Melhores momentos

AULA PASSADA

NP-completude

Um linguagem B é NP-completa se satisfaz:

1. B está em NP; e
2. para cada linguagem A em NP, $A \leq_P B$.

Teorema. Se B é NP-completa e B está em P, então P $=$ NP.

Teorema. Se $A \leq_P B$ e B está em P, então A está em P.

Teorema. Se B é NP-completa e $B \leq_P C$ para alguma linguagem C em NP, então C é NP-completa.

Teorema de Cook-Levin

Teorema de S. Cook e L.A. Levin. SAT é NP-completa.

Prova: Primeiro, note que SAT $\in$ NP.
Basta uma MT não-derminística chutar uma atribuição de valores e verificar se a mesma torna a fórmula satisfatível.

Seja L uma linguagem qualquer em NP.

Mostraremos que $L \leq_P$ SAT.

Tableau para N com entrada w

1	$\#$	q_0	w_1	w_2	w_3	$\ldots$	w_n	$\sqcup$	$\sqcup$	$\sqcup$	$\sqcup$	$\sqcup$	$\#$
2	$\#$	w'_1	q_1	w_2	w_3	$\ldots$	w_n	$\sqcup$	$\sqcup$	$\sqcup$	$\sqcup$	$\sqcup$	$\#$
3	$\#$	w'_1	w_2	q_1	w_3	$\ldots$	w_n	$\sqcup$	$\sqcup$	$\sqcup$	$\sqcup$	$\sqcup$	$\#$
3	$\#$	w'_1	w_2	w_3	q_2	$\ldots$	w_n	$\sqcup$	$\sqcup$	$\sqcup$	$\sqcup$	$\sqcup$	$\#$
4	$\#$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\sqcup$	$\sqcup$	$\#$
5	$\#$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\sqcup$	$\sqcup$	$\#$
$\vdots$	$\#$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\#$
k	$\#$	γ_1	γ_2	γ_3	γ_k	$\ldots$	γ_n	$\ldots$	q'	γ_j	$\ldots$	$\ldots$	$\#$
$\vdots$	$\#$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\#$
$t(n)+1$	$\#$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\#$
	1	2	3	4	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$t(n)+3$

Variáveis de ϕ

Seja $C = Q \cup \Gamma \cup \{\#\}$.

$|C|$ só depende de N, não depende de w e portanto é um número fixo.

ϕ tem $(t(n)+1)(t(n)+3)|C| = \mathrm{O}(t^2(n)) = \mathrm{O}(n^{2k})$ variáveis $x_{i,j,s}$ com

$$1 \le i \le t(n)+1$$

$$1 \le j \le t(n)+3$$

$$s \in C$$

Interpretação: $x_{i,j,s} =$ VERDADE $\Leftrightarrow$ s está na posição i, j do tableau

Componentes de ϕ

A fórmula ϕ será composta de 4 subfórmulas.

$$\phi = \phi_{\text{célula}} \wedge \phi_{\text{início}} \wedge \phi_{\text{move}} \wedge \phi_{\text{aceita}}$$

$\phi_{\text{célula}} =$ "para cada $i, j, x_{i,j,s}$ é verdadeiro para exatamente um s"

$\phi_{\text{início}} =$ "a primeira linha do tableau representa a configuração inicial"

$\phi_{\text{move}} =$ "cada configuração representada no tableau segue de forma válida da anterior"

$\phi_{\text{aceita}} =$ "o estado q_{aceita} aparece em alguma configuração do tableau"

Componentes de ϕ

$$\phi_{\text{célula}}(i,j) = \Big(\bigvee_{s\in C} x_{i,j,s}\Big) \bigwedge \Big(\bigwedge_{s,t\in C,s\neq t} (\overline{x}_{i,j,s} \vee \overline{x}_{i,j,t})\Big)$$

$$\phi_{\text{célula}} = \bigwedge_{i,j} \phi_{\text{célula}}(i,j)$$

$$\begin{aligned}\phi_{\text{início}} = {} & x_{1,1,\#} \wedge \\ & \wedge\, x_{1,2,q_0} \wedge x_{1,3,w_1} \wedge x_{1,4,w_2} \cdots \wedge x_{1,n+2,w_n} \wedge \\ & \wedge\, x_{1,n+3,\sqcup} \wedge \cdots x_{1,n^k+2,\sqcup} \wedge \\ & \wedge\, x_{1,n^k+2,\#}\end{aligned}$$

$$\phi_{\text{aceita}} = \bigvee x_{i,j,q_{\text{aceita}}}$$

Janelas legais

Suponha que

$$\delta(q_1, a) = \{(q_1, b, R)\}$$
$$\delta(q_1, b) = \{(q_2, c, L), (q_2, a, R)\}$$

Exemplo: janelas legais

a	q_1	b
q_2	a	c

a	q_1	b
a	a	q_2

a	a	q_1
a	a	b

$\#$	b	a
$\#$	b	a

a	b	a
a	b	q_2

b	b	b
c	b	b

Janelas ilegais

Suponha que

$$\delta(q_1, a) = \{(q_1, b, R)\}$$

$$\delta(q_1, b) = \{(q_2, c, L), (q_2, a, R)\}$$

Exemplo: janelas ilegais

a	b	a
a	a	a

a	q_1	b
q_1	a	a

b	q_1	b
q_2	b	q_2

Mais janelas legais

Exemplo: mais janelas legais

a	q_a	b
a	q_a	b

q_a	a	b
q_a	a	b

a	b	q_a
a	b	q_a

Descrição de $\phi_{\textbf{move}}$

$$\phi_{\text{move}} = \bigwedge(\text{janela } (i, j) \text{ é legal})$$

onde

$$1 \leq i \leq t(n)$$
$$2 \leq j \leq t(n) + 2$$

$$(\text{janela } (i, j) \text{ é legal}) = \bigvee \big(x_{i,j-1,a_1} \wedge x_{i,j,a_2} \wedge x_{i,j+1,a_3} \wedge$$
$$x_{i+1,j-1,a_4} \wedge x_{i+1,j,a_5} \wedge x_{i+1,j+1,a_6}\big)$$

onde $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ variam sobre toda janela legal

a_1	a_2	a_3
a_4	a_5	a_6

Fato. Se todas as janelas do tableau são legais, então cada configuração leva à configuração seguinte

Prova: Basta que para quais duas configurações adjacentes no tableau, digamos, configuração superior e configuração inferior, a configuração inferior segue da superior em um passo de N.

Na configuração superior, qualquer célula que não é adjacente a um símbolo de estado e que não contém $\#$ é célula central de uma janela legal. Logo, o símbolo que aparece nessa célula também deve aparecer na mesma posição da configuração inferior.

A janela contendo o símbolo de estado na célula central superior garante que as 3 posições inferiores dessa janela são atualizadas consistentemente de acordo com a função de transição. ■

AULA 12

Mais reduções Polinomiais

MS 7.4

CSAT é NP-completa

$$\text{CSAT} = \{\langle\phi\rangle : \phi \text{ é uma fórmula normal conjuntiva satisfatível}\}$$

Teorema. CSAT é NP-completa.

Prova: Vamos transforma a fórmula ϕ do teorema de Cook-Levin em uma FNC **equivalente**.

A fórmula ϕ é composta de 4 subfórmulas.

$$\phi = \phi_{\text{célula}} \wedge \phi_{\text{início}} \wedge \phi_{\text{move}} \wedge \phi_{\text{aceita}}$$

$\phi_{\text{célula}} =$ já esta na FNC

$\phi_{\text{início}} =$ já esta na FNC

$\phi_{\text{aceita}} =$ já esta na FNC

$\phi_{\text{move}} =$ é um $\bigwedge$ (janela(i, j) é legal)

Portanto, transformando (janela (i, j) é legal) em FNC estaremos transformado ϕ em FNC.

Usando a “lei distributiva” para $\lor$ e $\land$ podemos fazer essa transformação

$$p \lor (q \land r) \Leftrightarrow (p \lor q) \land (p \lor r)$$

Exemplo:

$$\begin{aligned}(x_1 \land x_2) \lor (x_3 \land x_4) &\Leftrightarrow ((x_1 \land x_2) \lor x_3) \land ((x_1 \land x_2) \lor x_4) \\ &\Leftrightarrow ((x_1 \lor x_3) \land (x_2 \lor x_3) \land (x_1 \lor x_4) \land (x_2 \lor x_4)\end{aligned}$$

Como o comprimento de (janela (i, j) é legal) depende só da MT N, o comprimento de (janela (i, j) é legal) em FNC cresce somente por um fator constante. ∎

SUBSETSUM

SUBSETSUM $= \{\langle X, t\rangle : X = \{x_1, \ldots, x_k\}$ e para algum
$Y = \{y_1, \ldots, y_e\} \subseteq \{x_1, \ldots, x_k\}$
temos que $\sum y_i = t$ $\}$

Exemplos:

- $\langle\{4, 4, 11, 16, 21, 21, 27\}, 19\rangle$ está em SUBSETSUM, pois $4 + 4 + 11 = 19$
- $\langle\{4, 4, 11, 16, 21, 21, 27\}, 46\rangle$ está em SUBSETSUM, pois $21 + 21 + 4 = 46$
- $\langle\{4, 4, 11, 16, 21, 21, 27\}, 12\rangle$ não está em SUBSETSUM

3SAT$\leq_P$SUBSETSUM

Descreveremos uma redução polinomial f que recebe um fórmula booleana ϕ com v variáveis e c cláusulas e exatamente 3 literais por cláusula e devolve um cadeia $\langle X, t\rangle$ onde X é uma coleção de $2v + c$ números inteiros, cada um com $\leq v + c$ dígitos decimais e um número inteiro $t = 111\ldots1133\ldots33$ com v 1s e c 3s tais que

$$\phi \text{ é satisfatível} \Leftrightarrow \text{Existe } Y \subseteq X \text{ com } \sum y_i = t.$$

Suponha que as variáveis de ϕ são

$$x_1, \ldots, x_v$$

e que as suas cláusulas são

$$C_1, \ldots, C_c.$$

3SAT$\leq_P$SUBSETSUM

Para cada variável x_i teremos um número decimal x_i com $v + c$ dígitos, sendo todos eles 0 ou 1, tal que

- o dígito i de x_i é 1;
- o dígito $v + k$ de x_i é 1 se x_i é um literal de C_k; e
- todos os demais dígitos são 0.

Similarmente, para cada variável x_i teremos um número decimal $\overline{x}_i$ com $v + c$ dígitos, sendo todos eles 0 ou 1, tal que

- o dígito i de $\overline{x}_i$ é 1;
- o dígito $v + k$ de $\overline{x}_i$ é 1 se $\overline{x}_i$ é um literal de C_k; e
- todos os demais dígitos são 0.

3SAT$\leq_P$SUBSETSUM

Para cada cláusula C_k teremos um número decimal c_k com $v + c$ dígitos, sendo todos eles 0 exceto o dígito da posição $v + k$ que é 1.

Defina X como sendo a seguinte a coleção com os seguinte $2v + 2c$ números

$$\{x_1, \overline{x}_1, x_2, \overline{x}_2, \ldots, x_v, \overline{x}_v, c_1, c_1, \ldots, c_c, c_c\}$$

e $t = 11 \ldots 133 \ldots 3$ com v 1s e c 3s

Verifique que ϕ é satisfatível se e somente se existe $Y \subseteq X$ tal que $\sum_{y \in Y} y = t$.

■

Exemplo

$$
\begin{array}{c|cccccc|ccccc|}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \ldots & x_v & c_1 & c_2 & c_3 & \ldots & c_c \\
\hline
x_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
\overline{x}_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\
x_2 & 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\
\overline{x}_2 & 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & & 0 & 1 & \ldots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\
\overline{x}_v & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & & 1 & 0 & \ldots & 0 \\
\hline
c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\
c_c & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\
c_c & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\
\hline
\multicolumn{1}{c}{} & 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 3 & 3 & 3 & \ldots & \multicolumn{1}{c}{3}
\end{array}
$$

Consequência

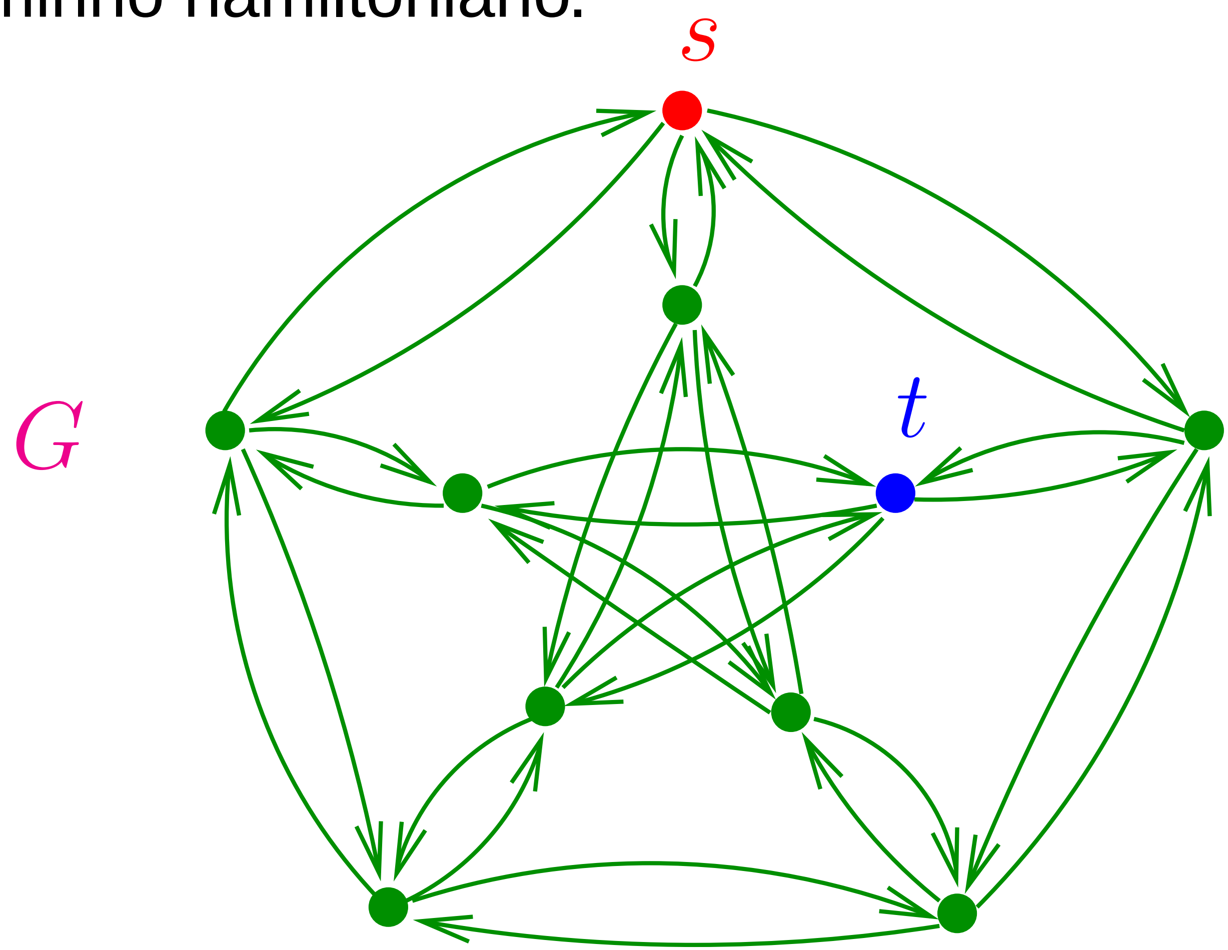
Teorema. SUBSETSUM é NP-completa.

Prova: Obviamente SUBSETSUM está em NP e como já vimos 3SAT$\leq_P$SUBSETSUM. Logo, SUBSETSUM é NP-completa.

■

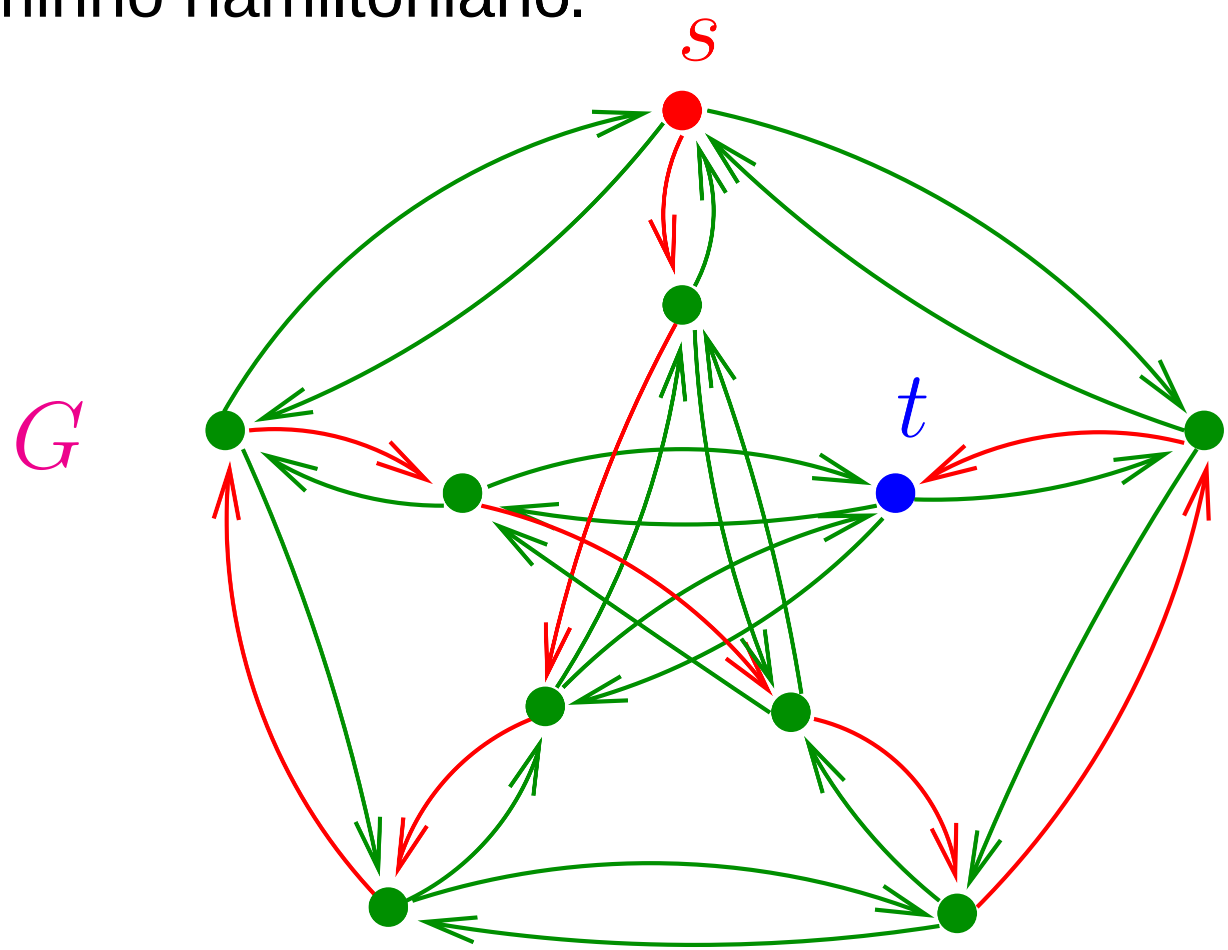
CAMHAM

Problema: Dado um grafo orientado G e nós s e t encontrar um st-caminho hamiltoniano.



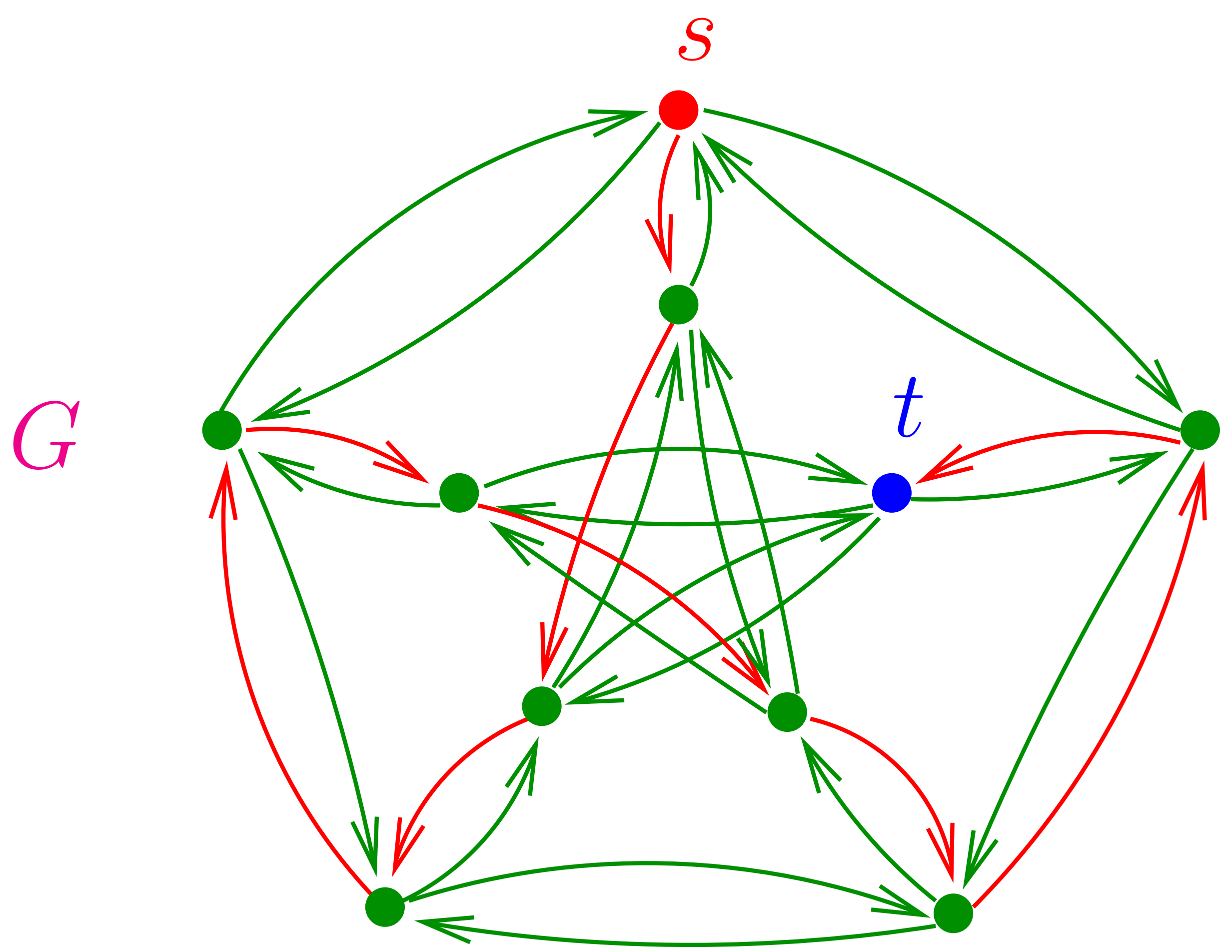
CAMHAM

Problema: Dado um grafo orientado G e nós s e t encontrar um st-caminho hamiltoniano.



CAMHAM

CAMHAM $= \{\langle G, s, t\rangle : G$ é um grafo orientado que possui um caminho hamiltoniano de s a $t\}$



3SAT$\leq_P$CAMHAM

Descreveremos uma redução polinomial f que recebe um fórmula booleana ϕ com c cláusulas e exatamente 3 literais por claúsula e devolve um cadeia $\langle G, s, t\rangle$ onde G é um grafo orientado e s e t são dois de seus vértices tais que

ϕ é satisfatível $\Leftrightarrow$ existe um caminho hamiltoniano de s a t em G.

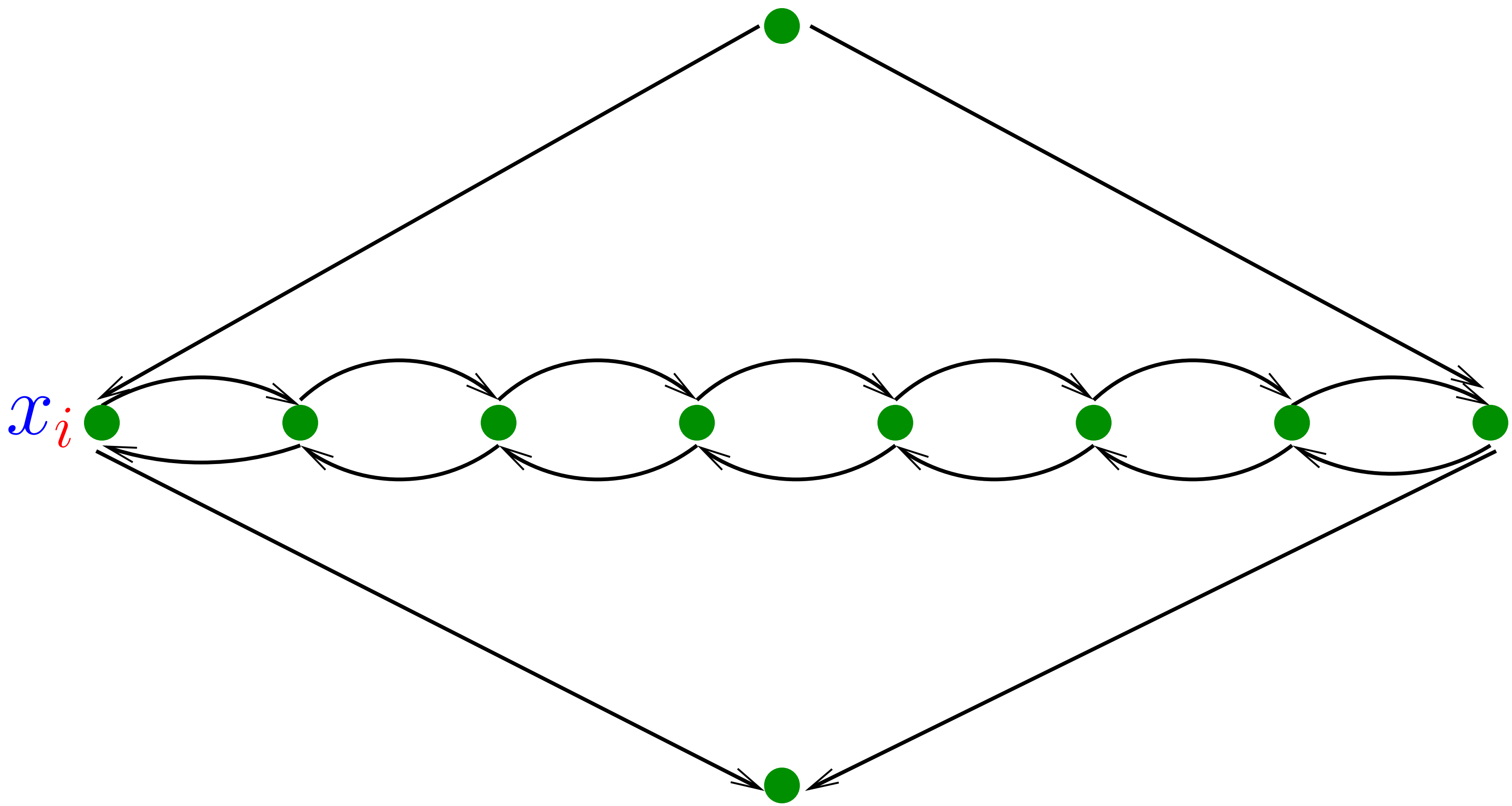
Suponha

$$\phi = (a_1 \vee b_1 \vee c_1) \wedge (a_2 \vee b_2 \vee c_2) \wedge \cdots \wedge (a_c \vee b_c \vee c_c)$$

e que as variáveis de ϕ são $x_1, \ldots, x_v$.

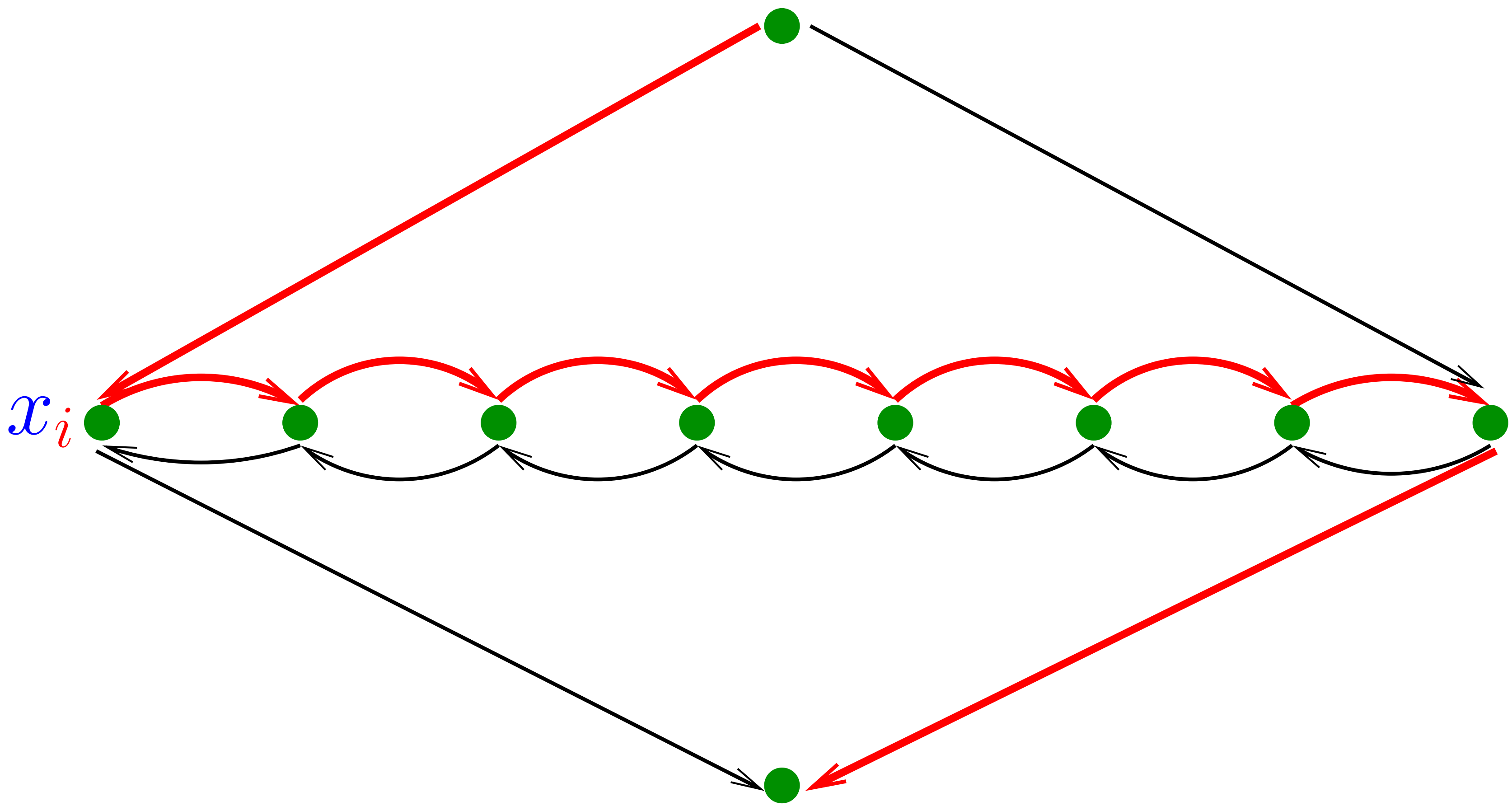
Engrenagem para variáveis

Associada a cada variável x_i teremos em G a seguinte engrenagem



Engrenagem para variáveis

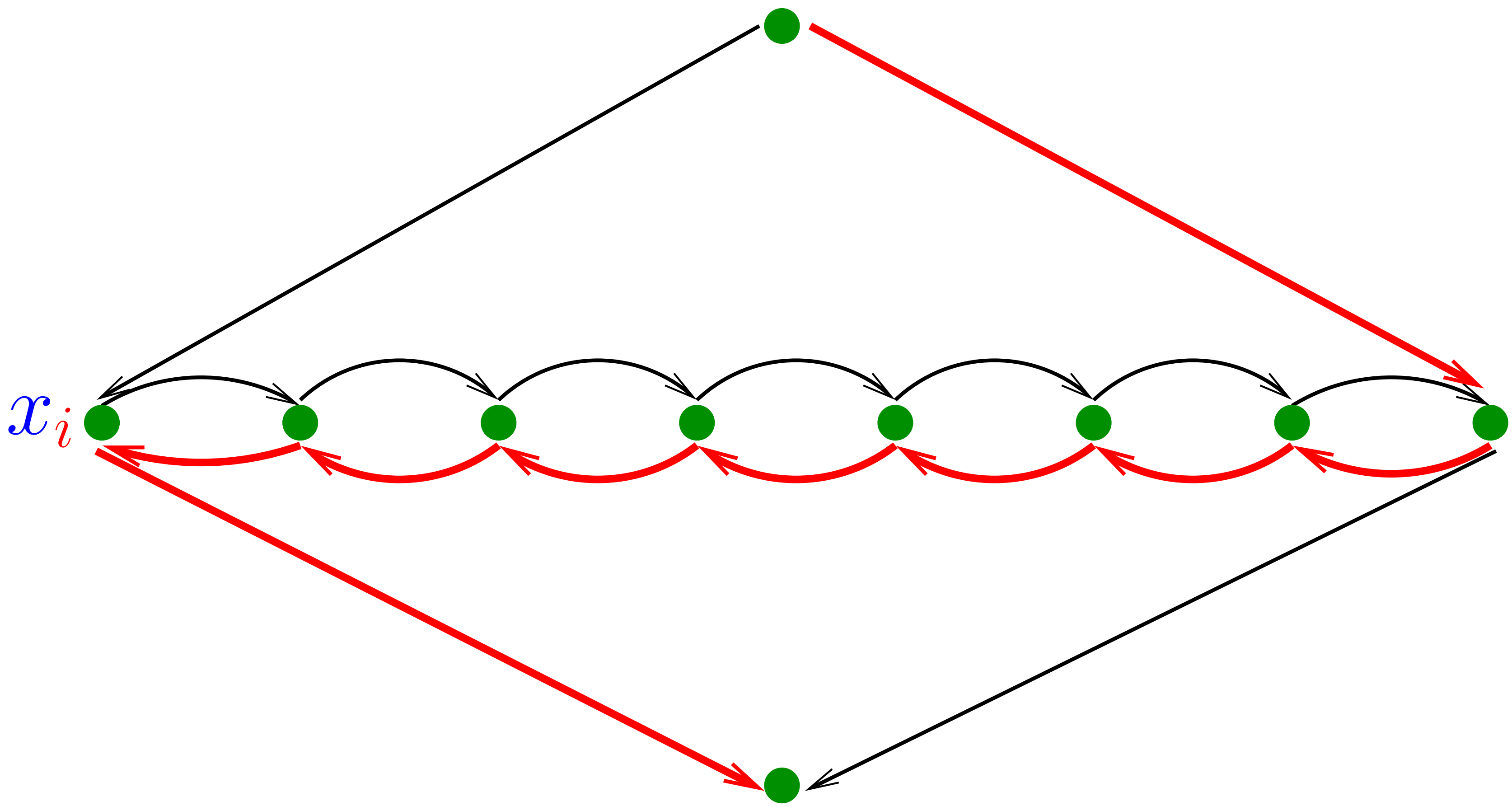
Associada a cada variável x_i teremos em G a seguinte engrenagem



verdadeiro

Engrenagem para variáveis

Associada a cada variável x_i teremos em G a seguinte engrenagem



falso

Vértices para cláusulas

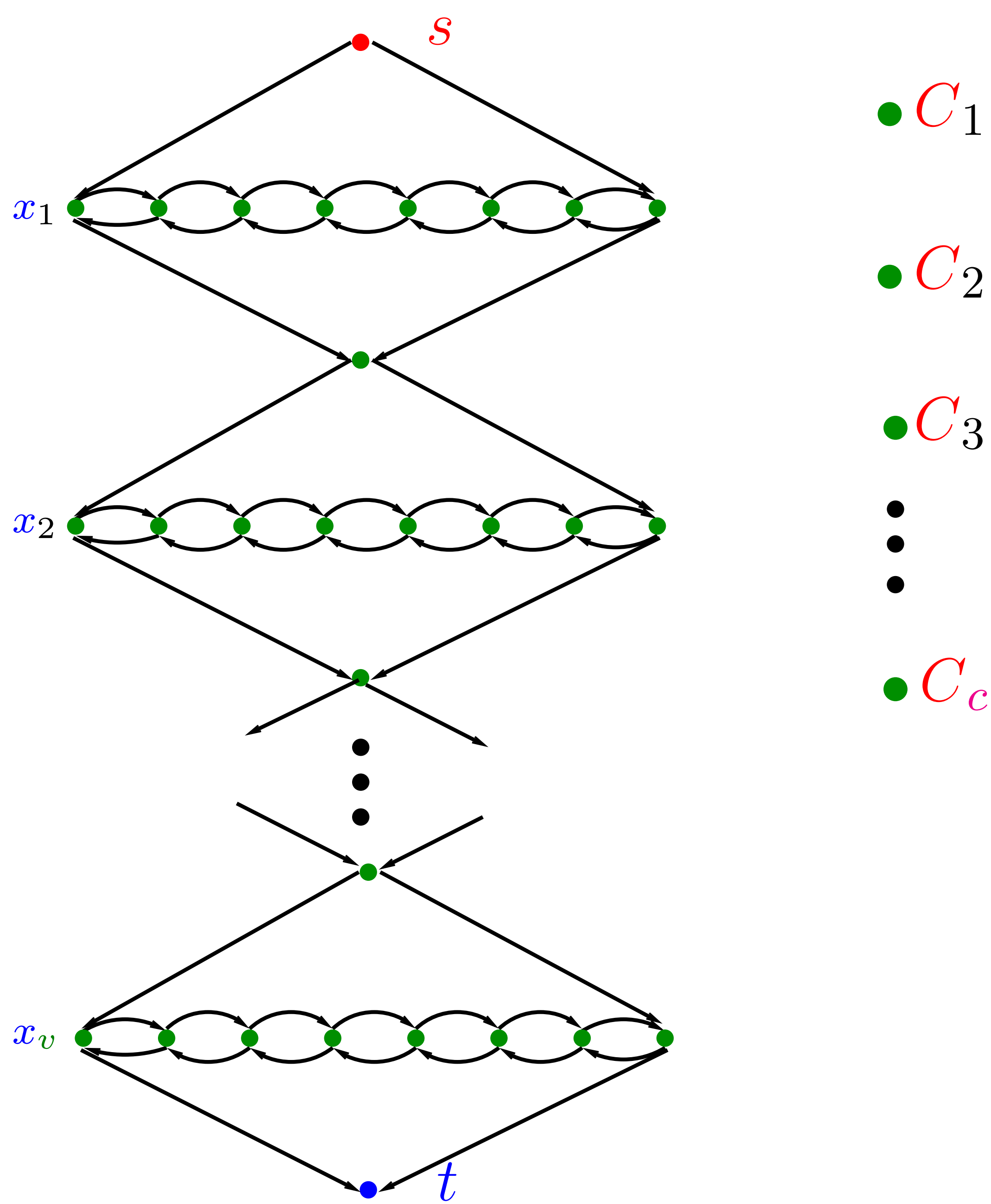
Para cada cláusula C_j o grafo terá apenas 1 nó C_j.

- C_1
- C_2
- C_3
- C_4

$\vdots$

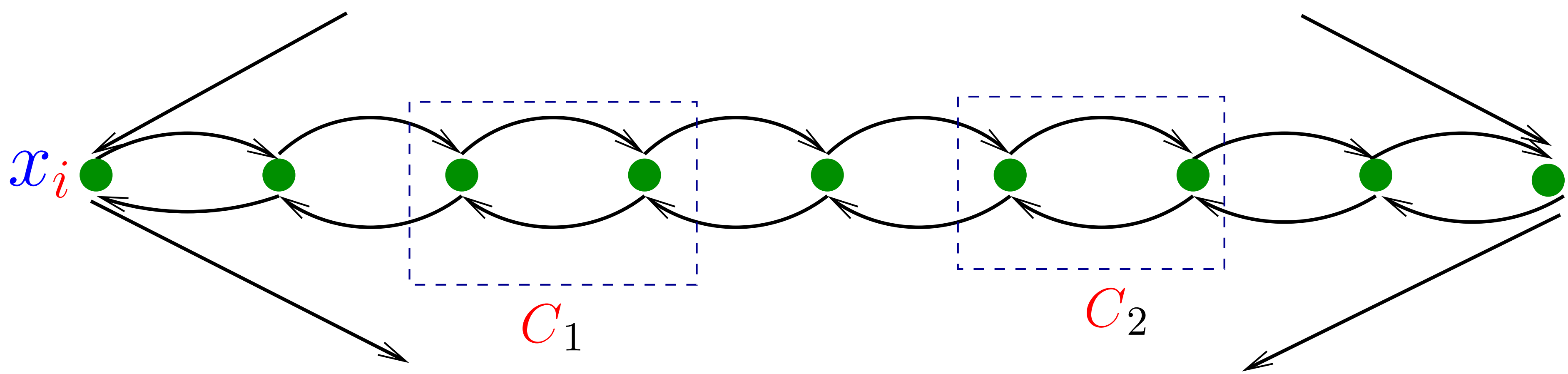
- C_c

Estrutura geral



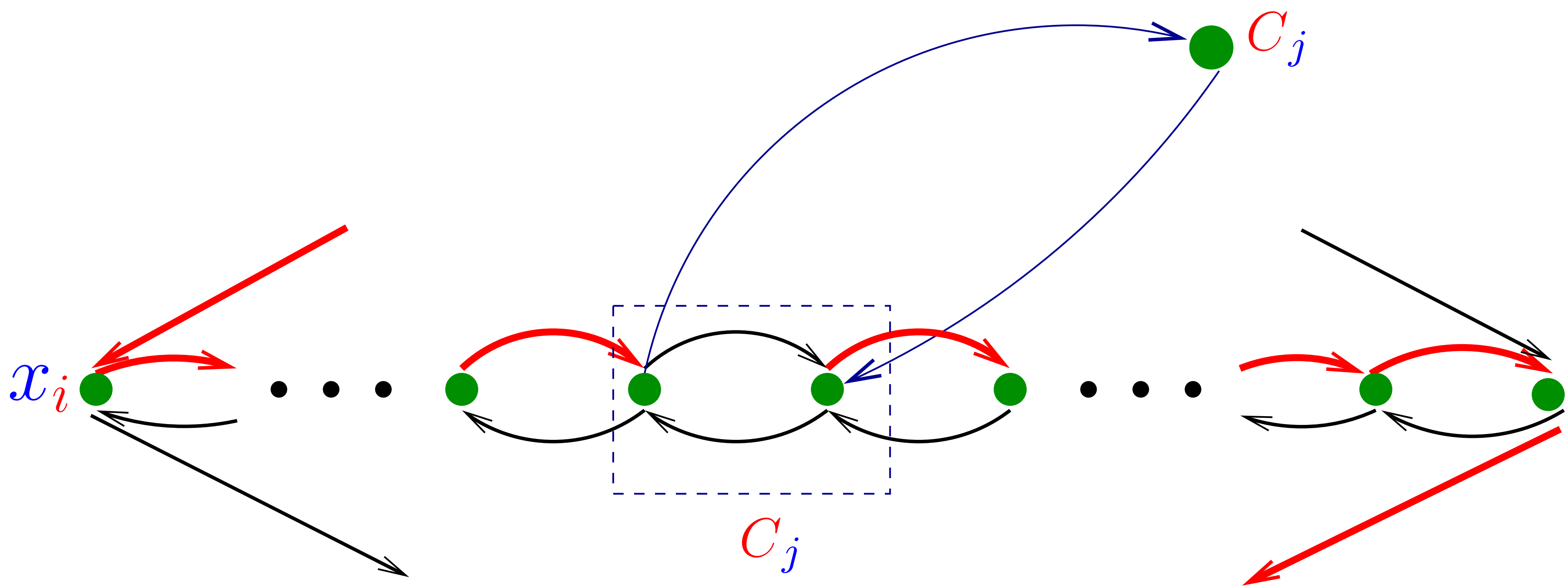
Ligando as engrenagens

Cada engrenagem associada a uma variável tem $3c + 1$ nós além dois nós na extremidade e o no fonte (superior) e do nó sorvedouro (inferior)



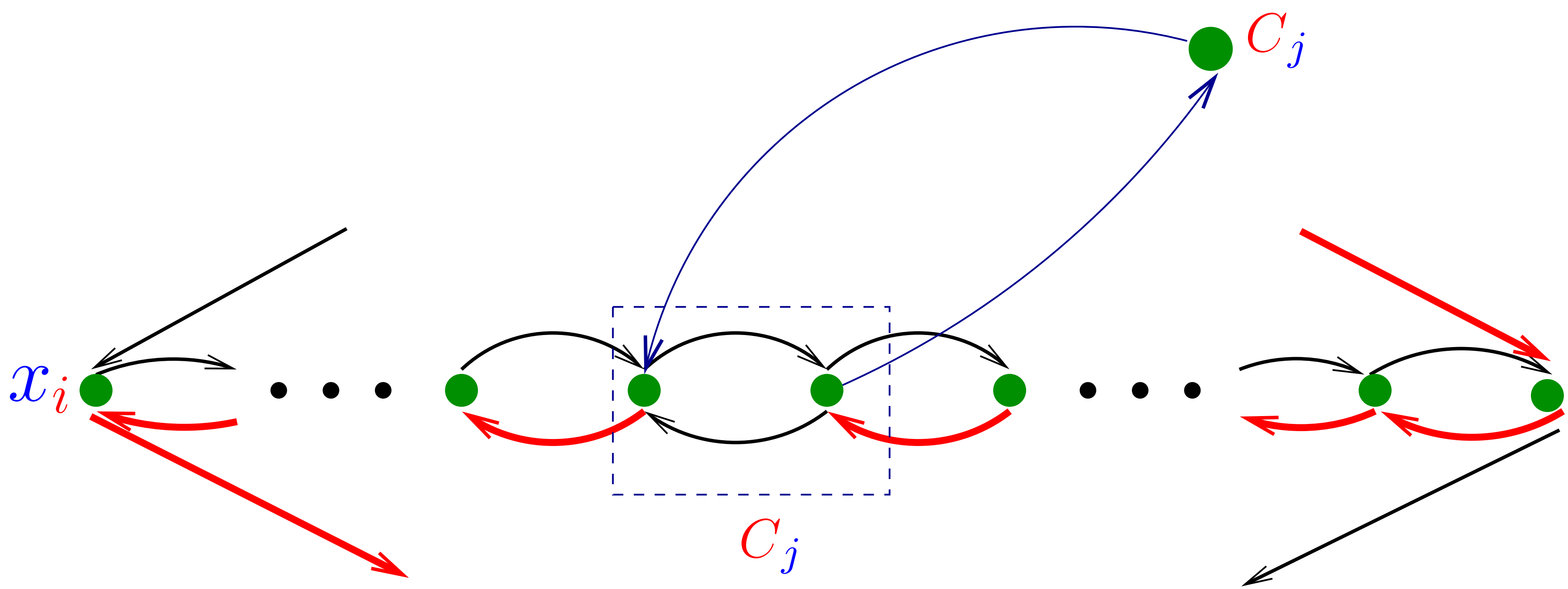
Ligando as engrenagens

Se x_i ocorre na cláusula C_j, adicionamos dois arcos como mostrado abaixo

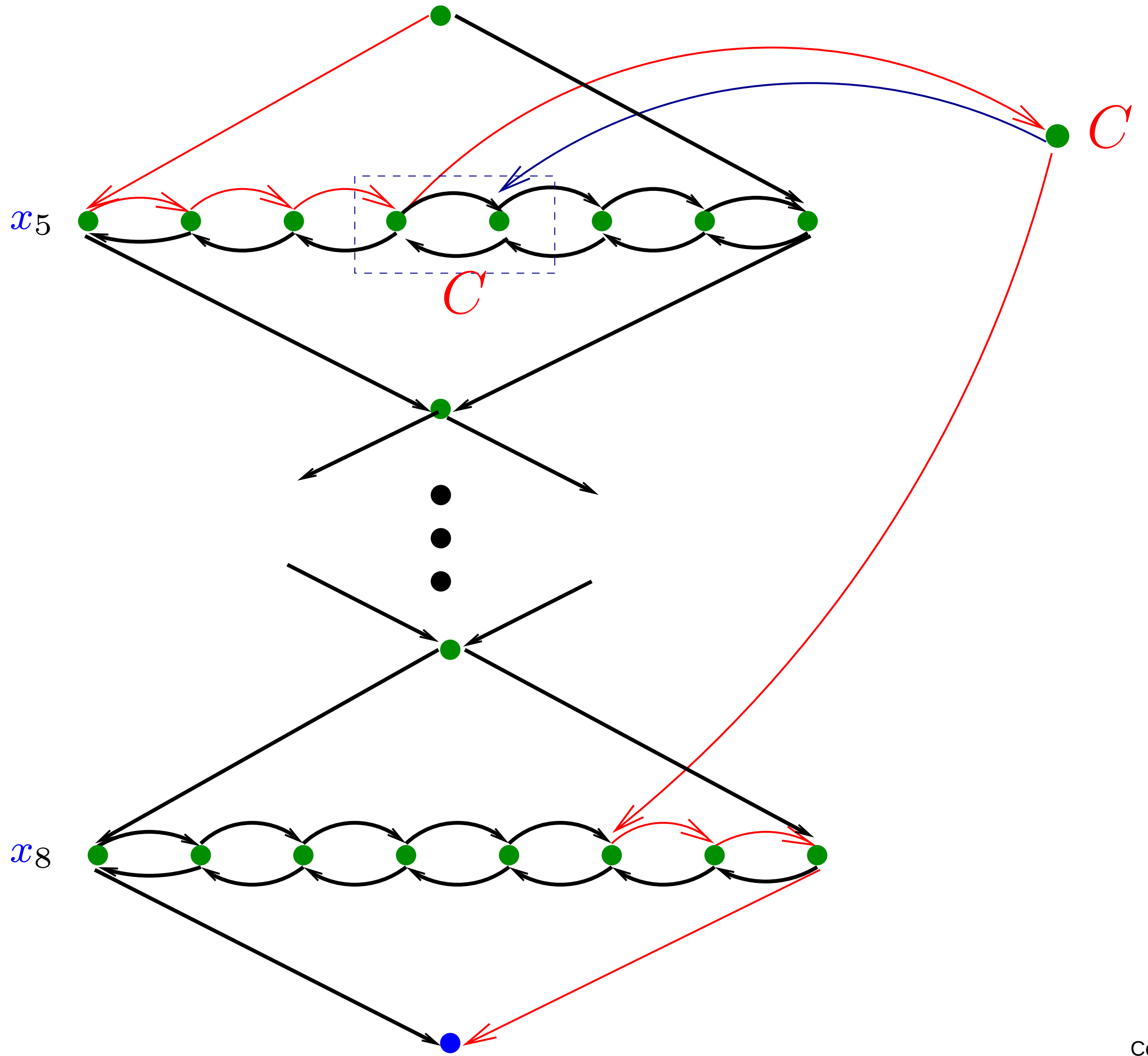


Ligando as engrenagens

Se $\overline{x}_i$ ocorre na cláusula C_j, adicionamos dois arcos como mostrado abaixo



ϕ é satisfatível $\Leftrightarrow$ existe um caminho hamiltoniano de s a t em G.



Consequência

Teorema. CAMHAM é NP-completa.

Prova: Obviamente CAMHAM está em NP e como já vimos 3SAT$\leq_P$CAMHAM. Logo, CAMHAM é NP-completa.

■

Problemas NP-difíceis

Um problema de decisão é **NP-completo** se a existência de um algoritmo polinomial que o resolve implica em P $=$ NP.

Um problema (de decisão ou não) é **NP-difícil** se a existência de um algoritmo polinomial que o resolve implica em P $=$ NP.

Um problema é **intratável** se não existe algoritmo polinomial que o resolve.