MAC 310 MATEMÁTICA CONCRETA

PROVA 1

1. Instruções

A duração desta prova será de até 2 horas e 30 minutos. Para efeito de nota, serão consideradas somente as questões feitas que tenham a soma de seus valores de no máximo 10 pontos (de tal forma que a XCnota seja maximizada).

2. Questões

1. (1.5 pontos) Um professor desatento de MAC-310 passou o seguinte exercício para os seus prezados alunos:

   Prove que $\varphi(n)\varphi(m) = \varphi(nm)$ para todos inteiros positivos n e m.

   Apresente um contra-exemplo para esse exercício. Qual seria o enunciado correto? Prove-o.
2. (1.5 pontos) Calcule
$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{k-1}.$$
3. (1.5 pontos)
   (a) De quantas maneiras diferentes podemos distribuir k reais entre n pessoas de tal forma que cada pessoa receba pelo menos 1 real?
   (b) Suponha que nós não façamos questão de que cada pessoa receba pelo menos 1 real. Qual é o número de distribuiçõess distintas nesse caso?
4. (1.0 ponto) Uma função f definida sobre os inteiros positivos é dita *multiplicativa* se
$$f(nm) = f(n)f(m) \quad \text{sempre que} \quad \mathrm{mdc}(n, m) = 1.$$
   Prove que se f é multiplicativa então a função g definida por
$$g(n) = \sum_{d \backslash n} f(d)$$
   também é multiplicativa.
5. (1.0 ponto) Determine o número de inteiros positivos n, $1 \leq n \leq 2000$, que não são divisiveis por 2 nem por 3 e nem por 5?

Date: 24 de abril de 1997.

6. (1.0 ponto) Se jogarmos 8 dados qual é a probabilidade de que todos os 6 números ocorram?
7. (1.0 ponto) Use o Teorema de Fermat para calcular o resto da divisão de 3^{47} por 23.
8. (1.5 ponto) Seja $A := \{1, 2, \ldots, 7\}$. Uma função $f : A \to A$ tem um ponto fixo se $f(x) = x$ para algum $x \in A$. Quantas funções bijetoras $f : A \to A$ tem pelo menos 1 ponto fixo.
9. (1.5 ponto)
   (a) Encontre a função geradora para $\langle a_0, a_1, \ldots, a_k, \ldots \rangle$, onde a_k é o número de possiveis maneiras de jogarmos um dado n vezes e a soma dos valores obtidos serem k.
   (b) De quantas maneiras podemos obter 25 como a soma dos valores obtidos ao jogarmos um dado 10 vezes?
10. (1.0 ponto) Construa a função geradora de $\langle a_0, a_1, \ldots, a_k, \ldots \rangle$, onde a_k é o número de soluções inteiras da equação:
    (a) $e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = k$, $2 \leq e_i \leq 8$, e_1 par e e_2 ímpar;
    (b) $e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = k$, $e_i > 0$, $e_4 \leq 3$, e e_2, e_3 ímpar.
11. (1.0 ponto) Mostre que o número de partições de um inteiro positivo n é igual ao número de partições de $2n$ em n partes.
12. (1.5 pontos) Quantas seqüências com k dígitos podem ser formadas por 0, 1 e 2 (i.e. seqüências ternárias) com:
    (a) Um número par de 0s?
    (b) Um número par de 0s e um número par de 1s?

3. Formulário

$$\frac{1 - x^{m+1}}{1 - x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^m$$

$$\frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

$$\frac{1}{(1 - x)^n} = 1 + \binom{1 + n - 1}{1} x + \binom{2 + n - 1}{2} x^2 + \binom{3 + n - 1}{3} x^3 + \cdots$$

$$e^{nx} = 1 + nx + \frac{n^2 x^2}{2!} + \frac{n^3 x^3}{3!} + \cdots$$

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots$$