Melhores momentos

AULA PASSADA

Reduções polinomiais

Teorema. SAT$\leq_P$CSAT .

Teorema. 3SAT$\leq_P$CLIQUE .

Reduções polinomiais

Teorema. 3SAT$\leq_P$COB-VERT .

Teorema. CAMHAM2$\leq_P$CSAT .

AULA 11

NP-completude

MS 7.4

NP-completude

Um linguagem B é NP-completa se satisfaz:

1. B está em NP; e
2. para cada linguagem A em NP, $A \leq_P B$.

Teorema. Se B é NP-completa e B está em P, então P $=$ NP.

Prova: Segue direto da definição de NP-completude e redução polinomial. ∎

Teorema. Se B é NP-completa e $B \leq_P C$ para alguma linguagem C em NP, então C é NP-completa.

Prova: Sabemos que $C \in$ NP (condição 1 da definição). Seja A uma linguagem em NP. Então $A \leq_P B$ pois B é NP-completa.

Como $B \leq_P C$, então $A \leq_P C$:

$$w \in A \Leftrightarrow f(w) \in B \Leftrightarrow g(f(w)) \in C$$

sendo f a redução polinomial de A para B e g a redução polinomial de B para C.

Segue que C é NP-completa. ∎

Teorema de Cook-Levin

Teorema de S. Cook e L.A. Levin. SAT é NP-completa.

Corolário. SAT $\in$ P $\Leftrightarrow$ P $=$ NP.

Consequências

Teorema. CSAT é NP-completa.

Prova: Obviamente CSAT está em NP e como já vimos SAT$\leq_P$CSAT. Logo, CSAT é NP-completa.

∎

Teorema. 3SAT é NP-completa.

Prova: Obviamente 3SAT está em NP e como já vimos CSAT$\leq_P$3SAT. Logo, 3SAT é NP-completa.

∎

Consequências

Teorema. CLIQUE é NP-completa.

Prova: Obviamente CLIQUE está em NP e como já vimos 3SAT$\leq_P$CLIQUE. Logo, CLIQUE é NP-completa.

■

Teorema. COB-VERT é NP-completa.

Prova: Obviamente COB-VERT está em NP e como já vimos 3SAT$\leq_P$COB-VERT. Logo, COB-VERT é NP-completa.

Teorema de Cook-Levin

MS 7.4

Teorema de Cook-Levin

Teorema de S. Cook e L.A. Levin. SAT é NP-completa.

Prova: Primeiro, note que SAT $\in$ NP.
Basta uma MT não-derminística chutar uma atribuição de valores e verificar se a mesma torna a fórmula satisfatível.

Seja L uma linguagem qualquer em NP.

Mostraremos que $L \leq_P$ SAT.

$L \leq_P$ SAT

Seja N uma MT não determinística que decide L.

Suponha que para toda cadeia de entrada w de comprimento n, N realiza não mais do $t(n)$ passos, onde $t(n) = \mathrm{O}(n^k)$ para alguma constante k.

Vamos mostrar que, dada uma cadeia w podemos construir em tempo polinomial uma fórmula $\phi = f(w)$ tal que

$$w \in L \Leftrightarrow \phi \in \text{SAT} \; .$$

A fórmula ϕ codificará a computação de N com entrada w.

Tableau para N com entrada w

1	$\#$	q_0	w_1	w_2	w_3	$\dots$	w_n	$\sqcup$	$\sqcup$	$\sqcup$	$\sqcup$	$\sqcup$	$\#$
2	$\#$	w_1'	q_1	w_2	w_3	$\dots$	w_n	$\sqcup$	$\sqcup$	$\sqcup$	$\sqcup$	$\sqcup$	$\#$
3	$\#$	w_1'	w_2	q_1	w_3	$\dots$	w_n	$\sqcup$	$\sqcup$	$\sqcup$	$\sqcup$	$\sqcup$	$\#$
3	$\#$	w_1'	w_2	w_3	q_2	$\dots$	w_n	$\sqcup$	$\sqcup$	$\sqcup$	$\sqcup$	$\sqcup$	$\#$
4	$\#$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\sqcup$	$\sqcup$	$\#$
5	$\#$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\sqcup$	$\sqcup$	$\#$
$\vdots$	$\#$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\#$
k	$\#$	γ_1	γ_2	γ_3	γ_k	$\dots$	γ_n	$\dots$	q'	γ_j	$\dots$	$\dots$	$\#$
$\vdots$	$\#$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\#$
$t(n)+1$	$\#$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\#$
	1	2	3	4	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$t(n)+3$

Variáveis de ϕ

Seja $C = Q \cup \Gamma \cup \{\#\}$.

$|C|$ só depende de N, não depende de w e portanto é um número fixo.

ϕ tem $(t(n)+1)(t(n)+3)|C| = \mathrm{O}(t^2(n)) = \mathrm{O}(n^{2k})$ variáveis $x_{i,j,s}$ com

$$1 \leq i \leq t(n) + 1$$

$$1 \leq j \leq t(n) + 3$$

$$s \in C$$

Interpretação: $x_{i,j,s} =$ VERDADE $\Leftrightarrow$ s está na posição i, j do tableau

Componentes de ϕ

A fórmula ϕ será composta de 4 subfórmulas.

$$\phi = \phi_{\text{célula}} \wedge \phi_{\text{início}} \wedge \phi_{\text{move}} \wedge \phi_{\text{aceita}}$$

$\phi_{\text{célula}}$ = "para cada $i, j, x_{i,j,s}$ é verdadeiro para exatamente um s"

$\phi_{\text{início}}$ = "a primeira linha do tableau representa a configuração inicial"

ϕ_{move} = "cada configuração representada no tableau segue de forma válida da anterior"

ϕ_{aceita} = "o estado q_{aceita} aparece em alguma configuração do tableau"

Descrição de $\phi_{\text{célula}}$

"pelo menos um s está na posição i, j:

$$\bigvee_{s \in C} x_{i,j,s}$$

"no máximo um s está na posição i, j:

$$\bigwedge_{s,t \in C, s \neq t} (\overline{x}_{i,j,s} \vee \overline{x}_{i,j,t})$$

$$\phi_{\text{célula}}(i,j) = \Big(\bigvee_{s \in C} x_{i,j,s}\Big) \bigwedge \Big(\bigwedge_{s,t \in C, s \neq t} (\overline{x}_{i,j,s} \vee \overline{x}_{i,j,t})\Big)$$

$\phi_{\text{célula}}(i,j)$ tem $|C| + |C|^2$ literais $= \mathrm{O}(1)$ literais

Descrição de $\phi_{\textbf{célula}}$

$$\phi_{\text{célula}} = \bigwedge_{i,j} \phi_{\text{célula}}(i,j)$$

onde

$$1 \leq i \leq t(n) + 1$$

$$1 \leq j \leq t(n) + 3$$

O número de literais de $\phi_{\text{célula}}$ é

$$(t(n)+1)(t(n)+3) \times \mathrm{O}(1) = \mathrm{O}(t^2(n)) = \mathrm{O}(n^{2k})$$

$\phi_{\text{célula}}$ pode ser gerada em tempo polinomial

Descrição de $\phi_{\text{início}}$

$\phi_{\text{início}}$ depende de w

$$
\begin{aligned}
\phi_{\text{início}} = & x_{1,1,\#} \wedge \\
& \wedge x_{1,2,q_0} \wedge x_{1,3,w_1} \wedge x_{1,4,w_2} \cdots \wedge x_{1,n+2,w_n} \wedge \\
& \wedge x_{1,n+3,\sqcup} \wedge \cdots x_{1,n^k+2,\sqcup} \wedge \\
& \wedge x_{1,n^k+2,\#}
\end{aligned}
$$

$\phi_{\text{início}}$ tem $\mathrm{O}(n^k)$ literais

$\phi_{\text{início}}$ pode ser gerada em tempo polinomial

Descrição de $\phi_{\textbf{aceita}}$

$$\phi_{\text{aceita}} = \bigvee x_{i,j,q_{\text{aceita}}}$$

onde

$$1 < i < t(n) + 1$$

$$1 < j < t(n) + 3$$

ϕ_{aceita} tem $\mathrm{O}(t(n)^2) = \mathrm{O}(n^{2n})$ literais

ϕ_{aceita} pode ser gerada em tempo polinomial

Descrição de $\phi_{\mathbf{move}}$

Suponha que

$$\delta(q_1, a) = \{(q_1, b, R)\}$$
$$\delta(q_1, b) = \{(q_2, c, L), (q_2, a, R)\}$$

Exemplo: janelas legais

a	q_1	b
q_2	a	c

a	q_1	b
a	a	q_1

a	a	q_1
a	a	b

#	b	a
#	b	a

a	b	a
a	b	q_2

b	b	b
c	b	b

Descrição de $\phi_{\textbf{move}}$

Suponha que

$$\delta(q_1, a) = \{(q_1, b, R)\}$$

$$\delta(q_1, b) = \{(q_2, c, L), (q_2, a, R)\}$$

Exemplo: janelas ilegais

a	b	a
a	a	a

a	q_1	b
q_1	a	a

b	q_1	b
q_2	b	q_2

Descrição de $\phi_{\textbf{move}}$

Exemplo: mais janelas legais

a	q_{a}	b
a	q_{a}	b

q_{a}	a	b
q_{a}	a	b

a	b	q_{a}
a	b	q_{a}

Fato. Se todas as janelas do tableau são legais, então cada configuração leva à configuração seguinte

Descrição de $\phi_{\mathbf{move}}$

$$\phi_{\text{move}} = \bigwedge(\text{janela } (i, j) \text{ é legal})$$

onde

$$1 \le i \le t(n)$$

$$2 \le j \le t(n) + 2$$

$$(\text{janela } (i, j) \text{ é legal}) = \bigvee \big(x_{i,j-1,a_1} \wedge x_{i,j,a_2} \wedge x_{i,j+1,a_3} \wedge$$
$$x_{i+1,j-1,a_4} \wedge x_{i+1,j,a_5} \wedge x_{i+1,j+1,a_6}\big)$$

onde $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ variam sobre toda janela legal

a_1	a_2	a_3
a_4	a_5	a_6

Descrição de $\phi_{\mathbf{move}}$

Número de literais de ϕ_{move} é $\mathrm{O}(t^2(n)) = \mathrm{O}(n^{2k})$

ϕ_{move} pode ser gerada em tempo polinomial

■