MAC5711 Análise de Algoritmos

DCC–IME–USP, 20 de outubro de 2006

Instruções:

(*i*) Esta prova contém seis questões sendo quatro de um ponto e meio e duas de dois pontos.

(*ii*) Mencione os teoremas e propriedades usados para justificar suas afirmações.

(*iii*) Você pode utilizar como subrotina qualquer algoritmo visto em sala de aula sem reescrevê-lo, mesmo que o algoritmo necessite de alguma **pequena** alteração. No entando, você deve descrever clara e sucintamente o que o algoritmo recebe, devolve ou faz e o seu consumo de tempo e qual é essa alteração. Exemplo

> *"O algoritmo* Blá-Blá-Blá *usa como subrotina o algoritmo* Ordenação-Lerda (A, n) *que recebe e rearranja um vetor* $A[1\,..\,n]$ *de modo que ele fique em ordem crescente. O consumo de tempo do algoritmo* Ordenação-Lerda *é* $O(n^n)$*."*

(*iv*) Não é permitida a consulta a livros, anotações, colegas, calculadoras, Internet, computadores ...

Duração da prova: 2 horas e 30 minutos

Questão 1 [CLRS 8.3-4]
Descreva um algoritmo Ordene (A, n) que recebe e ordena um vetor $A[1\,..\,n]$ em que todos os elementos pertencem a $\{0, 1, \ldots, n^2 - 1\}$. O consumo de tempo do algoritmo deve ser $O(n)$, onde $n = p - r + 1$. Justifique a sua resposta.

A existência desse algoritmo linear para ordenação contraria em algo o limite inferior para o consumo de tempo de algoritmos de ordenação? Enuncie a asserção desse "limite inferior para ordenação" para justificar a sua resposta.

Solução: Estamos habituados a representar números naturais na base decimal que utiliza os algarismos $0, 1, \ldots, 9$. Na solução consideraremos a representação de cada elemento em $A[1\,..\,n]$ na base n, que utiliza os algarismos $0, 1, \ldots, n - 1$. Desta forma, para $j = 1, \ldots, n$, temos que

$$A[j] = a_1 \times n + a_0,$$

onde a_0 e a_1 são algarismos em $\{0, 1, \ldots, n - 1\}$. Diremos que a_0 é o algarismo **menos significativo** de $A[j]$ e que a_1 é o algarismo **mais significativo** de $A[j]$.

O algoritmo Counting-Sort recebe e ordena um vetor $X[1\,..\,n]$ em que todos os elementos estão em $\{0, 1, \ldots, k\}$, para um dado k. O consumo de tempo do algoritmo é $\Theta(n + k)$. Em particular, se k é $\Theta(n)$, então o consumo de tempo do Counting-Sort é $\Theta(n)$.

O algoritmo Ordene (A, n) é uma mera adaptação do Radix-Sort.

```
Ordene (A, n)
1  ordene A[1..n] usando como chaves seus algarismos menos significativos.
2  ordene A[1..n] usando como chaves seus algarismos mais significativos.
```

Utilizando uma adaptação do COUNTING-SORT para $k = n - 1$ nas ordenações das linhas 1 e 2 obtemos um algoritmo de consumo de tempo $\Theta(n + n) = \Theta(n)$. A estabilidade do COUNTING-SORT é fundamental para a correção do algoritmo ORDENE.

Sabe-se que todo algoritmo de ordenação **baseado em comparações** faz

$$\Omega(n \lg n)$$

comparações no **pior caso**. O limite inferior da ordenação, em termos da notação-o, se traduz em

> **Não existe** algoritmo de ordenação **baseado em comparações** de consumo de tempo $o(n \lg n)$.

A existência do algoritmo linear ORDENE(A, n) não contraria em nada o limite inferior para ordenação já que esse algoritmo não é baseado em comparações, ou seja, para determinar a ordem relativa entre os elemento do vetor $A[1\,..\,n]$ o algoritmo não utiliza apenas testes como

$$A[i] < A[j], A[i] \leq A[j], A[i] = A[j], A[i] \geq A[j] \text{ e } A[i] > A[j].$$

O algoritmo ORDENE examina o valor de cada elemento e também utiliza operações de "mascara" para extrair um determinado dígito de cada elemento de A.

Questão 2 [CLRS 9.3-5]
Suponha que MEDIANA(A, p, r) é um algoritmo que rearranja os elementos de um dado vetor $A[p\,..\,r]$ de números inteiros e devolve um índice q, $p \le q \le r$, tal que

$$A[p\,..\,q-1] \le A[q] \le A[q+1\,..\,r]$$

e $A[q]$ é a mediana de $A[p\,..\,r]$. Suponha ainda que o consumo de tempo do algoritmo MEDIANA é linear.

Escreva um algoritmo SELECT(A, p, r, i) que recebe um vetor $A[p\,..\,r]$ de números inteiros e um número inteiro i, $1 \le i \le r - p + 1$, e devolve o valor do i-ésimo menor elemento de $A[p\,..\,r]$. O algoritmo deve utilizar o algoritmo MEDIANA como subrotina e deve consumir tempo linear. Explique sucintamente porque seu algoritmo está correto e tem o consumo de tempo pedido.

Solução: Eis uma versão de algoritmo SELECT que faz o serviço:

```
SELECT (A, p, r, i)
1  se p = r
2      então devolva A[p]
3  q ← MEDIANA (A, p, r)
4  k ← q − p + 1
5  se k = i
6      então devolva A[q]
7  se k > i
8      então devolva SELECT (A, p, q − 1, i)
9      senão devolva SELECT (A, q + 1, r, i − k)
```

Como $1 \le i \le r - p + 1$, se $p = q$, então $i = 1$ e o algoritmo devolve na linha 2 o único elemento do vetor $A[p\,..\,q]$. O algoritmo determina na linha 4 o número de elementos no vetor $A[p\,..\,q]$. Devido a especificação do algoritmo MEDIANA vemos que:

- se $k = i$, então o i-ésimo menor elemento do vetor $A[p\,..\,q]$ é $A[q]$;
- se $k > i$, então o elemento desejado é o i-ésimo menor elemento do vetor $A[p\,..\,q-1]$; e
- se $k < i$, então o elemento procurado é o $(i-k)$-ésimo menor elemento do vetor $A[q+1\,..\,r]$.

A correção do algoritmo SELECT é devida a este ser uma mera implementação dos fatos acima.

Seja $T(n)$ o consumo de tempo máximo quando $n = r - p + 1$. O consumo de tempo pela execução de cada linha do algoritmo está na tabela a seguir.

linha	consumo de tempo da linha
1-2	$= 2\,\Theta(1)$
3	$= \Theta(n)$
4-7	$= 4\,\Theta(1)$
8-9	$= T(\lfloor n/2 \rfloor)$
$T(n)$	$= \Theta(n+6) + T(\lfloor n/2 \rfloor)$
	$= \Theta(n) + T(\lfloor n/2 \rfloor)$

Obtemos desta forma a recorrência que descreve o consumo de tempo do algoritmo SELECT no pior caso:

$$\begin{aligned} T(1) &= \Theta(1) \\ T(n) &= \Theta(n) + T(\lfloor n/2 \rfloor) \quad \text{para } n = 2, 3, \ldots \end{aligned}$$

Seja c uma constante tal que o consumo de tempo $\Theta(n)$ correspondente às linhas 1–7 é não superior a $c\,n$ para $n = 1, 2, \ldots$. Desta forma, para $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} T(n) &= \Theta(n) + T\big(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor\big) \\ &\leq c\,n + T\big(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor\big) \\ &\leq c\,n + c\,\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + T\big(\lfloor \frac{n}{2^2} \rfloor\big) \\ &\leq c\,n + c\,\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + c\,\lfloor \frac{n}{2^2} \rfloor + T\big(\lfloor \frac{n}{2^3} \rfloor\big) \\ &\leq \cdots \\ &\leq c\,n + c\,\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + c\,\lfloor \frac{n}{2^2} \rfloor + \cdots + c\,\lfloor \frac{n}{2^k} \rfloor \\ &\leq c\,n + c\,\frac{n}{2} + c\,\frac{n}{2^2} + \cdots + c\,\frac{n}{2^k} \\ &= c\,n\,\big(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^k}\big) \\ &< c\,n\,\big(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^k} + \cdots\big) \\ &= 2c\,n \end{aligned}$$

onde $k = \lfloor \lg n \rfloor$. Como $T(n) \leq 2c\,n$ para $n = 2, 3, \ldots$ concluímos que $T(n)$ é $\mathrm{O}(n)$ (e portanto $\Theta(n)$).

Questão 3 [CLRS 9.2]
Escreva um algoritmo SELECT(A, W, p, r, i) que recebe vetores $A[p\,..\,r]$ e $W[p\,..\,r]$ de números inteiros positivos e um número inteiro i tal que $1 \le i \le \sum_{j=p}^{r} W[j]$ e devolve o valor do i-ésimo menor elemento da lista formada por $W[p]$ cópias de $A[p]$, $W[p+1]$ cópias de $A[p+1]$, ..., $W[r]$ cópias de $A[r]$. Por exemplo, para $p = 6, r = 8, i = 6$,

5	6	7	8	9
...	4	2	8	...

A , e

5	6	7	8	9
...	3	5	4	...

W

o algoritmo deve devolver 4 que é o 6º menor elemento da lista formada por

$$4 \quad 4 \quad 4 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 8 \quad 8 \quad 8 \quad 8\,.$$

O consumo de tempo do algoritmo SELECT deve ser $O(n)$, onde $n = r - p + 1$. Explique sucintamente porque seu algoritmo está correto e tem o consumo de tempo pedido.

Solução: O algoritmo SELECT é semelhante ao algoritmo da questão anterior:

```
SELECT (A, W, p, r, i)
 1  se p = r
 2      então devolva A[p]
 3  q ← MEDIANA (A, W, p, r)
 4  k ← 0
 5  para i ← 1 até q faça
 6      k ← k + W[i]
 7  se k − W[q] < i e i ≤ k
 8      então devolva A[q]
 9  se k > i    ▷ portanto k − W[q] > i
10      então devolva SELECT (A, p, q − 1, i)
11      senão devolva SELECT (A, q + 1, r, i − k)
```

O algoritmo SELECT utiliza como subrotina o algoritmo:

```
MEDIANA (A, W, p, r)
0  n ← r − p + 1
1  i ← ⌊(n + 1)/2⌋
2  q ← SELECT-BFPRT (A, W, p, r, i)
3  devolva q
```

O algoritmo MEDIANA, por sua vez, utiliza como subrotina o algoritmo SELECT-BFPRT, visto em sala de aula, com uma **pequena** alteração. O algoritmo SELECT-BFPRT recebe o vetor $A[p\,..\,r]$ e um número inteiro i tal que $1 \le i \le r - p + 1$ e devolve um índice q tal que $A[q]$ é o i-ésimo menor elemento de $A[p\,..\,r]$. A pequena alteração necessária é a seguinte:

> o algoritmo passa a receber também um vetor $W[p\,..\,r]$ e toda operação "$A[j] \leftrightarrow A[k]$" realizada deve ser seguida pela operação "$W[j] \leftrightarrow W[k]$."

Assim, o algoritmo MEDIANA devolve um índice q, $p \le q \le r$, tal que

$$A[p\,..\,q-1] \le A[q] \le A[q+1\,..\,r]$$

e $A[q]$ é a mediana de $A[p\,..\,r]$. Como o consumo de tempo do algoritmo SELECT-BFPRT é $\Theta(n)$, então o consumo de tempo do algoritmo MEDIANA também é $\Theta(n)$.

Como $1 \le i \le \sum_{j=p}^{r} W[j]$, se $p = q$, então, na linha 2, o algoritmo corretamente devolve o único elemento da lista. O algoritmo determina nas linha 4 e 5 o número de elementos da lista formada pelos elementos do vetor $A[p\,..\,q]$. A correção do algoritmo é devido a especificação do algoritmo MEDIANA já que:

- se $k - W[q] < i \le k$, então o i-ésimo menor elemento da lista é $A[q]$ (linhas 7 e 8);
- se $k - W[q] > i$, então o elemento desejado é o i-ésimo menor elemento da lista formada por cópias dos elementos no vetor $A[p\,..\,q-1]$ (linha 10); e
- se $k < i$, então o elemento procurado é o $(i-k)$-ésimo menor elemento da lista formada por cópias dos elementos no vetor $A[q+1\,..\,r]$ (linha 11).

Seja $T(n)$ o consumo de tempo máximo quando $n = r - p + 1$. O consumo de tempo pela execução de cada linha do algoritmo está na tabela a seguir.

linha	consumo de tempo da linha
1-2	$= 2\,\Theta(1)$
3	$= \Theta(n)$
4	$= \Theta(1)$
5-6	$= 2\,\Theta(\lceil n/2 \rceil)$
7-9	$= 3\,\Theta(1)$
10-11	$= T(\lfloor n/2 \rfloor)$
$T(n)$	$= \Theta(n + 2\lceil n/2 \rceil + 6) + T(\lfloor n/2 \rfloor)$
	$= \Theta(n) + T(\lfloor n/2 \rfloor)$

Obtemos assim a recorrência que descreve o consumo de tempo do algoritmo SELECT no pior caso:

$$T(1) = \Theta(1)$$
$$T(n) = \Theta(n) + T(\lfloor n/2 \rfloor) \quad \text{para } n = 2, 3, \ldots$$

Como visto na questão 2, $T(n)$ é $\Theta(n)$.

Questão 4 [CLRS 5.3-4]
Considere o algoritmo a seguir que recebe um vetor $A[1\,..\,n]$ e devolve no vetor $B[1\,..\,n]$ uma permutação dos elementos de A.

```
PERMUTE-BY-CYCLIC(A, B, n)
1  k ← RANDOM(1, n)
2  para i ← 1 até n faça
3       j ← i + k
4       se j > n
5            então j ← j − n
6       B[j] ← A[i]
```

Suponha que o vetor $A[1\,..\,n]$ contém uma permutação dos inteiros $1, 2, \ldots, n$. Se i e j são números inteiros em $\{1, \ldots, n\}$, então quanto vale $\Pr\{B[j] = A[i]\}$? O professor McSperto afirma que o vetor $B[1\,..\,n]$ produzido pelo algoritmo é uma permutação aleatória uniforme de $A[1\,..\,n]$. O professor tem razão? Justifique as suas respostas.

Solução: Se $j > i$, então

$$\begin{aligned} \Pr\{B[j] = A[i]\} &= \Pr\{j = i + k\} && (1)\\ &= \Pr\{k = j - i\} \\ &= 1/n\ , && (2) \end{aligned}$$

onde a igualdade (1) segue da linha 3 e do fato de $A[1\,..\,n]$ conter elementos distintos e a igualdade (2) é devida à especificação do algoritmo RANDOM. Analogamente, se $j \leq i$

$$\begin{aligned} \Pr\{B[j] = A[i]\} &= \Pr\{j = i + k - n\} && (3)\\ &= \Pr\{k = j - i + n\} \\ &= 1/n\ , \end{aligned}$$

onde a igualdade (3) é conseqüência das linhas 3, 4 e 5 e do fato de $A[1\,..\,n]$ conter elementos distintos.

O algoritmo não produz uma permutação aleatória uniforme para $n > 2$. Em virtude da linha 1 vê-se que o algoritmo é capaz de produzir n permutação de $A[1\,..\,n]$ enquanto o número de permutações é $n!$ ($n! > n$ para $n > 2$).

Questão 5 [CLRS 5.1-2]
Considere o algoritmo abaixo que recebe dois números inteiros a e b, $0 \le a \le b$ e devolve um número inteiro i, $a \le i \le b$. O algoritmo usa a subrotina Bit-Aleatório() que devolve 1 ou 0, independentemente do valores previamente devolvidos, com probabilidade uniforme.

```
RANDOM(a, b)
1  n ← b − a
2  t ← ⌈lg(n + 1)⌉
3  repita
4      r ← 0
5      para j ← 1 até t faça
6          r ← 2 × r + BIT-ALEATÓRIO()
7  até que r ≤ n
8  i ← a + r
9  devolva i
```

Supondo que o consumo de tempo da subrotina Bit-Aleatório() é constante, qual o consumo de tempo esperado do algoritmo Random? Use a notação O, mas procure dar a resposta o mais justa possível e justifique-a.

Solução: Seja X a variável aleatória representando o número de execuções das linhas 3-7. O consumo de tempo pela execução de cada linha do algoritmo está na tabela a seguir.

linha	consumo de tempo da linha
1-2	$= 2\,\Theta(1)$
3-4	$= \Theta(X)$
5-6	$= 2\,\Theta(X\lceil\lg(n+1)\rceil)$
7	$= \Theta(X)$
8-9	$= 2\,\Theta(1)$
$T(n)$	$= \Theta(X\,\lceil\lg(n+1)\rceil + 2\,X + 4)$
	$= \Theta(X\,\lceil\lg(n+1)\rceil)$
	$= \Theta(X\,\lg n)$

O consumo de tempo do algoritmo é $\Theta(X \lg n)$, onde $n = b - a$, e o consumo de tempo esperado do algoritmo é $\Theta(\mathrm{E}[X] \lg n)$. Determinaremos $\mathrm{E}[X]$.

Para $i = 1, 2, 3, \ldots$, seja X_i a variável aleatória que indica se as linhas 3-7 foram executadas (*pelo menos*) i vezes, ou seja,

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{se as linhas 3-7 foram executadas } i \text{ vezes,} \\ 0, & \text{em caso contrário.} \end{cases}$$

Portanto,

$$X = X_1 + X_2 + X_3 + \cdots \tag{4}$$

Temos que

$$\mathrm{E}[X_i] = 1 \times \Pr\{X_i = 1\} + 0 \times \Pr\{X_i = 0\} = \Pr\{X_i = 1\} = \Pr\{X \geq i\}.$$

Em palavras, $\mathrm{E}[X_i]$ é igual a probabilidade das linhas 3-7 serem executada i vezes.

Seja r_i o valor de r na i-ésima execução da linha 7, para $i = 1, 2, \ldots$ As linha 3-7 são executadas i vezes se e somente se

$$r_1 > n \;\text{ e }\; r_2 > n \;\text{ e }\; \ldots \;\text{ e }\; r_{i-1} > n$$

Assim, $\Pr\{X \geq 1\} = 1$ e, para $i \geq 2$,

$$\begin{aligned}
\Pr\{X \geq i\} &= \Pr\{r_1 > n \;\text{ e }\; r_2 > n \;\text{ e }\; \ldots \;\text{ e }\; r_{i-1} > n\} \\
&= \Pr\{r_1 > n\} \times \Pr\{r_2 > n\} \times \cdots \times \Pr\{r_{i-1} > n\} \\
&< \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \cdots \times \frac{1}{2} \qquad (5) \\
&= \frac{1}{2^{i-1}}\,,
\end{aligned}$$

onde a desigualdade (5) será demonstrada mais adiante.

Agora, podemos determinar $\mathrm{E}[X]$. De (4) sabemos que

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[X] &= \mathrm{E}[X_1 + X_2 + X_3 + \cdots] \\
&= \mathrm{E}[X_1] + \mathrm{E}[X_2] + \mathrm{E}[X_3] + \cdots \\
&= \Pr\{X \geq 1\} + \Pr\{X \geq 2\} + \Pr\{X \geq 3\} + \cdots \\
&< 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots \\
&= 1 + 1 \\
&= 2.
\end{aligned}$$

Portanto, $\mathrm{E}[X]$ é $\Theta(1)$ e o consumo de tempo esperado do algoritmo é $\Theta(\lg n)$.

Demonstraremos agora a desigualdade utilizada em (5): na linha 7 vale que

$$\Pr\{r > n\} < \frac{1}{2}\,.$$

Primeiro, notemos que na linha 5:

(i0) r é um número em $0\,..\,2^{j-1}{-}1$; e
(i1) $\Pr\{r = k\} = 1/2^{j-1}$ para cada k em $0\,..\,2^{j-1}{-}1$.

Em particular, (i0) e (i1) também valem quando $j = t + 1$, e portanto na linha 7:

(i2) r é um número em $0\,..\,2^{t}{-}1$; e
(i3) $\Pr\{r = k\} = 1/2^{t}$ para cada k em $0\,..\,2^{t}{-}1$.

Assim, como $2^{t-1} \leq n \leq 2^t - 1$, na linha 7 vale que

$$\begin{aligned}
\Pr\{r > n\} &= \Pr\{r = n+1\} + \Pr\{r = n+2\} + \cdots + \Pr\{r = 2^t - 1\} \\
&= \frac{1}{2^t} + \frac{1}{2^t} + \cdots + \frac{1}{2^t} \\
&< \frac{2^t - 2^{t-1}}{2^t} \\
&= \frac{2^{t-1}}{2^t} \\
&= \frac{1}{2}\,.
\end{aligned}$$

Observação: É ainda possível verificar que na linha 8

(i4) r é um número em $0\,..\,n$; e
(i5) $\Pr\{r = k\} = 1/(n+1)$ para cada k em $0\,..\,n$.

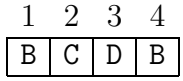
Portanto, o valor devolvido pelo algoritmo é um número em $a\,..\,b$ gerado com probabilidade uniforme $1/(b-a+1)$.

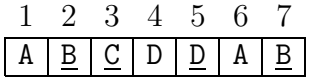
Questão 6

Uma seqüência $X[1\,..\,m]$ é subseqüência de uma seqüência $Y[1\,..\,n]$ se existem índices $i_1 < i_2 < \ldots < i_m$ tais que

$$X[j] = Y[i_j] \quad \text{para } j = 1, \ldots, m.$$

Por exemplo,

$X =$ 

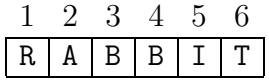
é uma subseqüência de $Y =$ 

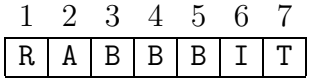
com índices $2 < 3 < 5 < 7$.

Escreva um algoritmo SUBSEQ-CONT(X, m, Y, n) que recebe uma seqüência $X[1\,..\,m]$ e uma seqüência $Y[1\,..\,n]$, e devolve o número de ocorrências de X como subseqüência de Y. Sua função deve consumir tempo $O(mn)$.

Exemplos:

a) Se

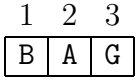
$X =$ 

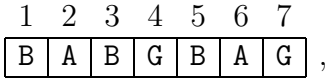
e $Y =$ 

,

o algoritmo deve devolver 3.

b) Se

$X =$ 

e $Y =$ 

,

o algoritmo deve devolver 5.

Explique sucintamente porque seu algoritmo está correto e tem o consumo de tempo pedido.

Solução: Seja $c[i, j]$ o número de ocorrências de $X[1\,..\,i]$ como subseqüência de $Y[1\,..\,j]$. Se $X[i] = Y[j]$ então $c[i, j] = c[i-1, j-1] + c[i, j-1]$, senão $c[i, j] = c[i, j-1]$. Assim, obtemos a recorrência:

$$\begin{array}{lcll} c[0, j] & = & 1, & \text{para } j = 0, 1, \ldots, n; \\ c[i, 0] & = & 0, & \text{para } i = 1, 2, \ldots, m; \\ c[i, j] & = & c[i-1, j-1] + c[i, j-1], & \text{se } i \geq 1, j \geq 1 \text{ e } X[i] = Y[j]; \\ c[i, j] & = & c[i, j-1], & \text{se } i \geq 1, j \geq 1 \text{ e } X[i] \neq Y[j]. \end{array}$$

O algoritmo a seguir baseia-se nessa recorrência.

```
SUBSEQ-CONT(X, m, Y, n)
 1  para j ← 0 até n faça
 2      c[0, j] ← 1
 3  para i ← 1 até m faça
 4      c[i, 0] ← 0
 5  para i ← 1 até m faça
 6      para j ← 1 até n faça
 7          se X[i] = Y[j]
 8              então c[i, j] ← c[i − 1, j − 1] + c[i, j − 1]
 9              senão c[i, j] ← c[i, j − 1]
10  devolva c[m, n]
```

O consumo de tempo pela execução de cada linha do algoritmo está na tabela a seguir.

linha	consumo de tempo da linha
1-2	$2\,\Theta(n)$
3-4	$2\,\Theta(m)$
5	$\Theta(m)$
6	$\Theta(mn)$
7	$\Theta(mn)$
8-9	$\Theta(mn)$
10	$\Theta(1)$
total	$\Theta(3\,mn + 3\,m + 2\,n + 1) = \Theta(mn)$

Eis uma versão *memoized* do algoritmo:

```
SUBSEQ-CONT(X, m, Y, n)
 1  para i ← 0 até m faça
 2      para j ← 0 até n faça
 3          c[i, j] ← INDEFINIDO
 4  devolva LOOKUP (c, m, n)
```

```
LOOKUP (c, i, j)    ▷ X e Y estão implícitos
 1  se c[i, j] ≠ INDEFINIDO
 2       então devolva c[i, j]
 3  se i = 0 então c[i, j] = 1
 4  senão se j = 0 então c[i, j] = 0
 5  senão se X[i] = Y[j]
 6               então c[i, j] ← LOOKUP (c, i − 1, j − 1) + LOOKUP (c, i, j − 1)
 7               senão c[i, j] ← LOOKUP (c, i, j − 1)
 8  devolva c[i, j]
```