Melhores momentos

AULA PASSADA

Função computável em tempo polinomial

Um função $\mathtt{f}$ de Σ^* em Σ^* é **computável em tempo polinomial** se existe alguma MT determinística que consome tempo polinomial e que pára com exatamente $\mathtt{f}(w)$ na sua fita, quando iniciada com qualquer cadeia w.

Redução polinomial

Permite comparar o “grau de complexidade” de problemas.

Um linguagem A é **redutível em tempo polinomial** à linguagem B, denotado por $A \leq_P B$, se existe uma função computável em tempo polinomial $\mathtt{f}$ de Σ^* em Σ^* tal que

$$w \in A \Leftrightarrow \mathtt{f}(w) \in B \ .$$

A função $\mathtt{f}$ é chamada de **redução de tempo polinomial** de A para B.

Redução polinomial

Teorema. Se $A \leq_P B$ e B está em P, então A está em P.

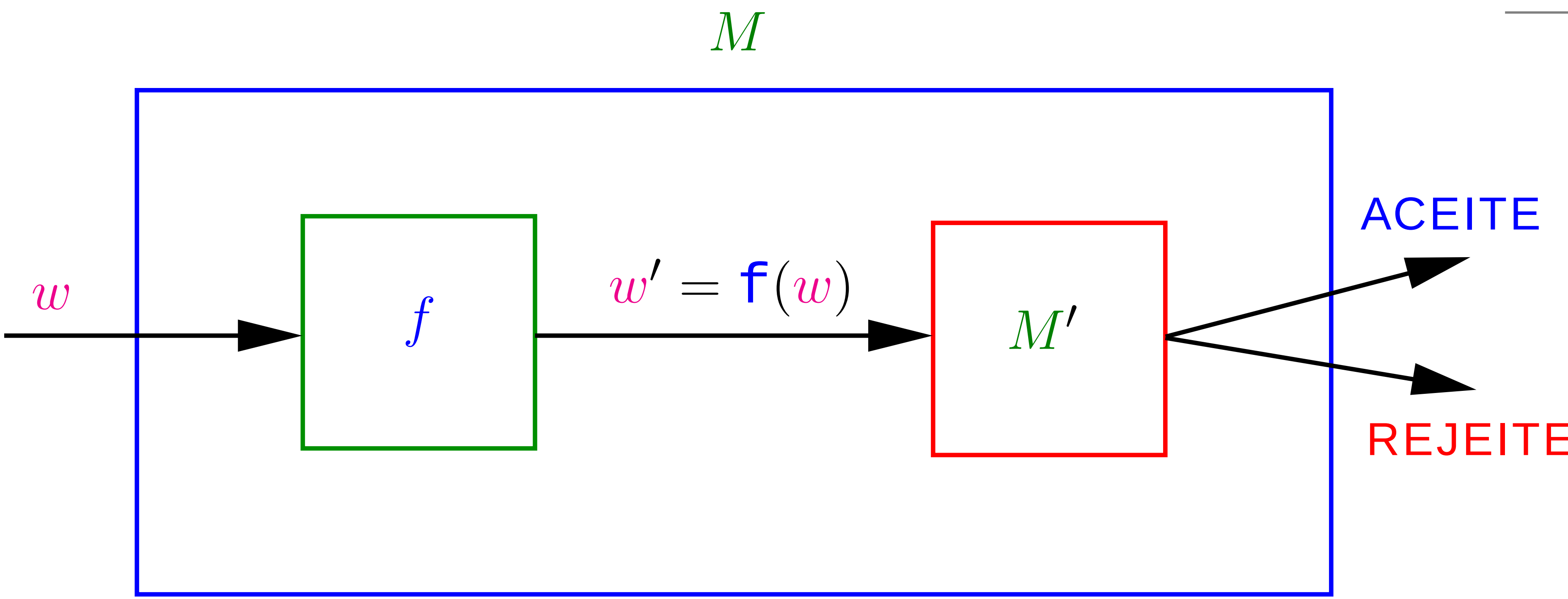
Prova: Seja M' MT que decide B em tempo polinomial e `f` uma redução polinomial de A em B. A MT M a seguir decide A em tempo polinomial:

$M =$ "com entrada w:

1. Calcule $w' = \texttt{f}(w)$
2. Simule M' com entrada w'.
   Se M' aceita w', então ACEITE w.
   Se M' rejeita w', então REJEITE w."

M consome tempo polinomial pois a composição de polinômios é um polinômio. ■

Esquema comum de reduções



Faz apenas uma chamada à MT M'.

$\mathtt{f}$ transforma w em $w' = \mathtt{f}(w)$ tal que

$M(w) =$ ACEITE se e somente se $M'(w') =$ ACEITE

$\mathtt{f}$ é uma espécie de "filtro" ou "compilador".

SAT

SAT $= \{\langle\phi\rangle : \phi$ é uma fórmula booleana satisfatível$\}$

Exemplo:

$$\phi = (x_1 \vee x_4) \wedge (\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_2 \vee \overline{x}_3)$$

Variáveis: x_1, x_2, x_3, x_4

Literais: $x_1, \overline{x}_1, \overline{x}_2, x_3, \overline{x}_3, x_4$

Cláusula= **ou** de literais: $(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3 \vee x_4)$

CSAT e 3SAT

Uma fórmula está na **forma normal conjuntiva** (FNC) se ela á uma conjunção de cláusulas (**e** de cláusulas):
Exemplo:

$$\phi = (x_1 \vee x_4) \wedge (\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_2 \vee \overline{x}_3)$$

CSAT $= \{\langle\phi\rangle : \phi$ é uma fórmula normal conjuntiva satisfatível$\}$

3SAT $= \{\langle\phi\rangle : \phi$ é uma fórmula normal conjuntiva satisfatível com **3 literais por cláusula**$\}$

Exemplo:

$$\phi = (x_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3) \wedge (\overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_3)$$

AULA 10

Mais redução Polinomial

MS 7.4

SAT$\leq_P$CSAT

Teorema. SAT$\leq_P$CSAT

Prova: Descreveremos uma redução polinomial f que recebe um fórmula booleana ϕ e devolve uma fórmula booleana ϕ' na forma normal conjuntiva

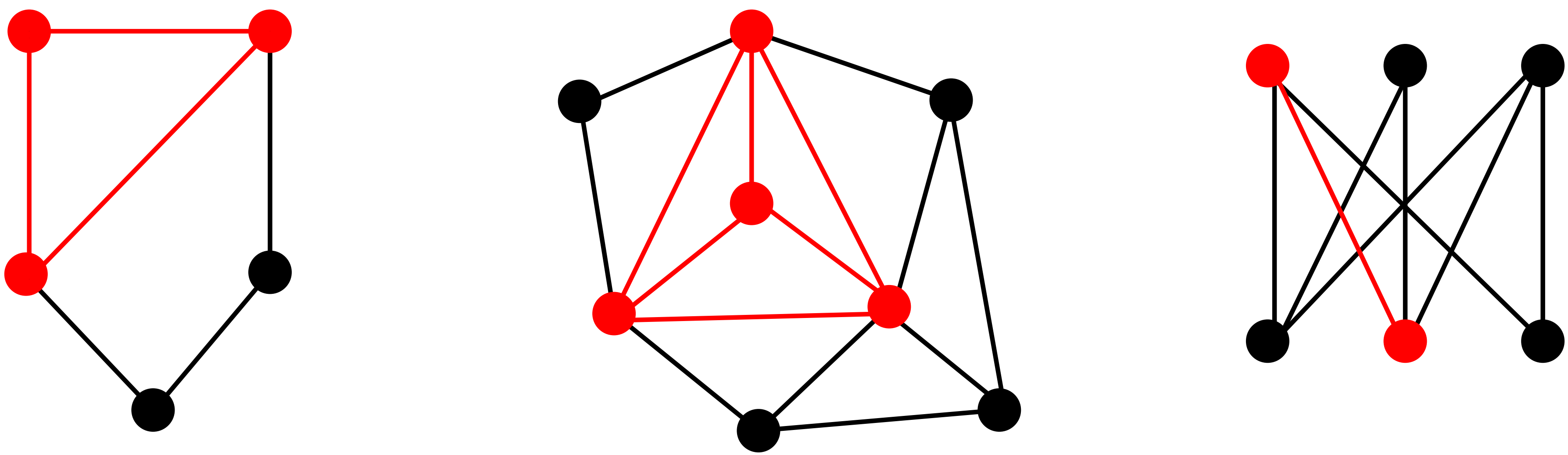
$$\phi \text{ é satisfatível} \Leftrightarrow \phi' \text{ é satisfatível.}$$

Deixaremos a prova para uma próxima oportunidade ...

Clique

Problema: Dado um grafo G e um inteiro k, G possui um clique com $\geq k$ vértices?

Exemplos:

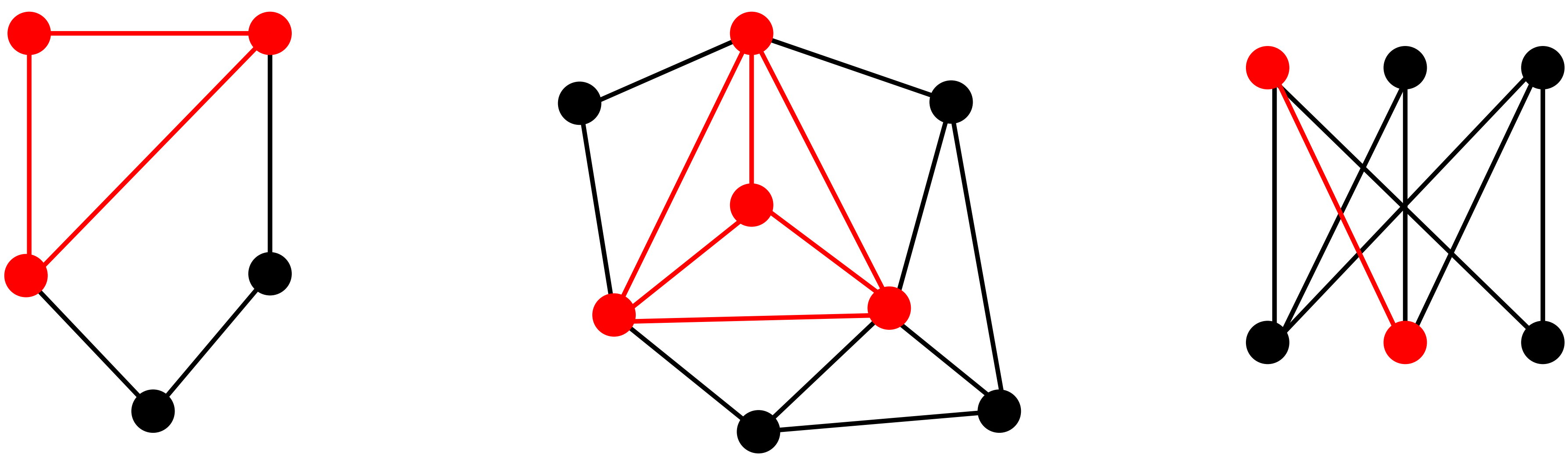


clique com k vértices $=$ subgrafo completo com k vértices

Clique

CLIQUE $= \{\langle G, k\rangle : G$ tem um clique de tamanho $k\}$

Exemplos:



clique com k vértices $=$ subgrafo completo com k vértices

3SAT$\leq_P$CLIQUE

Descreveremos uma redução polinomial f que recebe um fórmula booleana ϕ com k cláusulas e exatamente 3 literais por claúsula e devolve um cadeia $\langle G, k\rangle$ onde G é um grafo tal que

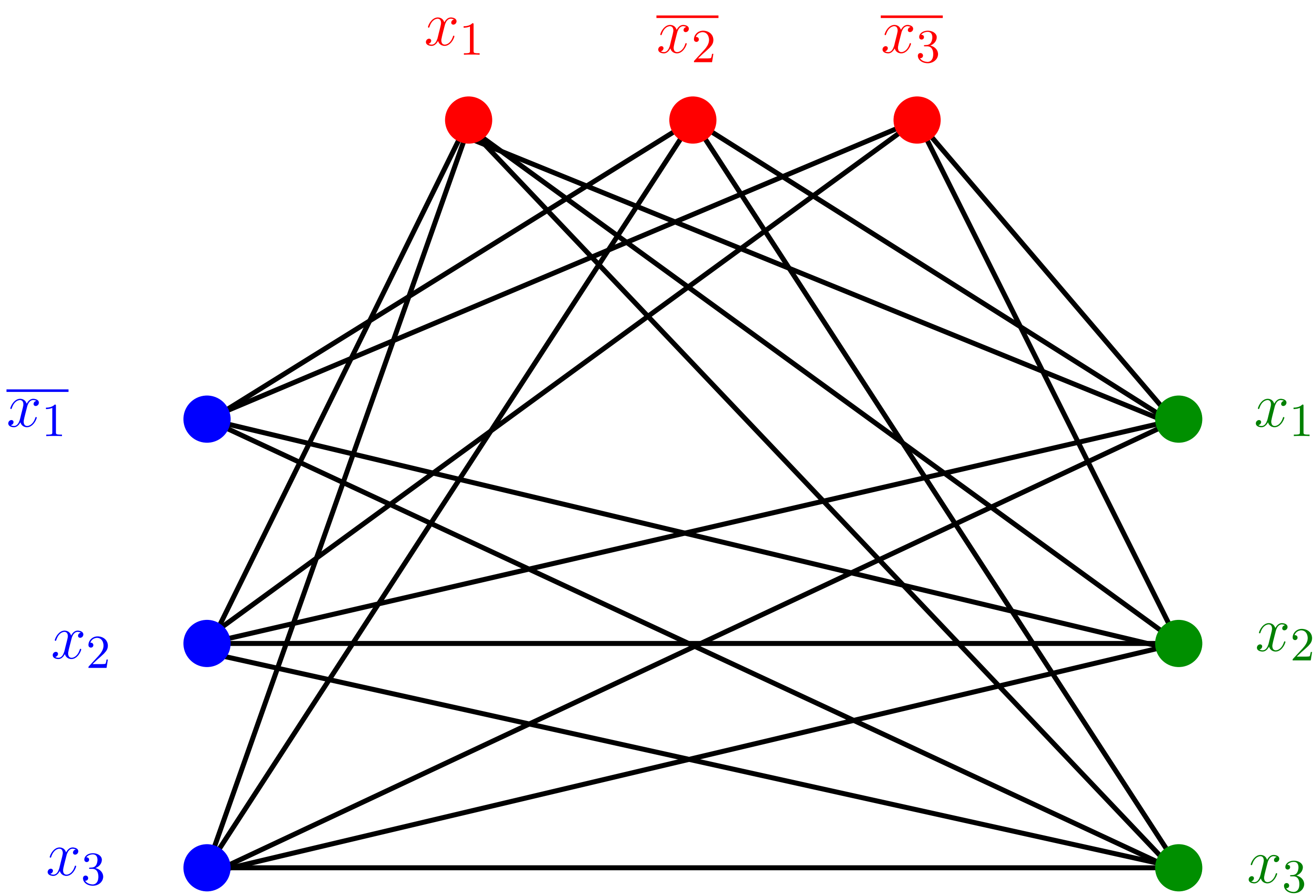
$$\phi \text{ é satisfatível} \Leftrightarrow G \text{ possui um clique} \geq k.$$

Para cada cláusula o grafo G terá três vértices, um correspondente a cada literal da cláusula. Logo, G terá $3k$ vértices. Teremos uma aresta ligando vértices u e v se

- u e v são vértices que correspondem a literais em diferentes cláusula; e
- se u corresponde a um literal x então v não corresponde ao literal $\overline{x}$.

3SAT$\leq_P$CLIQUE

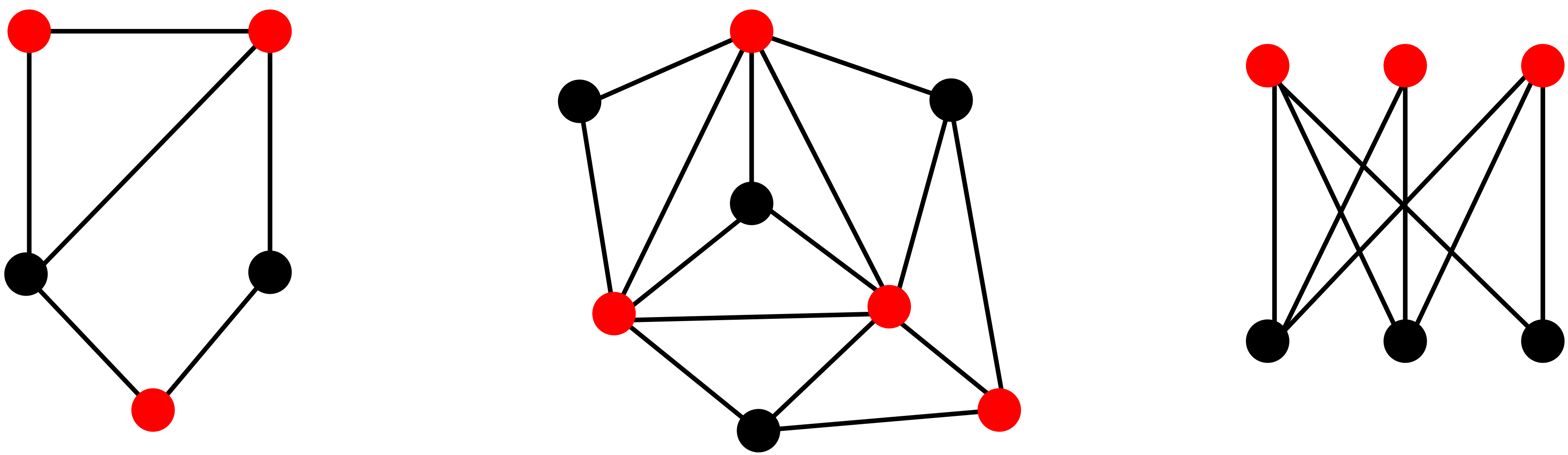
$$(x_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3) \wedge (\overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_3)$$



Cobertura por vértices

Problema: Dado um grafo G e um inteiro k, G possui uma cobertura por vértices com $\leq k$ vértices?

Exemplos:

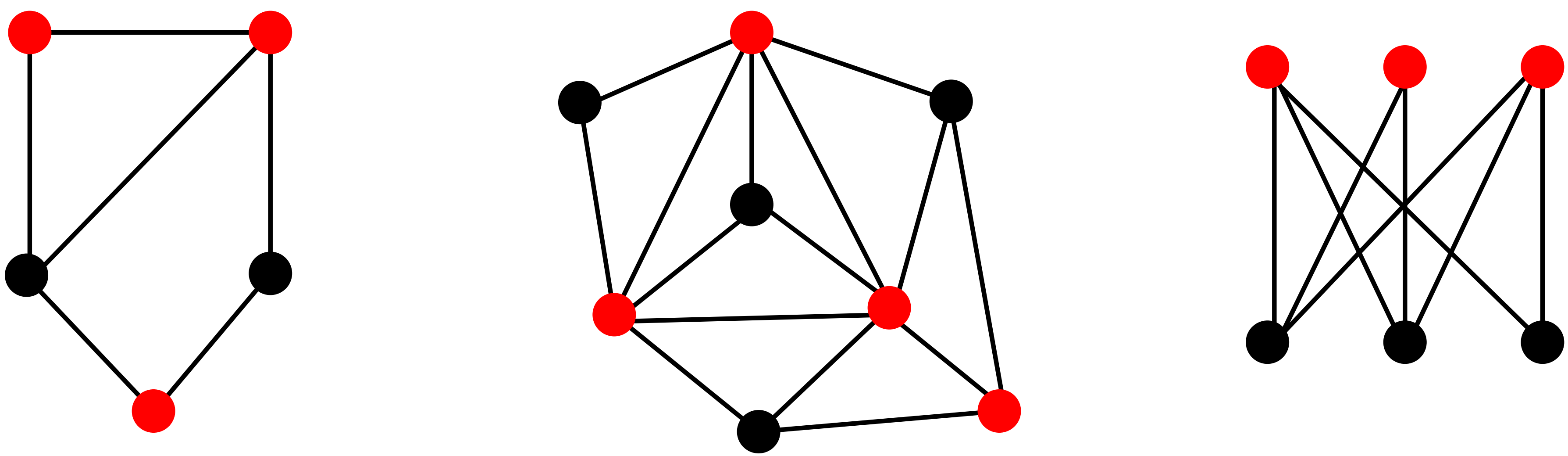


cobertura com k vértices $=$ toda aresta tem uma ponta em um dos k vértices

Cobertura por vértices

COB-VERT $= \{\langle G, k\rangle : G$ tem uma cobertura com $\leq k$ vértices$\}$

Exemplos:



cobertura com k vértices $=$ toda aresta tem uma ponta em um dos k vértices

3SAT$\leq_P$COB-VERT

Descreveremos uma redução polinomial f que recebe um fórmula booleana ϕ com v variáveis e c cláusulas e exatamente 3 literais por cláusula e devolve um cadeia $\langle G, k\rangle$ onde G é um grafo e $k = v + 2c$ são tais que

ϕ é satisfatível $\Leftrightarrow$ G possui uma cobertura com $\leq k$.

Para cada variável x em ϕ temos em G um vértice x e outro $\overline{x}$ ligados por uma aresta.

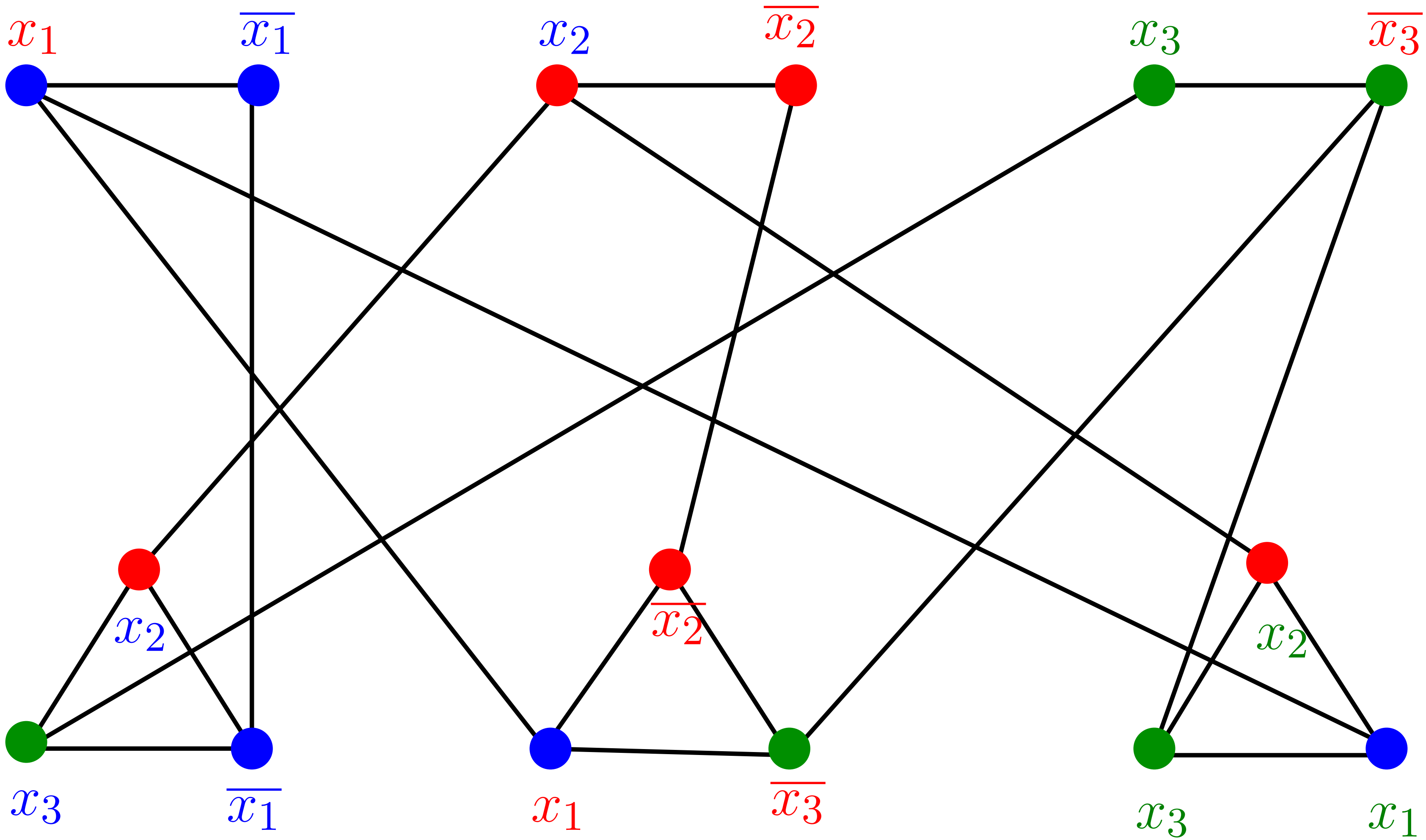
Para cada cláusula $(l_1 \vee l_2 \vee l_3)$ temos em G vértices correspondente a cada literal da cláusula ligados entre si.

Há ainda uma aresta entre cada vértice correspondente a um literal l_i e o vértice corresponde a uma variável que tem o mesmo rótulo do literal.

Desta forma G tem $2v + 3c$ vértices.

3SAT$\leq_P$COB-VERT

$$(x_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3) \wedge (\overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_3)$$



3SAT$\leq_P$COB-VERT

ϕ satisfatível $\Rightarrow$ existe cobertura com $v + 2c$ vértices

Prova: Escolha v vértices das variáveis ou negação de variáveis que correspondem a literais verdadeiros e coloque na (candidata) a cobertura.

Para cada cláusula selecione um literal vérdadeiro e coloque os outros 2 vértices na candicata a cobertura.

Verifique que candidata é uma cobertura.

3SAT$\leq_P$COB-VERT

Existe cobertura com $v + 2c$ vértices $\Rightarrow \phi$ satisfatível

Prova: A cobertura de vértices precisa conter pelo menos um vértice da engrenagem correspondente a cada variável.

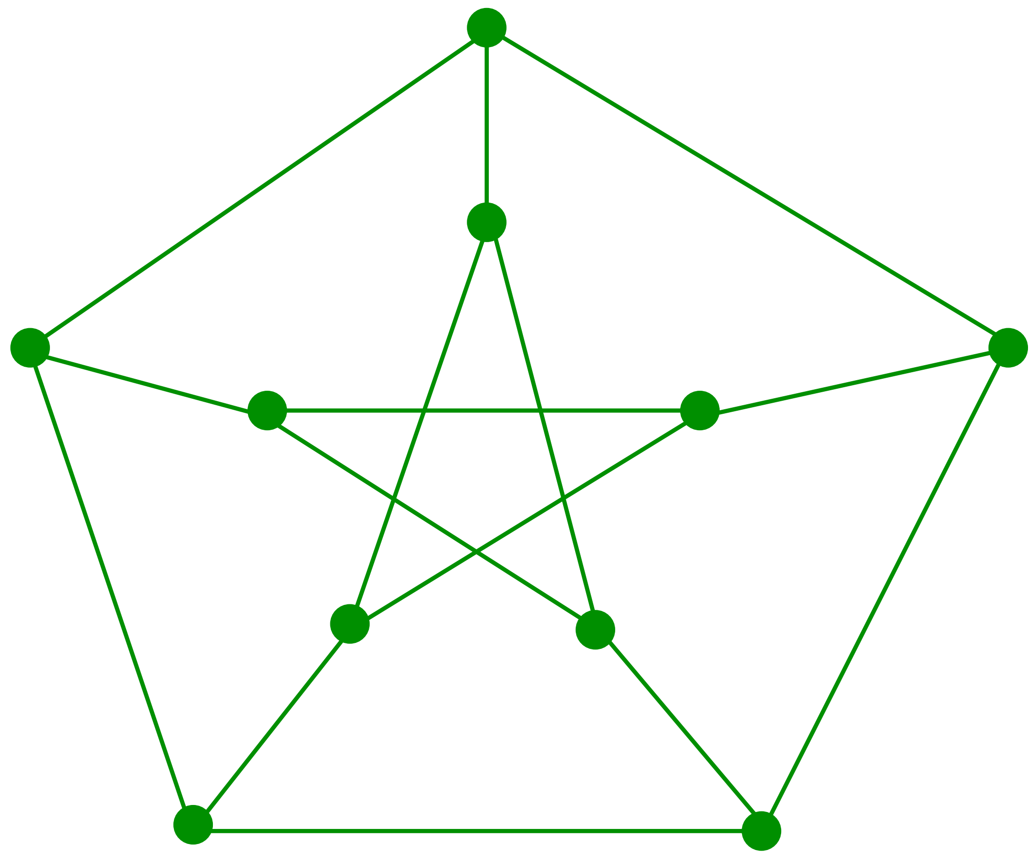
A cobertura de vértices precisa conter pelo menos dois vértice da engrenagem correspondente a cada cláusula.

Tome a atribuição de forma a tornar verdadeira os literais correspondente a vértices da cobertura que estão na engrenagem das variáveis. ■

Caminhos hamiltonianos

Problema: um dado grafo possui um caminho hamiltoniano?

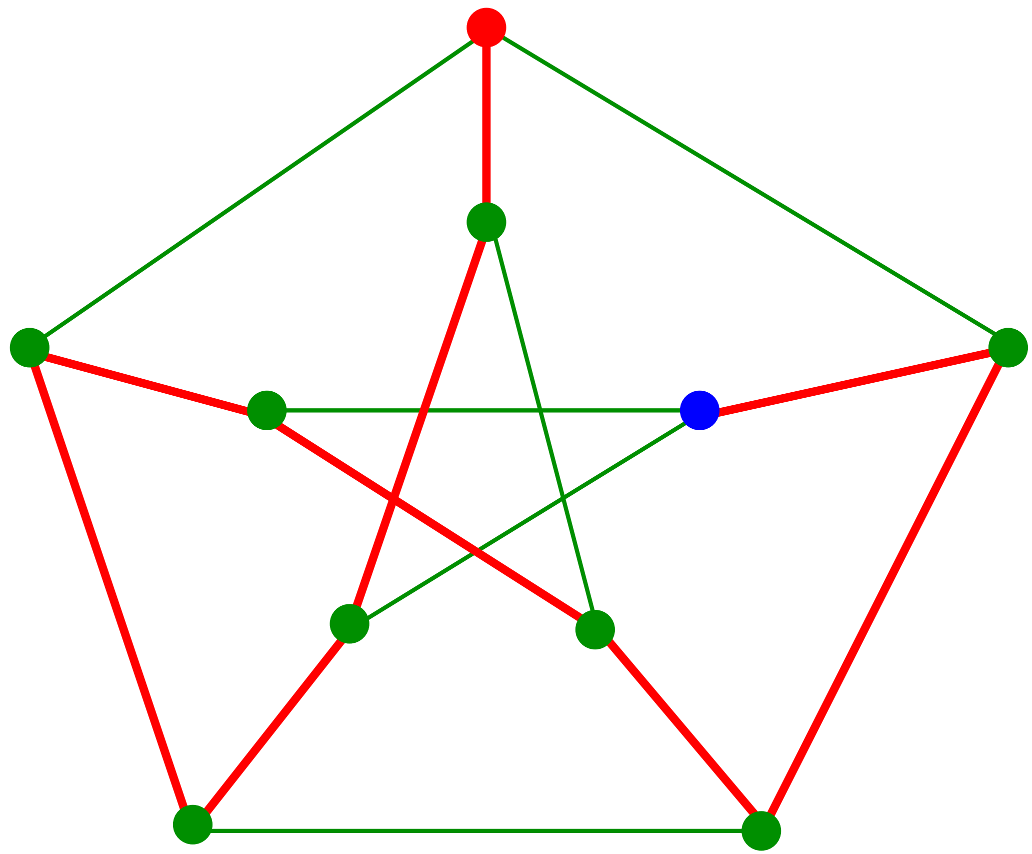
G



Caminhos hamiltonianos

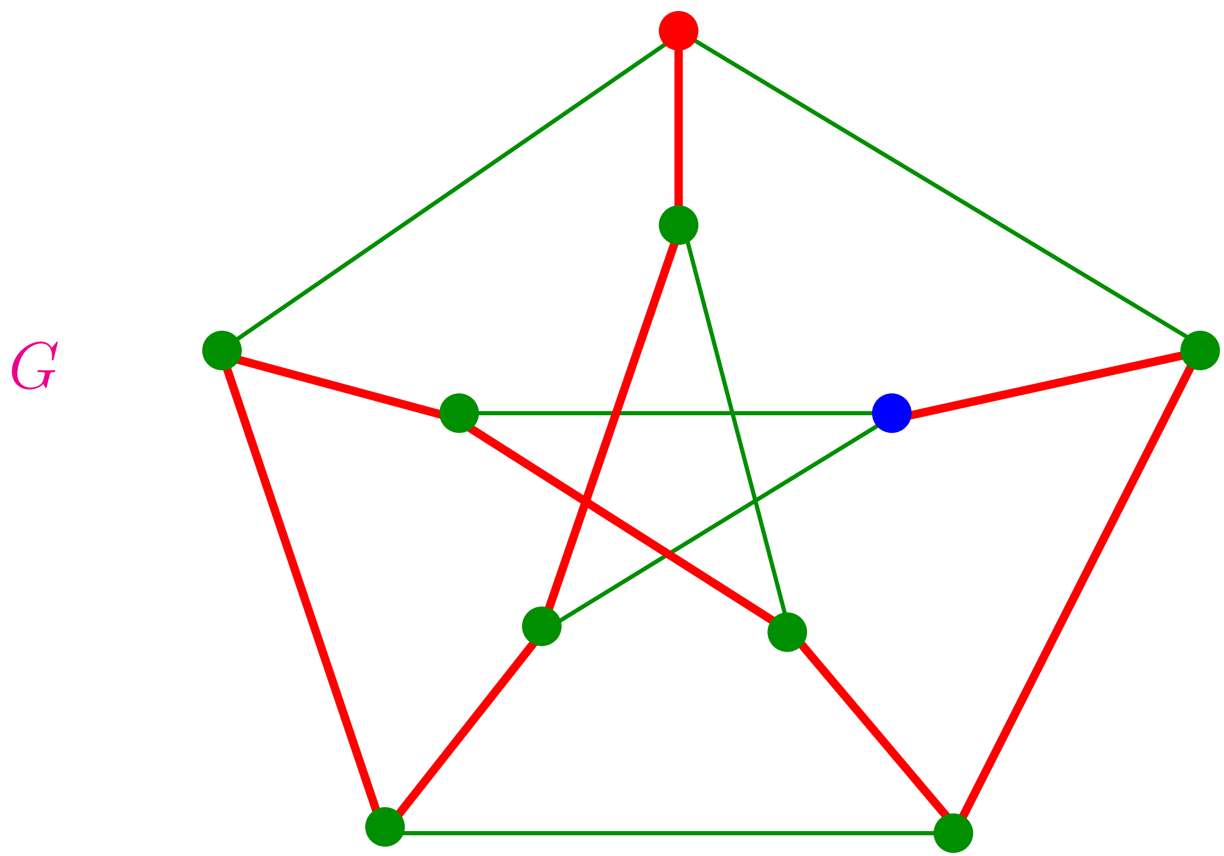
Problema: um dado grafo possui um caminho hamiltoniano?

G



Caminhos hamiltonianos

CAMHAM2 $= \{\langle G \rangle : G$ é um grafo não orientado que possui um caminho hamiltoniano$\}$



CAMHAM2 $\leq_P$ CSAT

Descreveremos um algoritmo polinomial f que recebe um grafo G e devolve uma fórmula booleana $\phi(G)$ tais que

$$G \text{ tem caminho hamiltoniano} \Leftrightarrow \phi(G) \text{ é satisfatível.}$$

Suponha que G tem vértices $1, \ldots, n$.

$\phi(G)$ tem n^2 variáveis $x_{i,j}$, $1 \leq i, j \leq n$.

Interpretação: $x_{i,j} = \text{VERDADE} \Leftrightarrow$ vértice j é o i-ésimo vértice do caminho.

CAMHAM2$\leq_P$CSAT

Cláusulas de $\phi(G)$:

- "vértice j faz parte do caminho:

$$(x_{1,j} \vee x_{2,j} \vee \cdots \vee x_{n,j})$$

para cada j (n cláusulas).

- "vértice j não está em duas posições do caminho:

$$(\overline{x}_{i,j} \vee \overline{x}_{k,j})$$

para cada j e $i \neq k$ ($\mathrm{O}(n^3)$ cláusulas).

- "algum vértice é o i-ésimo do caminho":

$$(x_{i,1} \vee x_{i,2} \vee \cdots \vee x_{i,n})$$

para cada i (n cláusulas).

CAMHAM2$\leq_P$CSAT

Mais cláusulas de $\phi(G)$:

- "dois vértices não podem ser o i-ésimo":

  $$(\overline{x}_{i,j} \vee \overline{x}_{i,k})$$

  para cada i e $j \neq k$ ($\mathrm{O}(n^3)$ cláusulas). Estas cláusulas são supérfluas, são implicadas pelas anteriores.

- "se ij não é aresta, j não pode seguir i no caminho":

  $$(\overline{x}_{k,i} \vee \overline{x}_{k+1,j})$$

  para cada ij que não é aresta ($\mathrm{O}(n^3)$ cláusulas).

A fórmula $\phi(G)$ tem $\mathrm{O}(n^3)$ cláusulas e cada cláusula tem $\leq n$ literais. Logo, $\phi(G)$ tem $\mathrm{O}(n^4)$ literais.
Não é difícil construir a redução polinomial f.

CAMHAM2$\leq_P$CSAT

$\phi(G)$ satisfatível $\Rightarrow$ G tem caminho hamiltoniano.

Prova: Seja $t : \{\text{variáveis}\} \rightarrow \{$VERDADE, FALSO$\}$ tal que $t(\phi(G)) =$ VERDADE.

Para cada i existe um único j tal que $t(x_{i,j}) =$ VERDADE.
Para cada j existe um único i tal que $t(x_{i,j}) =$ VERDADE.
Logo, t é a codificadação de uma permutação

$$\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n)$$

dos vértices de G, onde

$$\pi(i) = j \Leftrightarrow t(x_{i,j}) = \text{VERDADE}.$$

Para cada k, $(\pi(k), \pi(k+1))$ é uma aresta de G.

Logo, $(\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n))$ é um caminho hamiltoniano.

CAMHAM2$\leq_P$CSAT

G tem caminho hamiltoniano $\Rightarrow \phi(G)$ satisfatível.

Suponha que $(\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n))$ é um caminho hamiltoniano, onde π é uma pernutação dos vértices de G. Então

$t(x_{i,j}) =$ VERDADE se $\pi(i) = j$ e

$t(x_{i,j}) =$ FALSO se $\pi(i) \neq j$,

é uma atribuição de valores que satisfaz todas as cláusulas de $\phi(G)$.