AULA 12

i-ésimo menor elemento

CLRS 9

i-ésimo menor

Problema: Encontrar o i-ésimo menor elemento de $A[1\,..\,n]$

Suponha $A[1\,..\,n]$ sem elementos repetidos.

Exemplo: 33 é o 4o. menor elemento de:

1									10	
22	99	32	88	34	**33**	11	97	55	66	A

1			4						10	
11	22	32	**33**	34	55	66	88	97	99	ordenado

Mediana

Mediana é o $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$-ésimo menor ou o $\lceil \frac{n+1}{2} \rceil$-ésimo menor elemento

Exemplo: a mediana é 34 ou 55:

1									10	
22	99	32	88	**34**	33	11	97	**55**	66	A

1				5	6				10	
11	22	32	33	**34**	**55**	66	88	97	99	ordenado

Menor

Recebe um vetor $A[1\,..\,n]$ e devolve o valor do menor elemento.

MENOR (A, n)
1 $\quad \mathrm{menor} \leftarrow A[1]$
2 $\quad$ **para** $k \leftarrow 2$ **até** n **faça**
3 $\qquad$ **se** $A[k] < \mathrm{menor}$
4 $\qquad\quad$ **então** $\mathrm{menor} \leftarrow A[k]$
5 $\quad$ **devolva** menor

O consumo de tempo do algoritmo MENOR é $\Theta(n)$.

Segundo menor

Recebe um vetor $A[1\,..\,n]$ e devolve o valor do segundo menor elemento, supondo $n \geq 2$.

SEG-MENOR (A, n)

```
menor ← min{A[1], A[2]}     segmenor ← max{A[1], A[2]}
para k ← 3 até n faça
      se A[k] < menor
            então segmenor ← menor
                  menor ← A[k]
      senão se A[k] < segmenor
            então segmenor ← A[k]
devolva segmenor
```

O consumo de tempo do algoritmo SEG-MENOR é $\Theta(n)$.

i-ésimo menor

Recebe $A[1\mathinner{..}n]$ e i tal que $1 \le i \le n$
e devolve valor do i-ésimo menor elemento de $A[1\mathinner{..}n]$

SELECT-ORD (A, n, i)
1 ORDENE (A, n)
2 **devolva** $A[i]$

O consumo de tempo do algoritmo SELECT-ORD é $\Theta(n \lg n)$.

Particione

Rearranja $A[p\,..\,r]$ de modo que $p \le q \le r$ e
$A[p\,..\,q{-}1] \le A[q] < A[q{+}1\,..\,r]$

```
PARTICIONE (A, p, r)
    x ← A[r]            ▷ x é o "pivô"
    i ← p−1
    para j ← p até r − 1 faça
          se A[j] ≤ x
                então i ← i + 1
                      A[i] ↔ A[j]
    A[i+1] ↔ A[r]
    devolva i + 1
```

	p									r
A	99	33	55	77	11	22	88	66	33	44

Particione

Rearranja $A[p \mathinner{..} r]$ de modo que $p \le q \le r$ e
$A[p \mathinner{..} q{-}1] \le A[q] < A[q{+}1 \mathinner{..} r]$

```
PARTICIONE (A, p, r)
    x ← A[r]          ▷ x é o "pivô"
    i ← p−1
    para j ← p até r − 1 faça
        se A[j] ≤ x
            então i ← i + 1
                  A[i] ↔ A[j]
    A[i+1] ↔ A[r]
    devolva i + 1
```

	p				q					r
A	11	22	33	33	44	55	88	66	77	99

Particione

Rearranja $A[p \mathinner{.\,.} r]$ de modo que $p \leq q \leq r$ e
$A[p \mathinner{.\,.} q-1] \leq A[q] < A[q+1 \mathinner{.\,.} r]$

```
PARTICIONE (A, p, r)
    x ← A[r]          ▷ x é o “pivô”
    i ← p−1
    para j ← p até r − 1 faça
        se A[j] ≤ x
            então i ← i + 1
                  A[i] ↔ A[j]
    A[i+1] ↔ A[r]
    devolva i + 1
```

O algoritmo PARTICIONE consome tempo $\Theta(n)$.

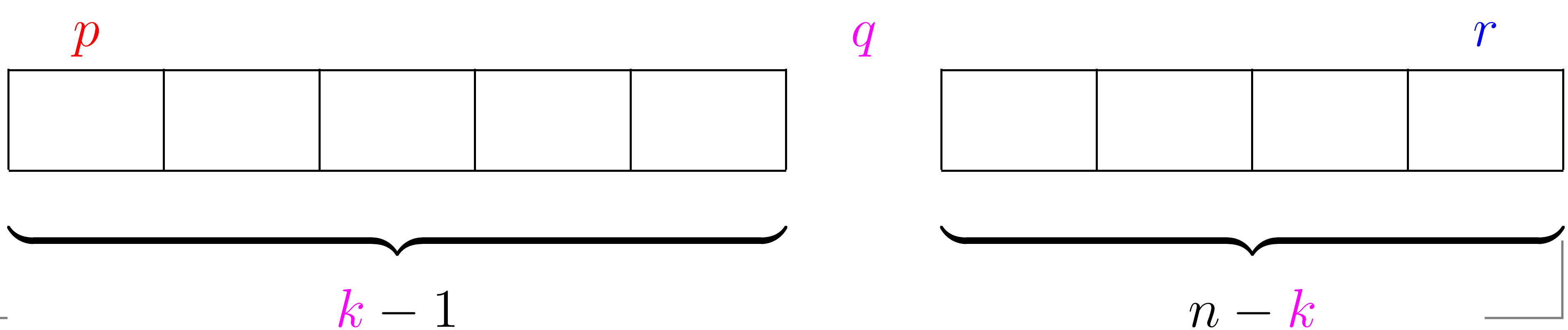
Algoritmo SELECT

Recebe $A[p\,..\,r]$ e i tal que $1 \le i \le r{-}p{+}1$
e devolve valor do i-ésimo menor elemento de $A[p\,..\,r]$

SELECT(A, p, r, i)
se $p = r$
    então devolva $A[p]$
$q \leftarrow$ PARTICIONE (p, r)
$k \leftarrow q - p + 1$
se $k = i$
    então devolva $A[q]$
se $k > i$
    então devolva SELECT $(A, p, q - 1, i)$
    senão devolva SELECT $(A, q + 1, r, i - k)$

Algoritmo SELECT

```
SELECT(A, p, r, i)
    se p = r
        então devolva A[p]
    q ← PARTICIONE (A, p, r)
    k ← q − p + 1
    se k = i
        então devolva A[q]
    se k > i
        então devolva SELECT (A, p, q − 1, i)
        senão devolva SELECT (A, q + 1, r, i − k)
```



Consumo de tempo

$T(n) =$ consumo de tempo máximo quando $n = r - p + 1$

linha	consumo de todas as execuções da linha
1-2	$= 2\,\Theta(1)$
3	$= \Theta(n)$
4-7	$= 4\,\Theta(1)$
8	$= T(k-1)$
9	$= T(n-k)$

$$T(n) = \Theta(n+6) + \max\{T(k-1), T(n-k)\}$$

$$= \Theta(n) + \max\{T(k-1), T(n-k)\}$$

Consumo de tempo

$T(n)$ pertence a mesma classe Θ que:

$$T'(1) = 1$$

$$T'(n) = T'(n-1) + n \quad \text{para } n = 2, 3, \ldots$$

Solução assintótica:

$$T'(n) \text{ é } \Theta(n^2).$$

Solução exata:

$$T'(n) = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}.$$

Algumas conclusões

No melhor caso o consumo de tempo do algoritmo SELECT é $\Theta(n)$.

No pior caso o consumo de tempo do algoritmo SELECT é $\Theta(n^2)$.

Consumo médio?

$\mathrm{E}[T(n)] =$???

Exemplos

Número médio de comparações sobre todas as permutações de $A[p\,.\,.\,r]$ (supondo que nas linhas 8 e 9 o algoritmo sempre escolhe o lado maior):

$A[p\,.\,.\,r]$	comps
1,2	1+0
2,1	1+0
média	2/2

$A[p\,.\,.\,r]$	comps
1,2,3	2+1
2,1,3	2+1
1,3,2	2+0
3,1,2	2+0
2,3,1	2+1
3,2,1	2+1
média	16/6

Mais exemplos

$A[p \mathinner{.\,.} r]$	comps	$A[p \mathinner{.\,.} r]$	comps
1,2,3,4	3+3	1,3,4,2	3+1
2,1,3,4	3+3	3,1,4,2	3+1
1,3,2,4	3+2	1,4,3,2	3+1
3,1,2,4	3+2	4,1,3,2	3+1
2,3,1,4	3+3	3,4,1,2	3+1
3,2,1,4	3+3	4,3,1,2	3+1
1,2,4,3	3+1	2,3,4,1	3+3
2,1,4,3	3+1	3,2,4,1	3+3
1,4,2,3	3+1	2,4,3,1	3+2
4,1,2,3	3+1	4,2,3,1	3+2
2,4,1,3	3+1	3,4,2,1	3+3
4,2,1,3	3+1	4,3,2,1	3+3
		média	116/24

Ainda exemplos

No caso $r - p + 1 = 5$, a média é $864/120$.

n	$\mathrm{E}[T(n)]$	
1	0	0
2	$2/2$	1
3	$16/6$	2.7
4	$116/24$	4.8
5	$864/120$	7.2

Número de comparações

O consumo de tempo assintótico é proporcional a

$C(n) =$ número de comparações entre elementos de A quando $n = r - p + 1$

linha	número de comparações na linha
1-2	$= 0$
3	$= n - 1$
4-7	$= 0$
8	$= C(k-1)$
9	$= C(n-k)$

total $\leq \max\{C(k-1), C(n-k)\} + n - 1$

Número de comparações

No pior caso $C(n)$ pertence a mesma classe Θ que:

$$C'(1) = 0$$

$$C'(n) = C'(n-1) + n - 1 \quad \text{para } n = 3, 4, \ldots$$

Solução assintótica:

$$C'(n) \text{ é } \Theta(n^2)$$

Solução exata:

$$C'(n) = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}.$$

Particione aleatorizado

Rearranja $A[p \,.\,.\, r]$ de modo que $p \le q \le r$ e $A[p \,.\,.\, q{-}1] \le A[q] < A[q{+}1 \,.\,.\, r]$

PARTICIONE-ALEA(A, p, r)
1 $\quad i \leftarrow$ RANDOM (p, r)
2 $\quad A[i] \leftrightarrow A[r]$
3 $\quad$ **devolva** PARTICIONE (A, p, r)

O algoritmo PARTICIONE-ALEA consome tempo $\Theta(n)$.

SELECT-ALEATORIZADO (= randomized select)

Recebe $A[p\,..\,r]$ e i tal que $1 \le i \le r{-}p{+}1$
e devolve valor do i-ésimo menor elemento de $A[p\,..\,r]$

SELECT-ALEA(A, p, r, i)
    se $p = r$
        então devolva $A[p]$
    $q \leftarrow$ PARTICIONE-ALEA (A, p, r)
    $k \leftarrow q - p + 1$
    se $k = i$
        então devolva $A[q]$
    se $k > i$
        então devolva SELECT-ALEA $(A, p, q - 1, i)$
        senão devolva SELECT-ALEA $(A, q + 1, r, i - k)$

Consumo de tempo

O consumo de tempo é proporcional a

$T(n) =$ número de comparações entre elementos de A
quando $n = r - p + 1$

linha	número de comparações na linha
1-2	$= 0$
3	$= n - 1$
4-7	$= 0$
8	$= T(k-1)$
9	$= T(n-k)$
total	$\leq \max\{T(k-1), T(n-k)\} + n - 1$

$T(n)$ é uma variável aleatória.

Consumo de tempo

$$T(1) = 0$$

$$T(n) \leq \sum_{h=1}^{n-1} X_h T(h) + n - 1 \quad \text{para } n = 2, 3, \ldots$$

onde

$$X_h = \begin{cases} 1 & \text{se } \max\{k-1, n-k\} = h \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$\Pr\{X_h = 1\} = \mathrm{E}[X_h]$

$$X_h = \begin{cases} 1 & \text{se } \max\{k-1, n-k\} = h \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Qual a probabilidade de X_h valer 1?

$\Pr\{X_h = 1\} = \mathrm{E}[X_h]$

$$X_h = \begin{cases} 1 & \text{se } \max\{k-1, n-k\} = h \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Qual a probabilidade de X_h valer 1?

Para $h = 1, \ldots, \lfloor n/2 \rfloor - 1$, $\Pr\{X_h = 1\} = 0 = \mathrm{E}[X_h]$.

Para $h = \lceil n/2 \rceil, \ldots, n$,

$$\text{Pr}\{X_h{=}1\} \;=\; \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \;=\; \frac{2}{n} \;=\; \mathrm{E}[X_h]$$

Se n é impar e $h = \lfloor n/2 \rfloor$, então

$$\Pr\{X_h = 1\} = \frac{1}{n} = \mathrm{E}[X_h]$$

Consumo de tempo esperado

$$\mathrm{E}[T(1)] = 0$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[T(n)] &\le \sum_{h=1}^{n-1} \mathrm{E}[X_h T(h)] + n - 1 \\
&= \sum_{h=1}^{n-1} \mathrm{E}[X_h]\,\mathrm{E}[T(h)] + n - 1 \quad (\text{CLRS 9.2-2}) \\
&\le \frac{2}{n} \sum_{h=a}^{n-1} \mathrm{E}[T(h)] + n - 1 \quad \text{para } n = 2, 3, \ldots
\end{aligned}$$

onde $a = \lfloor n/2 \rfloor$.

Solução: $\mathrm{E}[T(n)] = \mathrm{O}(n)$.

Consumo de tempo esperado

$\mathrm{E}[T(n)]$ pertence a mesma classe O que:

$$S(1) = 0$$

$$S(n) \leq \frac{2}{n} \sum_{h=a}^{n-1} S(h) + n - 1 \quad \text{para } n = 2, 3, \ldots$$

onde $a = \lfloor n/2 \rfloor$.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$S(n)$	0.0	1.0	2.7	4.8	7.4	10.0	13.1	15.8	19.4	22.1
$4n$	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40

Vamos verificar que $S(n) < 4\,n$ para $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$

Recorrência

Prova: Se $n = 1$, então $S(n) = 0 < 4 = 4 \cdot 1 = 4n$. Se $n \geq 2$,

$$
\begin{aligned}
S(n) &\leq \frac{2}{n}\sum_{h=a}^{n-1} S(h) + n - 1 \\
&\overset{\text{hi}}{<} \frac{2}{n}\sum_{h=a}^{n-1} 4\,h + n - 1 \\
&= \frac{8}{n}\Big(\sum_{h=1}^{n-1} h - \sum_{h=1}^{a-1} h\Big) + n - 1 \\
&\leq \frac{4}{n}\Big(n^2 - n - \frac{(n-1)(n-3)}{4}\Big) + n - 1 \\
&= \frac{4}{n}\Big(\frac{3n^2}{4} - \frac{3}{4}\Big) + n - 1 \\
&= 3n - \frac{3}{n} + n - 1 = 4n - \frac{3}{n} - 1 < 4n.
\end{aligned}
$$

Conclusão

O consumo de tempo esperado do algoritmo SELECT-ALEA é $\mathrm{O}(n)$.

Exercícios

Exercício 18.A [CLRS 9.1-1] [muito bom!]
Mostre que o segundo menor elemento de um vetor $A[1\,..\,n]$ pode ser encontrado com não mais que $n + \lceil \lg n \rceil - 2$ comparações.

Exercício 18.B
Prove que o algoritmo Select Aleatorizado (= Randomized Select) funciona corretamente.

Exercício 18.C [CLRS 9.2-3]
Escreva uma versão iterativa do algoritmo Select Aleatorizado (= Randomized Select).

Seleção em tempo linear

CLRS 9.3

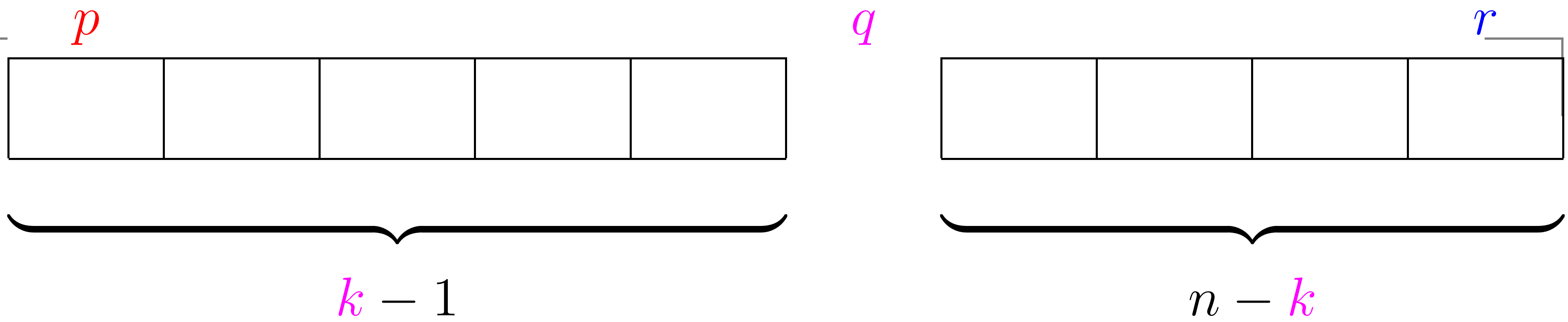
BFPRT = Blum, Floyd, Pratt, Rivest e Tarjan

Select-BFPRT

Recebe $A[p\,..\,r]$ e i tal que $1 \le i \le r{-}p{+}1$ e devolve um índice q tal que $A[q]$ é o i-ésimo menor elemento de $A[p\,..\,r]$

SELECT-BFPRT(A, p, r, i)
se $p = r$
  então devolva p $\triangleright$ p e não $A[p]$
$q \leftarrow$ PARTICIONE-BFPRT (A, p, r)
$k \leftarrow q - p + 1$
se $k = i$
  então devolva q $\triangleright$ q e não $A[q]$
se $k > i$
  então devolva SELECT-BFPRT $(A, p, q-1, i)$
  senão devolva SELECT-BFPRT $(A, q+1, r, i-k)$

Particione-BFPRT



Rearranja $A[p\,..\,r]$ e devolve um índice q, $p \leq q \leq r$, tal que
$A[p\,..\,q{-}1] \leq A[q] < A[q{+}1\,..\,r]$ **e**

$$\max\{k-1, n-k\} \leq \left\lfloor \frac{7n}{10} \right\rfloor + 6,$$

onde $n = r - p + 1$ e $k = q - p + 1$.

Suponha que

$P(n) :=$ consumo de tempo máximo do algoritmo
PARTICIONE-BFPRT quando $n = r - p + 1$

Consumo de tempo

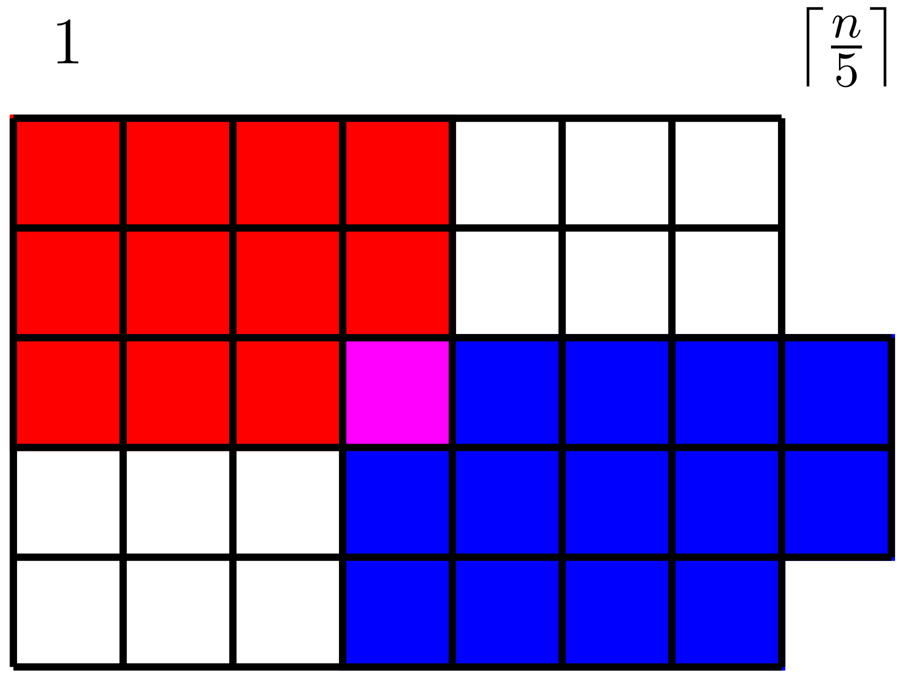
$T(n) :=$ consumo de tempo máximo do algoritmo SELECT-BFPRT quando $n = r - p + 1$

linha	consumo de todas as execuções da linha
1-2	$= 2\,\Theta(1)$
3	$= P(n)$
4-7	$= 4\,\Theta(1)$
8	$= T(k-1)$
9	$= T(n-k)$

$$T(n) = 6\,\Theta(1) + P(n) + \max\{T(k-1), T(n-k)\}$$

$$\leq \Theta(1) + P(n) + T(\lfloor \tfrac{7n}{10} \rfloor + 6)$$

Particione-BFPRT



$$\max\{k-1, n-k\} \le n - 3\left(\left\lceil \frac{1}{2}\left\lceil \frac{n}{5}\right\rceil \right\rceil - 2\right)$$

$$\le n - \left(\frac{3n}{10} - 6\right) = \frac{7n}{10} + 6$$

Particione-BFPRT

$n := r - p + 1$

PARTICIONE-BFPRT (A, p, r)

para $j \leftarrow p, p{+}5, p{+}5 \cdot 2, \ldots$ **até** $p{+}5(\lceil n/5 \rceil{-}1)$ **faça**

  ORDENE $(A, j, j{+}4)$

ORDENE $(A, p{+}5\lfloor n/5 \rfloor, n)$

para $j \leftarrow 1$ **até** $\lceil n/5 \rceil{-}1$ **faça**

  $B[j] \leftarrow A[p{+}5j{-}3]$

$B[\lceil n/5 \rceil] \leftarrow A[\lfloor (p{+}5\lfloor n/5 \rfloor{+}n)/2 \rfloor]$

$k \leftarrow$ SELECT-BFPRT$(B, 1, \lceil n/5 \rceil, \lfloor (\lceil n/5 \rceil{+}1)/2 \rfloor)$

$A[k] \leftrightarrow A[r]$

devolva PARTICIONE (A, p, r)

Particione-BFPRT

$n := r - p + 1$

PARTICIONE-BFPRT (A, p, r)

para $j \leftarrow p, p{+}5, p{+}5 \cdot 2, \ldots$ **até** $p{+}5(\lceil n/5 \rceil{-}1)$ **faça**

  ORDENE $(A, j, j{+}4)$

ORDENE $(A, p{+}5\lfloor n/5 \rfloor, n)$

para $j \leftarrow 1$ **até** $\lceil n/5 \rceil{-}1$ **faça**

  $A[j] \leftrightarrow A[p{+}5j{-}3]$

$A[\lceil n/5 \rceil] \leftrightarrow A[\lfloor (p{+}5\lfloor n/5 \rfloor{+}n)/2 \rfloor]$

$k \leftarrow$ SELECT-BFPRT$(A, p, p{+}\lceil n/5 \rceil{-}1, \lfloor (\lceil n/5 \rceil{+}1)/2 \rfloor)$

$A[k] \leftrightarrow A[r]$

devolva PARTICIONE (A, p, r)

Consumo de tempo do Particione-BFPRT

$P(n) :=$ consumo de tempo máximo do algoritmo PARTICIONE-BFPRT quando $n = r - p + 1$

linha	consumo de todas as execuções da linha
1-3	$= \lceil n/5 \rceil \, \Theta(1)$
4-6	$= \lceil n/5 \rceil \, \Theta(1)$
7	$= T(\lceil n/5 \rceil)$
8	$= \Theta(1)$
9	$= \Theta(n)$

$$P(n) = \Theta(2\lceil n/5 \rceil + n + 1) + T(\lceil n/5 \rceil)$$

$$= \Theta(n) + T(\lceil n/5 \rceil)$$

Consumo de tempo do Select-BFPRT

$T(n) :=$ consumo de tempo máximo do algoritmo
SELECT-BFPRT quando $n = r - p + 1$

Temos que

$$T(1) = \Theta(1) \text{ para } n < 30$$

$$\begin{aligned} T(n) &\leq \Theta(1) + P(n) + T\left(\left\lfloor \frac{7n}{10} \right\rfloor + 6\right) \\ &\leq \Theta(1) + \Theta(n) + T\left(\left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil\right) + T\left(\left\lfloor \frac{7n}{10} \right\rfloor + 6\right) \\ &= \Theta(n) + T\left(\left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil\right) + T\left(\left\lfloor \frac{7n}{10} \right\rfloor + 6\right) \end{aligned}$$

para $n = 30, 31, \ldots$,

Consumo de tempo do Select-BFPRT

$T(n)$ pertence a mesma classe O que:

$$S(n) = 1 \quad \text{para } n < 30$$

$$S(n) \le S\left(\left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil\right) + S\left(\left\lfloor \frac{7n}{10} \right\rfloor + 6\right) + n \quad \text{para } n \ge 30$$

n	30	60	90	120	150	180	210	240	270	300
$S(n)$	32	185	330	451	572	732	902	1040	1224	1439

Vamos verificar que $S(n) < 80\,n$ para $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$

Prova: Se $n = 1, \ldots, 29$, então $S(n) = 1 < 80 < 80n$.
Se $n = 30, \ldots, 99$, então

$$S(n) < S(120) = 451 < 80 \times 30 \le 80n.$$

Recorrência

Se $n \geq 100$, então

$$S(n) \leq S\left(\left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil\right) + S\left(\left\lfloor \frac{7n}{10} \right\rfloor + 6\right) + n$$

$$\overset{\text{hi}}{<} 80 \left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil + 80 \left(\left\lfloor \frac{7n}{10} \right\rfloor + 6\right) + n$$

$$\leq 80 \left(\frac{n}{5} + 1\right) + 80 \left(\frac{7n}{10} + 6\right) + n$$

$$= 80\frac{n}{5} + 80 + 80\frac{7n}{10} + 480 + n$$

$$= 16n + 56n + n + 560$$

$$= 73n + 560$$

$$< 80n \quad \text{(pois } n \geq 100\text{).}$$

Logo, $T(n)$ é $\mathrm{O}(n)$.

Conclusão

O consumo de tempo do algoritmo SELECT-BFPRT é $Oh(n)$.

Como adivinhei classe O?

Árvore da recorrência:

$$S(n)$$

Como adivinhei classe O?

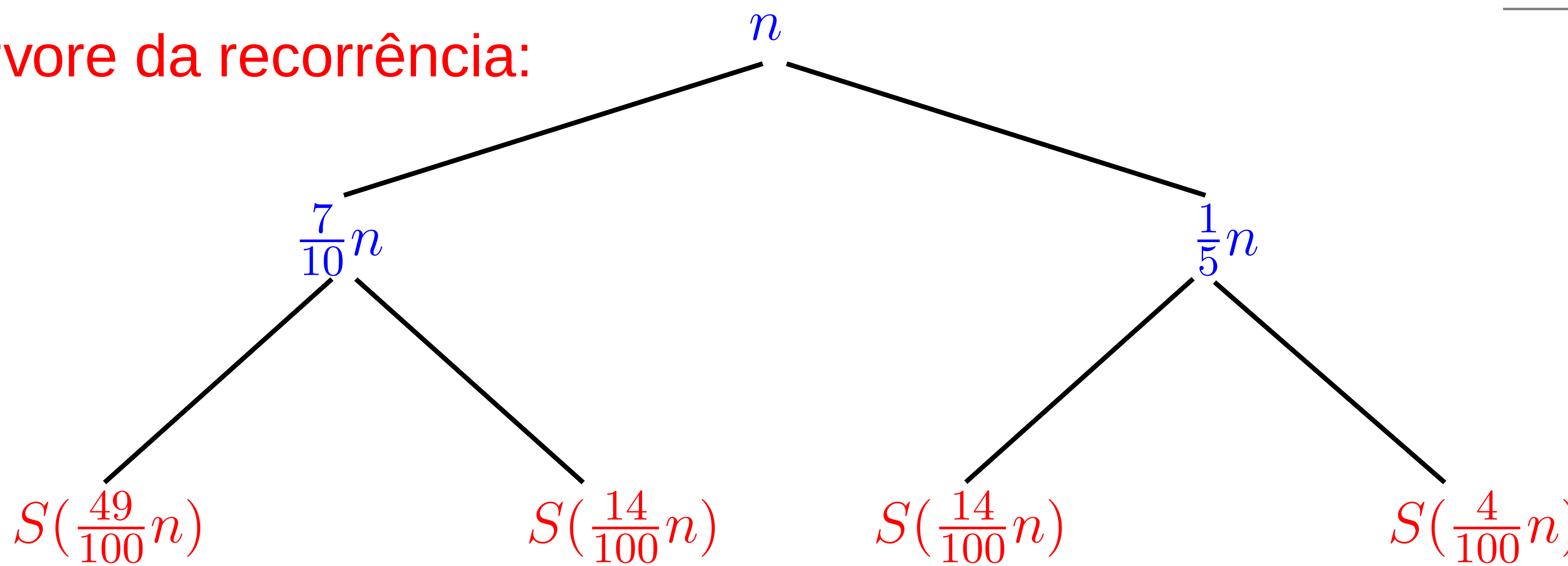
Árvore da recorrência:

$$n$$

$$S(\tfrac{7}{10}n) \qquad\qquad S(\tfrac{1}{5}n)$$

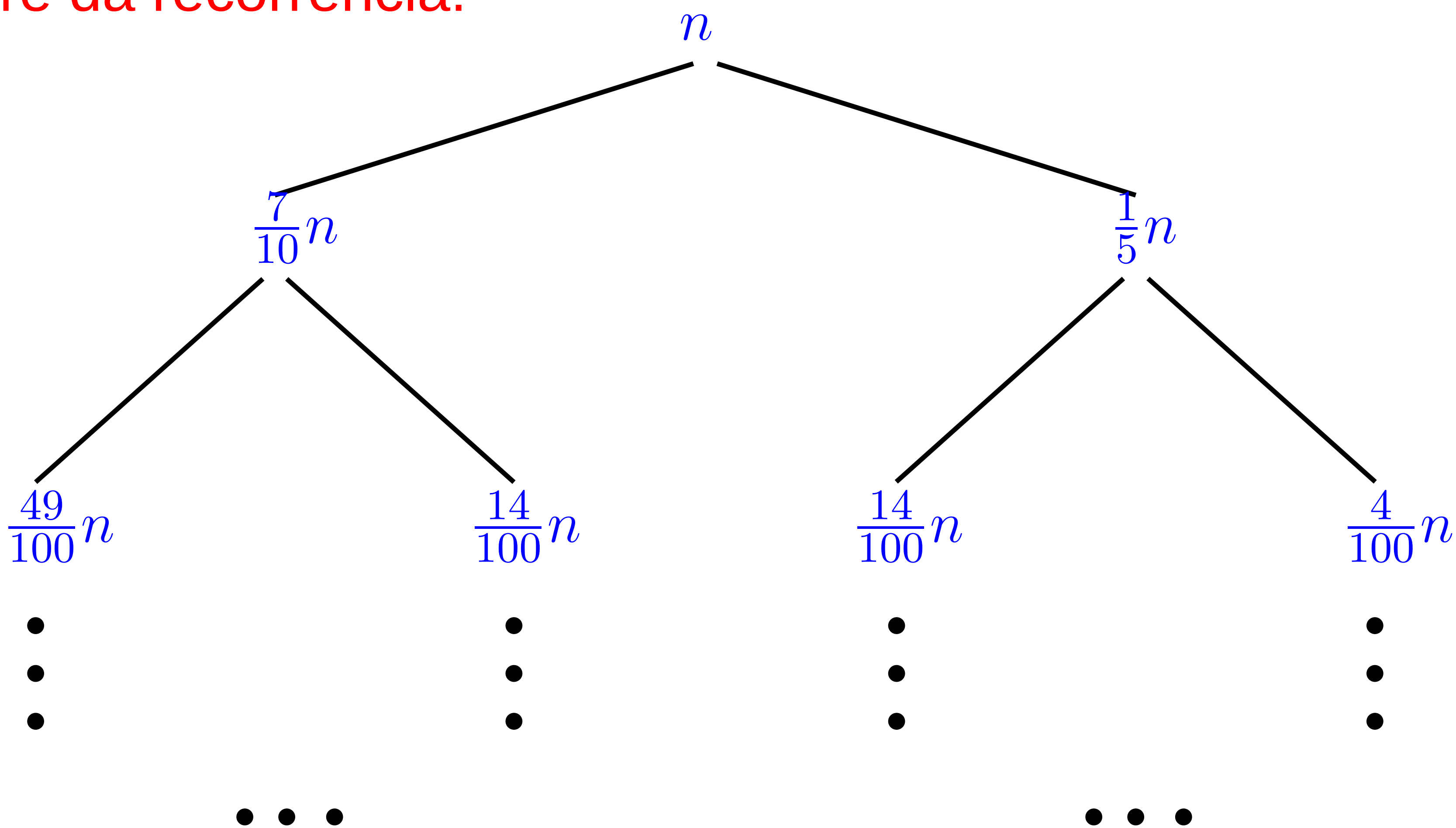
Como adivinhei classe O?

Árvore da recorrência:



Como adivinhei classe O?

Árvore da recorrência:



Contas

nível	0	1	2	...	$k-1$	k
soma	n	$\frac{9}{10}n$	$\frac{9^2}{10^2}n$	...	$\frac{9^{k-1}}{10^{k-1}}n$	$\frac{9^k}{10^k}n$

$$\frac{10^{k-1}}{9^{k-1}} < n \leq \frac{10^k}{9^k} \Rightarrow k = \lceil \log_{\frac{10}{9}} n \rceil$$

$$\begin{aligned} S(n) &= n + \frac{9}{10}n + \cdots + \frac{9^{k-1}}{10^{k-1}}n + \frac{9^k}{10^k}n \\ &= (1 + \frac{9}{10} + \cdots + \frac{9^k}{10^k})n \\ &= 10(1 - \frac{9^{k+1}}{10^{k+1}})n \\ &< 10n \end{aligned}$$