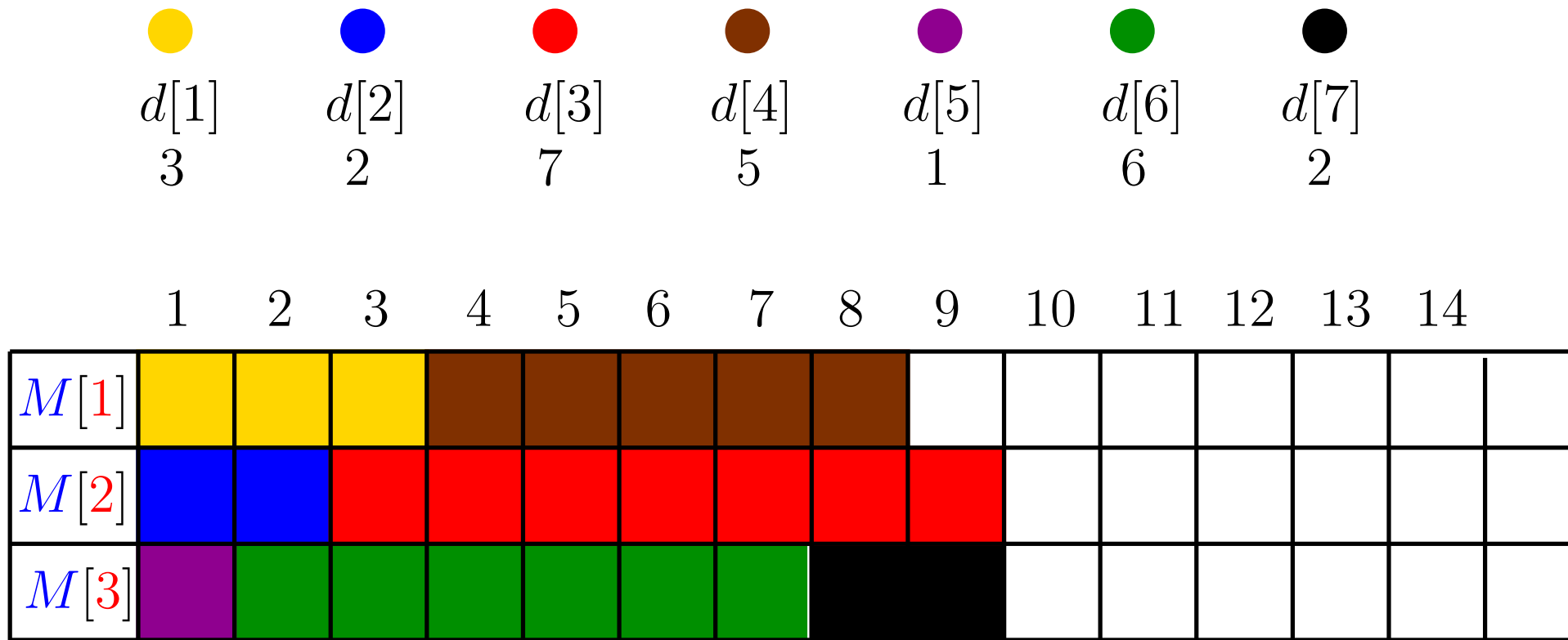
						
$d[1]$	$d[2]$	$d[3]$	$d[4]$	$d[5]$	$d[6]$	$d[7]$
3	2	7	5	1	6	2

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$M[1]$														
$M[2]$														
$M[3]$														

$\{\{1, 2, 3\}, \{4, 5\}, \{6, 7\}\} \Rightarrow \text{Tempo de conclusão} = 12$

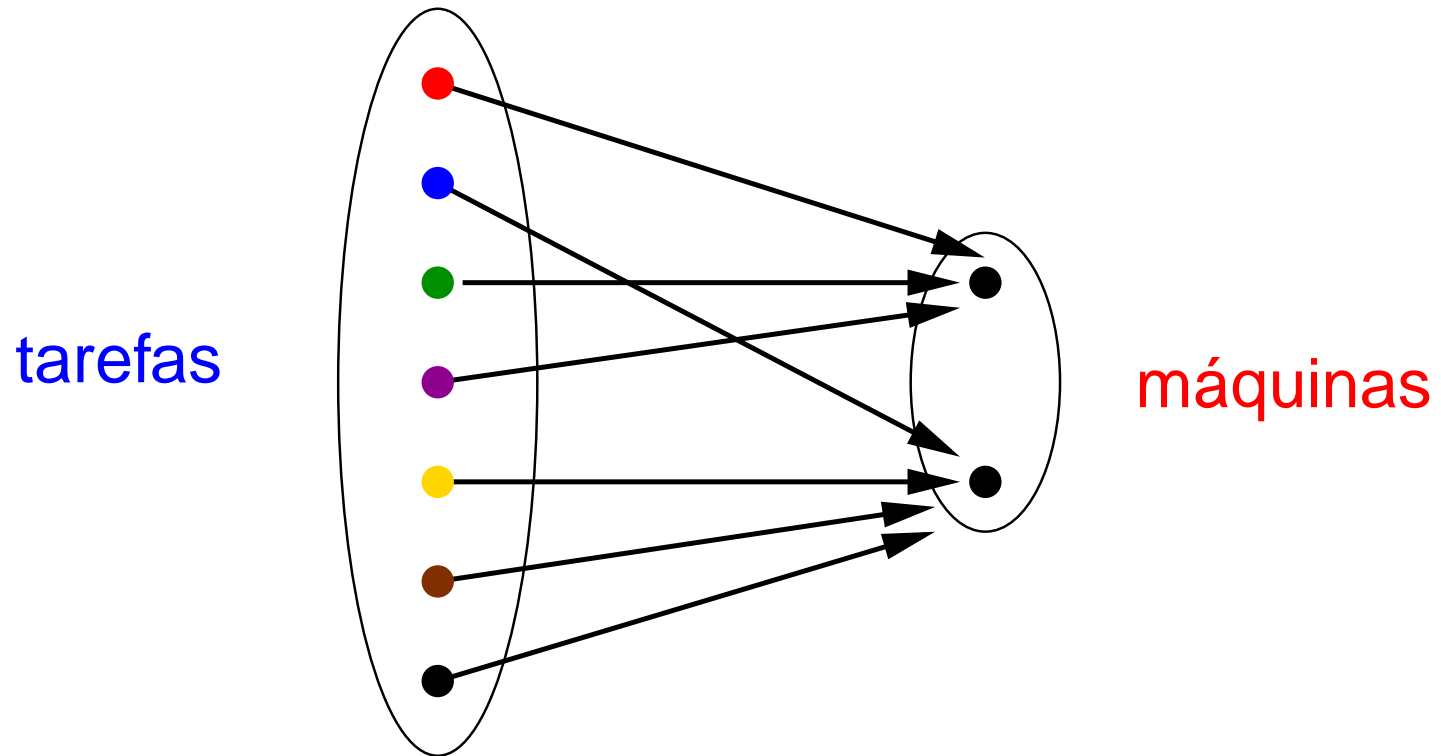
Problema

Encontrar um escalonamento com tempo de conclusão **mínimo**.



$\{\{1, 4\}, \{2, 3\}, \{5, 6, 7\}\} \Rightarrow$ Tempo de conclusão = 9

NP-difícil mesmo para $m = 2$



Algoritmo: testa todo $M[1] \subseteq \{1, \dots, t\}$ e escolhe melhor

2^t subconjuntos \Rightarrow **exponencial**

NP-difícil \Rightarrow é improvável que exista algoritmo **polinomial**
que resolva o problema (se existir, **P** = **NP**)

Algoritmo de Graham

Atribui, uma a uma, cada tarefa à máquina menos ocupada.



$d[1]$
3



$d[2]$
2



$d[3]$
7



$d[4]$
5



$d[5]$
1



$d[6]$
6



$d[7]$
2

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

11

12

13

14








$M[1]$

$M[2]$

$M[3]$

Algoritmo de Graham








Atribui, uma a uma, cada tarefa à máquina menos ocupada.

						
$d[1]$	$d[2]$	$d[3]$	$d[4]$	$d[5]$	$d[6]$	$d[7]$
3	2	7	5	1	6	2

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$M[1]$														
$M[2]$														
$M[3]$														

Algoritmo de Graham

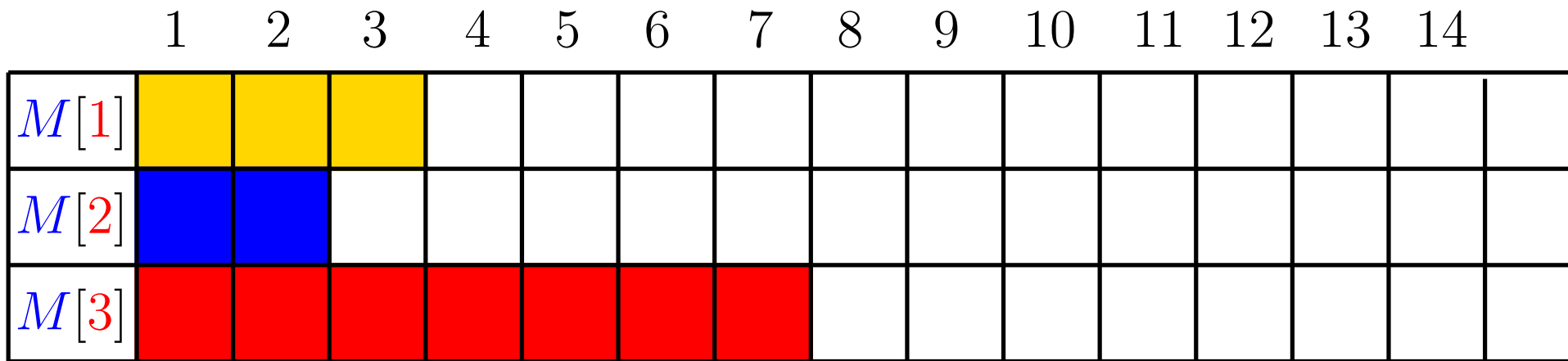
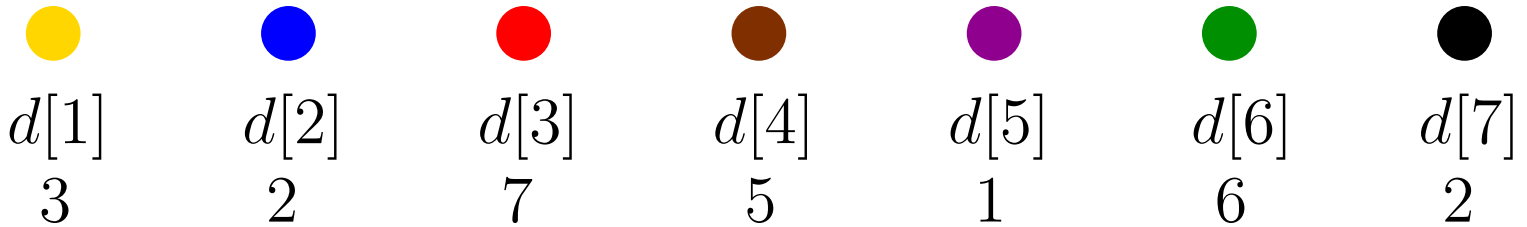
Atribui, uma a uma, cada tarefa à máquina menos ocupada.

						
$d[1]$	$d[2]$	$d[3]$	$d[4]$	$d[5]$	$d[6]$	$d[7]$
3	2	7	5	1	6	2

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$M[1]$														
$M[2]$														
$M[3]$														

Algoritmo de Graham

Atribui, uma a uma, cada tarefa à máquina menos ocupada.



Algoritmo de Graham

Atribui, uma a uma, cada tarefa à máquina menos ocupada.



$d[1]$
3



$d[2]$
2



$d[3]$
7



$d[4]$
5



$d[5]$
1



$d[6]$
6



$d[7]$
2

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$M[1]$														
$M[2]$														
$M[3]$														

Algoritmo de Graham

Atribui, uma a uma, cada tarefa à máquina menos ocupada.



$d[1]$
3



$d[2]$
2



$d[3]$
7



$d[4]$
5



$d[5]$
1



$d[6]$
6














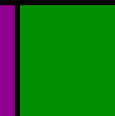

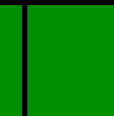


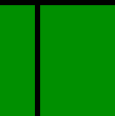

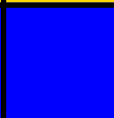





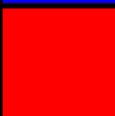
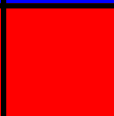





$d[7]$
2

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$M[1]$	Yellow	Yellow	Yellow	Purple										
$M[2]$	Blue	Blue	Brown	Brown	Brown	Brown	Brown							
$M[3]$	Red	Red	Red	Red	Red	Red	Red							

Algoritmo de Graham








Atribui, uma a uma, cada tarefa à máquina menos ocupada.







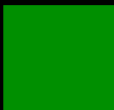










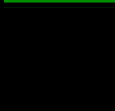
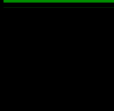
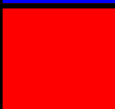
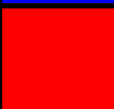





						
$d[1]$	$d[2]$	$d[3]$	$d[4]$	$d[5]$	$d[6]$	$d[7]$
3	2	7	5	1	6	2

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$M[1]$														
$M[2]$														
$M[3]$														

Algoritmo de Graham

Atribui, uma a uma, cada tarefa à máquina menos ocupada.

						
$d[1]$	$d[2]$	$d[3]$	$d[4]$	$d[5]$	$d[6]$	$d[7]$
3	2	7	5	1	6	2

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$M[1]$														
$M[2]$														
$M[3]$														

Escalonamento-Graham

Recebe números inteiros positivos m e t e um vetor $d[1..t]$ e **devolve** um escalonamento de $\{1, \dots, t\}$ em m máquinas.

ESCALONAMENTO-GRAHAM (m, t, d)

```
1  para  $j \leftarrow 1$  até  $m$  faça
2       $M[j] \leftarrow \emptyset$ 
3       $T[j] \leftarrow 0$ 
4  para  $i \leftarrow 1$  até  $t$  faça
5      seja  $k$  tal que  $T[k]$  é mínimo
6       $M[k] \leftarrow M[k] \cup \{i\}$ 
7       $T[k] \leftarrow T[k] + d[i]$ 
8  devolva  $\{M[1], \dots, M[m]\}$ 
```

Consumo de tempo

linha consumo de **todas** as execuções da linha

1 $\Theta(m)$

2 $\Theta(m)$

3 $\Theta(m)$

4 $\Theta(t)$

5 $\Theta(mt)$

6 $\Theta(t)$

7 $\Theta(t)$

8 $\Theta(t)$

total $3\Theta(m) + \Theta(mt) + 3\Theta(t) = \Theta(mt)$

Escalonamento-Graham

Se utilizarmos uma **fila com prioridades (min-heap)** para representar as m máquinas onde a prioridade da máquina i é $T[i]$ teremos:

ESCALONAMENTO-GRAHAM (m, t, d)

```
1  para  $j \leftarrow 1$  até  $m$  faça
2       $M[j] \leftarrow \emptyset$ 
3       $T[j] \leftarrow 0$ 
4  BUILD-MIN-HEAP ( $T, m$ )
5  para  $i \leftarrow 1$  até  $t$  faça
6       $k \leftarrow \text{HEAP-MIN} (T, m)$ 
7       $M[k] \leftarrow M[k] \cup \{i\}$ 
8      HEAP-INCREASE-KEY ( $T, k, T[k] + d[i]$ )
9  devolva  $\{M[1], \dots, M[m]\}$ 
```

Consumo de tempo

linha consumo de **todas** as execuções da linha

1-4 $\Theta(m)$

5 $\Theta(t)$

6 $\Theta(t)$

7 $\Theta(t)$

8 $O(t \lg m)$

9 $\Theta(t)$

total $\Theta(m) + 4\Theta(t) + O(t \lg m) = O(m + t \lg m)$

O consumo de tempo do algoritmo
ESCALONAMENTO-GRAHAM é $O(m + t \lg m)$.

Delimitações para OPT

OPT = menor tempo de conclusão de um escalonamento

- Duração da tarefa mais longa:

$$\text{OPT} \geq \max\{d[1], d[2], \dots, d[t]\}$$

- Distribuição balanceada:

$$\text{OPT} \geq \frac{d[1] + d[2] + \dots + d[t]}{m}$$

Fator de aproximação

tarefa t é executada na máquina j a partir do instante T

T_G = conclusão do escalonamento obtido pelo algoritmo

	1	2	3	4	...		T								T_G
$M[1]$															
\vdots															
$M[j]$															
\vdots															
$M[m]$															

Fator de aproximação (cont.)

tarefa t é executada na máquina j a partir do instante T

T_G = conclusão do escalonamento obtido pelo algoritmo

	1	2	3	4	...		T								T_G
$M[1]$															
\vdots															
$M[j]$															
\vdots															
$M[m]$															

$$T \cdot m \leq d[1] + \dots + d[t] \quad \Rightarrow \quad T \leq \frac{d[1] + \dots + d[t]}{m}$$

Fator de aproximação (cont.)

	1	2	3	4	...	T					T_G			
$M[1]$														
\vdots														
$M[j]$														
\vdots														
$M[m]$														

$$T_G = T + d[t]$$

$$\leq \frac{d[1] + \dots + d[t]}{m} + d[t]$$

$$\leq \frac{d[1] + \dots + d[t]}{m} + \max\{d[1], \dots, d[t]\}$$

$$\leq \text{OPT} + \text{OPT} = 2 \text{OPT}$$

Algoritmos de aproximação

Algoritmo **ALG** é **de aproximação** se existe $\alpha > 0$ tal que
valor de **ALG**(I) $\leq \alpha \cdot \text{OPT}(I)$
para toda instância I do problema.

α é o fator de aproximação

Objetivo: α tão perto de 1 quanto possível

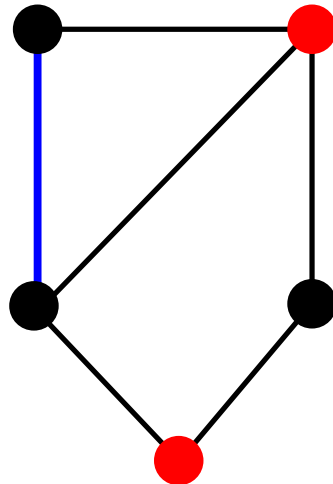
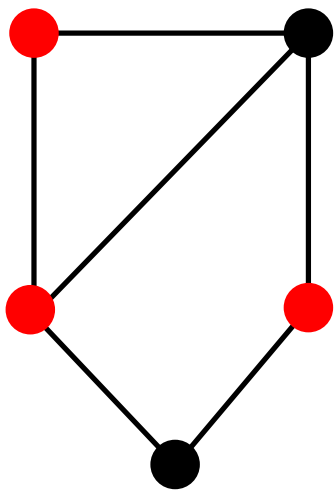
Conclusão

O algoritmo **ESCALONAMENTO-GRAHAM** é uma **2**-aproximação polinomial.

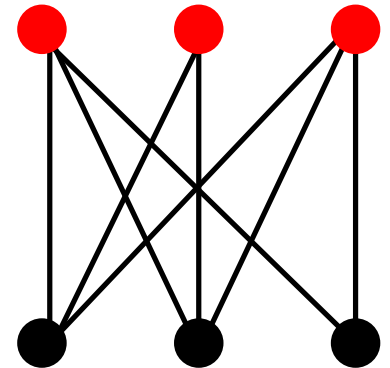
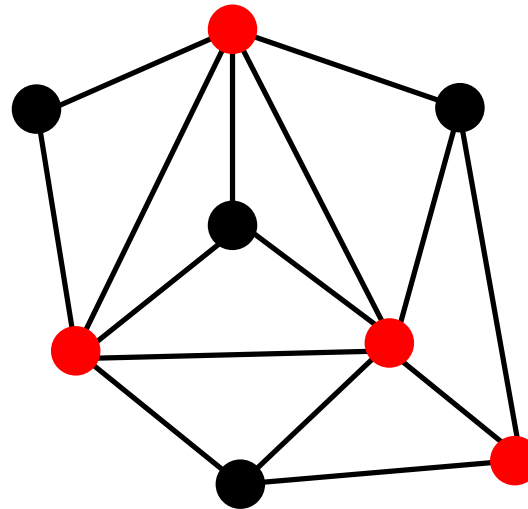
Cobertura por vértices

Um conjunto de vértices C é uma **cobertura** por vértices de G se cada aresta tem pelo menos uma ponta em C

Exemplos:



não é



Cobertura por vértices

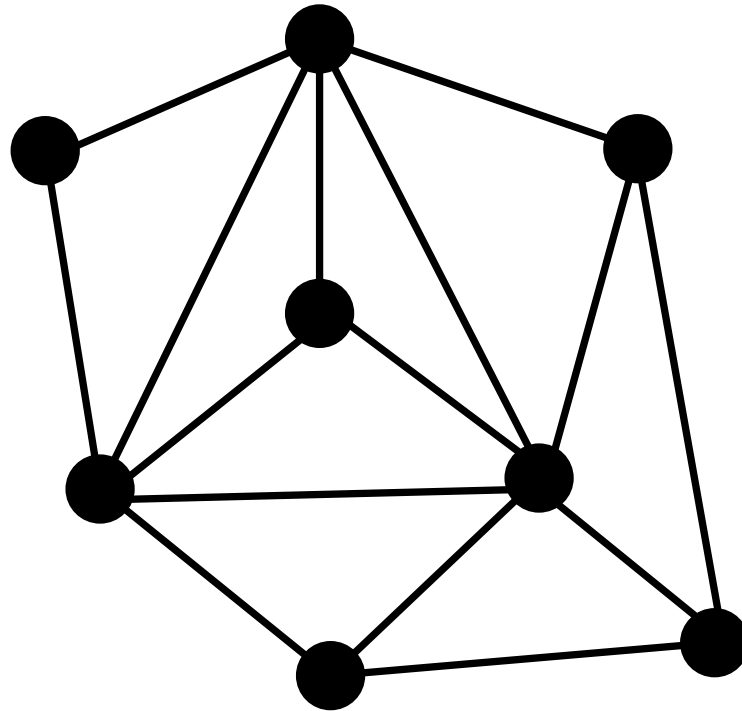
Problema: Dado um grafo G , encontrar uma cobertura mínima.

Problema é NP-difícil.

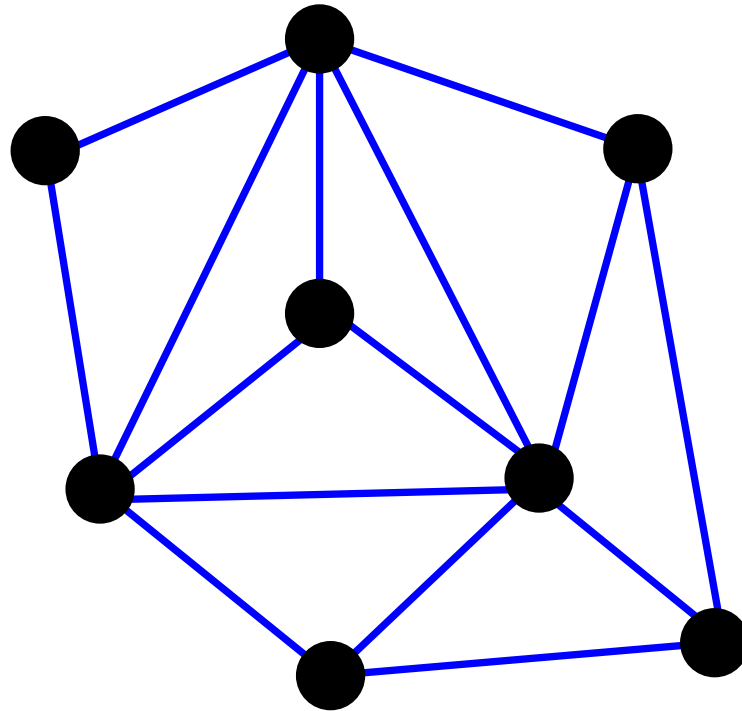
APPROX-VERTEX-COVER (G)

- 1 $C \leftarrow \emptyset$
- 2 $E \leftarrow \{\text{arestas de } G\}$
- 3 **enquanto** $E \neq \emptyset$ **faça**
- 4 seja (u, v) uma aresta qualquer em E
- 5 $C \leftarrow C \cup \{u, v\}$
- 6 $E \leftarrow E - \{\text{arestas incidentes a } u \text{ ou } v\}$
- 7 **devolva** C

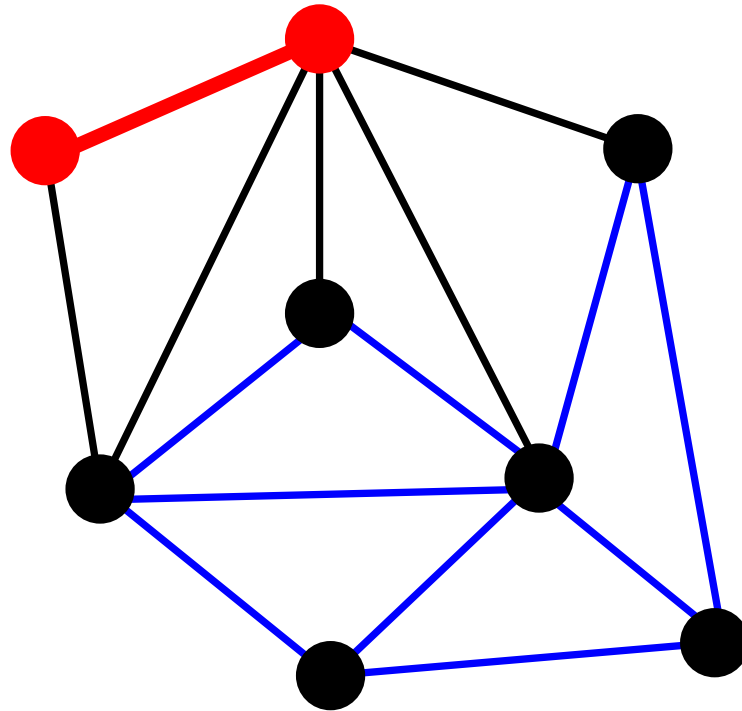
Exemplo



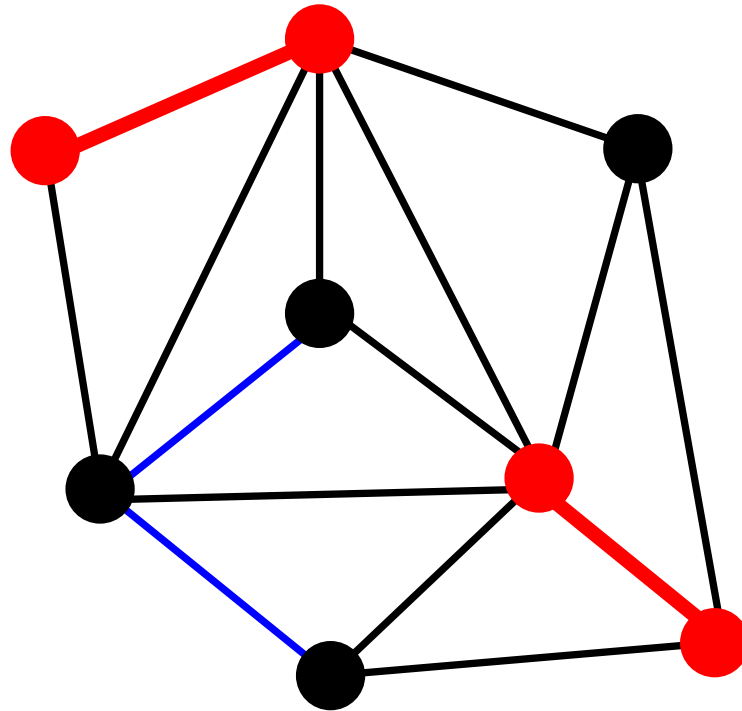
Exemplo



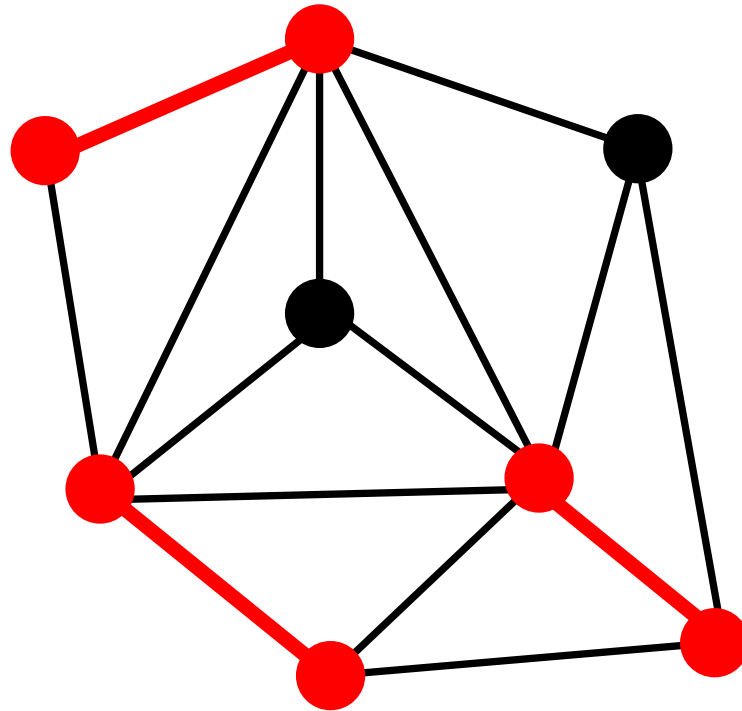
Exemplo



Exemplo



Exemplo



Consumo de tempo

E representado através de listas de adjacência.

n = número de vértices

m = número de arestas

linha	consumo de todas as execuções da linha
-------	---

1	$\Theta(1)$
---	-------------

2	$\Theta(n + m)$
---	-----------------

3	$O(m)$
---	--------

4	$O(m)$
---	--------

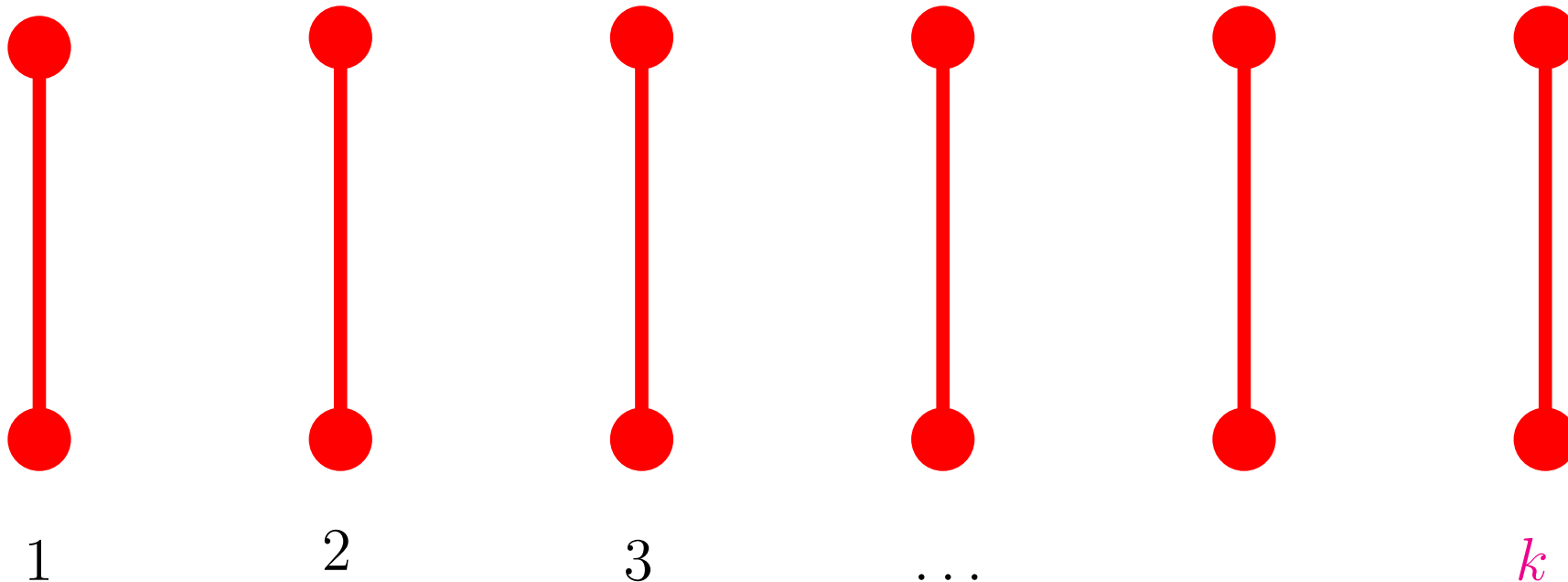
5	$O(n)$
---	--------

6	$O(m)$
---	--------

7	$O(n)$
---	--------

total	$\Theta(1) + \Theta(n + m) + 3O(m) + 2O(n) = \Theta(n + m)$
--------------	---

Delimitações para OPT

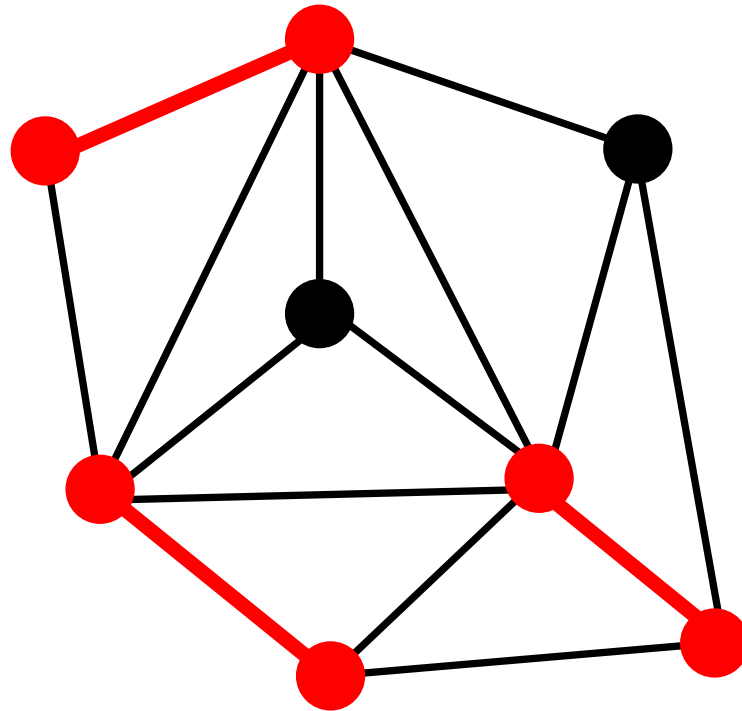


Se G possui um emparelhamento com k arestas, então

$$\text{OPT} \geq k.$$

OPT = número mínimo de vértices de uma cobertura por vértices

Fator de aproximação



C = cobertura devolvida pelo algoritmo.

G possui um emparelhamento com $|C|/2$ arestas.

Logo,

$$\frac{|C|}{2} \leq \text{OPT} \Rightarrow |C| \leq 2 \text{OPT}.$$

Conclusão

O algoritmo **APPROX-VERTEX-COVER** é uma **2**-aproximação polinomial.