MAC0499 Trabalho de Formatura Supervisionado

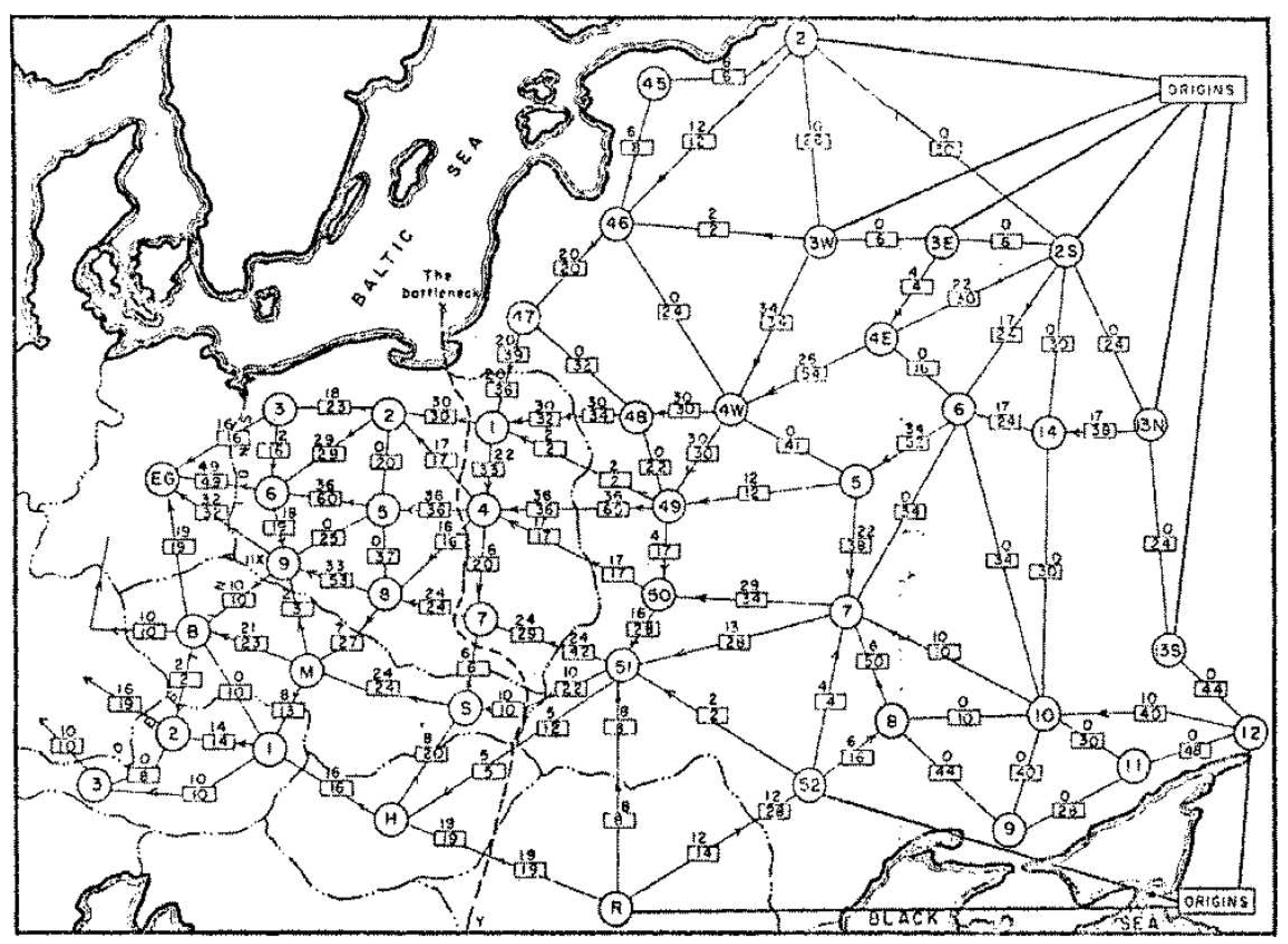
Algoritmos, Experimentação e Teoria em Otimização Combinatória

Alunos: Juliana Barby Simão e Marcelo Hashimoto   Orientador: José Coelho de Pina

Durante a Guerra Fria...

Em 1930, o matemático soviético A. N. Tolstoi estudou problemas envolvendo o transporte de sal, cimento e outras cargas ao longo da rede ferroviária da antiga União Soviética. Em particular, considerou o problema de transportar o máximo de carga possível de um ponto a outro, respeitando a limitação imposta pela capacidade máxima de transporte de cada uma das linhas ferroviárias.

Vinte e cinco anos depois, durante a Guerra Fria, o americano T. E. Harris, juntamente com o General F. S. Ross, escreveu um trabalho para a Força Aérea dos Estados Unidos no qual considerava o problema de interromper o transporte de cargas entre dois pontos da União Soviética através de ataques aéreos a pontos estratégicos da rede ferroviária. Devido à inerente dificuldade de se executar ataques aéreos, era preferível que as linhas ferroviárias a serem atacadas fossem as com menor capacidade de transporte possível, pois, pelo menor porte, estas eram mais facilmente destruídas.



Apesar de possuírem propósitos bastante distintos, os cientistas soviéticos e americanos não só estudaram a mesma rede, como também consideraram, sem saber, problemas equivalentes! Enquanto os soviéticos procuravam resolver o *problema do fluxo máximo*, os americanos tentavam solucionar o *problema do corte mínimo*. Descobriu-se posteriormente que os dois problemas são *duais* e, conseqüentemente, que resolver um deles permite facilmente obter a solução do outro.

Grandes problemas, pequenas soluções

Vamos considerar uma modelagem em grafos dos dois problemas mencionados anteriormente: se s e t são dois vértices de um grafo dirigido, um st-fluxo nesse grafo é uma atribuição de valores não-negativos aos seus arcos que respeita valores de capacidade e satisfaz a *lei da conservação do fluxo*, ou seja, para todo vértice diferente de s e t o fluxo que sai é igual ao fluxo que entra.

Os vértices s e t representam respectivamente a origem e o destino das cargas e o fluxo atribuído a cada arco representa a quantidade transportada na linha ferroviária correspondente. Tolstoi estava interessado em maximizar o fluxo entrando em t e Harris estava interessado em um subconjunto S dos vértices que separasse s de t de forma a minimizar a capacidade dos arcos saindo de S.

Ambos os problemas considerados são de *otimização combinatória*, ou seja, são problemas de otimização sobre estruturas discretas. Uma característica comum dos problemas dessa área é o fato de que, embora o conjunto de soluções viáveis seja finito, ele pode ser muito grande. Isso inviabiliza a estratégia ingênua de se testar todos os valores possíveis para encontrar a solução ótima.

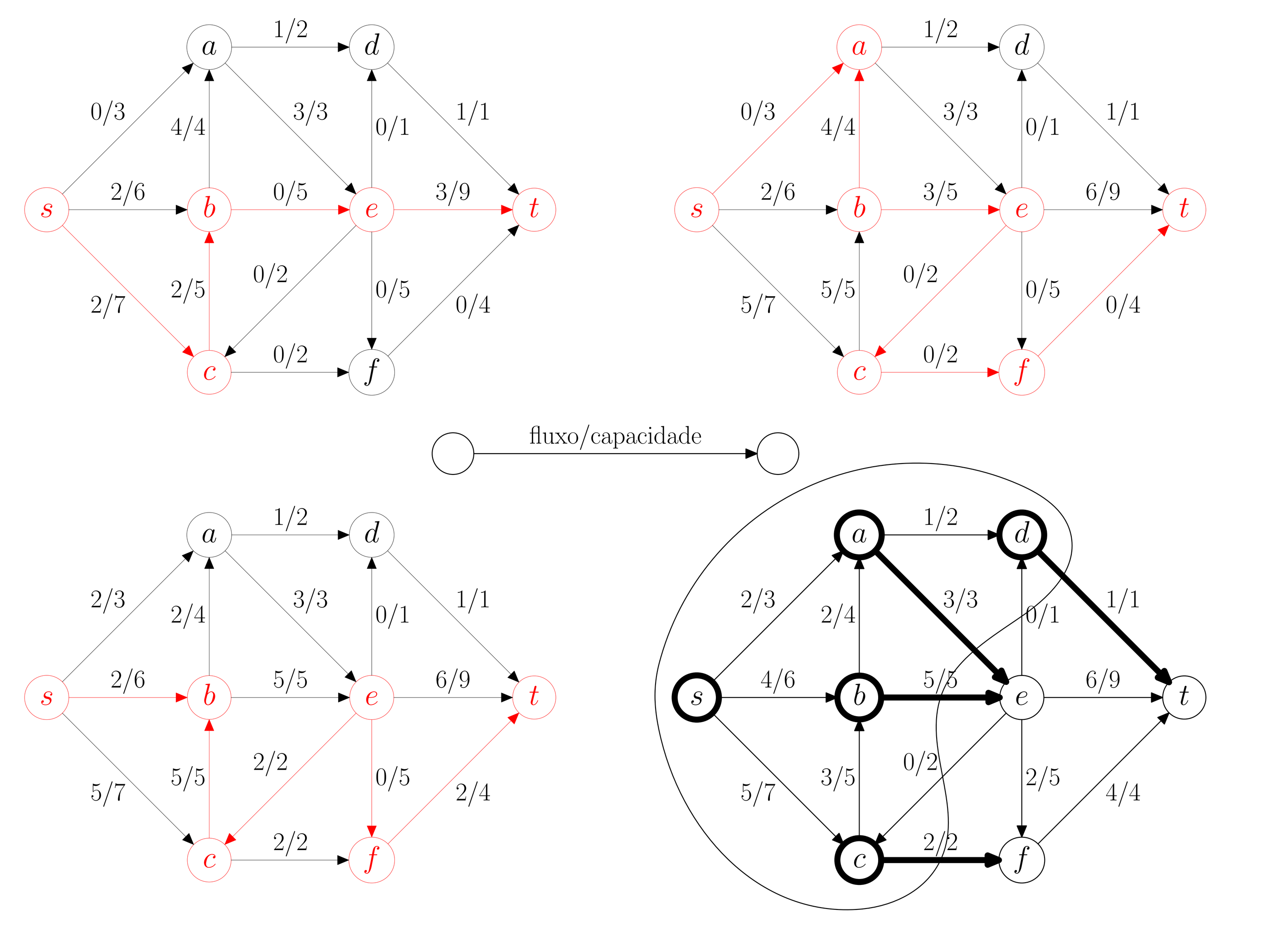
Portanto, é fundamental no estudo de otimização combinatória a busca por algoritmos que resolvam esses problemas de maneira *eficiente*. Muitos desses algoritmos podem ser obtidos através do uso de técnicas sofisticadas, como *programação linear*, ou através de idéias simples, como *scaling*. O objetivo deste trabalho é estudar a teoria envolvida nesses problemas e algoritmos, particularmente os que envolvem fluxos em redes, e também observá-los na prática através da implementação.

No meio do caminho tinha um corte

Em 1956, L. R. Ford e D. R. Fulkerson estudaram o trabalho de Harris e Ross e desenvolveram um algoritmo para resolver o problema do fluxo máximo conhecido como *método dos caminhos de aumento*. O método baseia-se na idéia de que se temos um st-fluxo que não é máximo, podemos encontrar um caminho não necessariamente dirigido de s a t através do qual podemos melhorá-lo: basta aumentar seu valor nos arcos que possuem a mesma direção do caminho e diminuir seu valor nos arcos que possuem direção oposta. Tal caminho é conhecido como *caminho de aumento*.

Para que um caminho não necessariamente dirigido de s a t seja um caminho de aumento, basta que os arcos na direção do caminho tenham fluxo estritamente menor do que a capacidade e que os arcos na direção oposta tenham fluxo estritamente positivo. Em poucas palavras, o método se interessa por caminhos que ainda possuem espaço para a passagem de mais fluxo. Ford e Fulkerson provaram que um st-fluxo é máximo se e somente se não apresenta caminhos de aumento.

O método dos caminhos de aumento também é uma prova algorítmica para a equivalência do problema do fluxo máximo e do problema do corte mínimo: quando não existem mais caminhos de aumento, é fácil obter um subconjunto S dos vértices que separa s e t tal que a capacidade dos vértices que saem é a menor possível. E essa capacidade é *exatamente* o valor do fluxo máximo obtido.



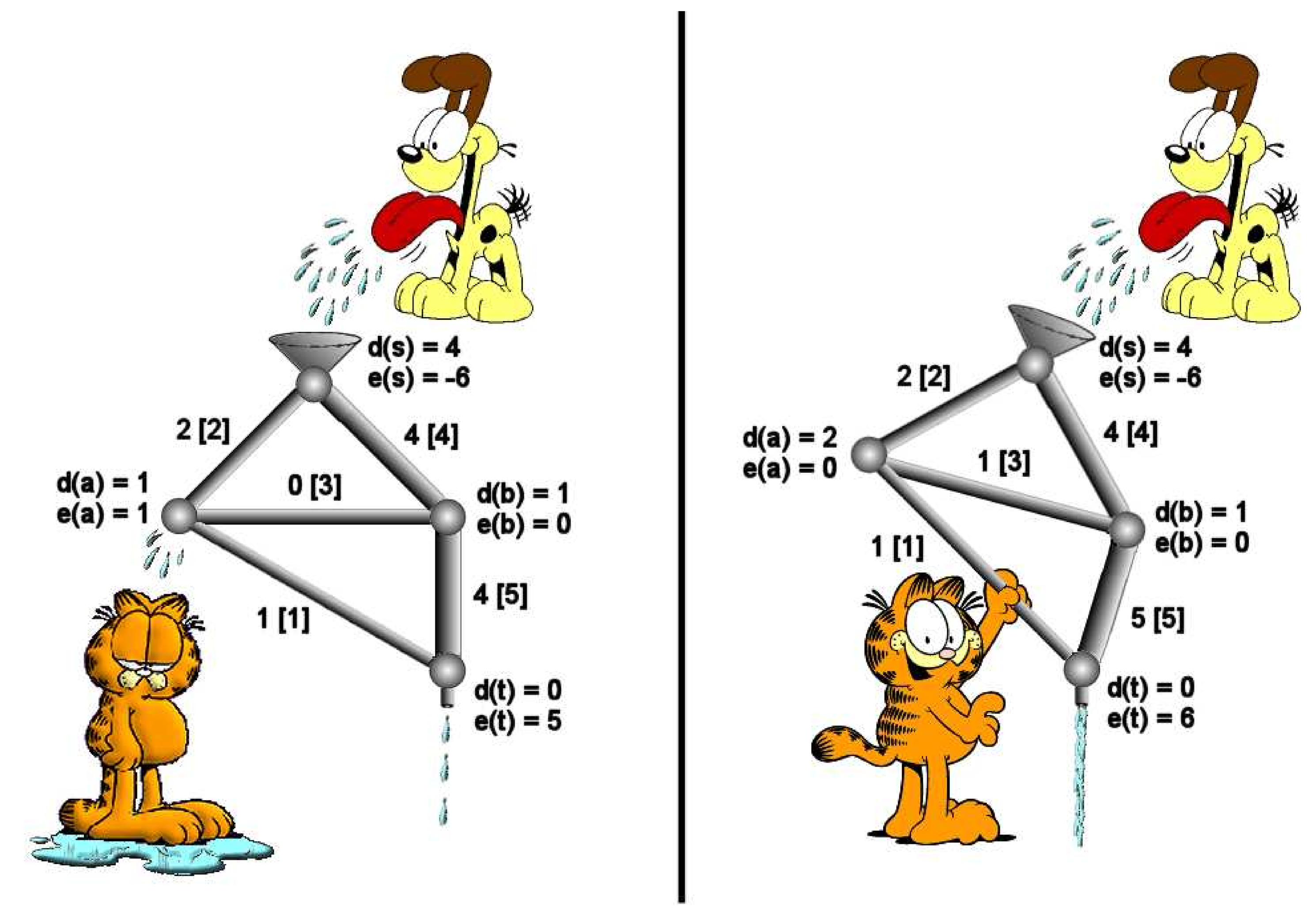
Deixando a gravidade agir

O método dos caminhos de aumento satisfaz a lei da conservação do fluxo enquanto aumenta iterativamente seu valor. Modelando o problema do fluxo máximo com programação linear, esse processo equivale a manter a *viabilidade primal*, enquanto se busca atingir a *viabilidade dual*.

Em 1988, A. V. Goldberg e R. E. Tarjan desenvolveram um algoritmo baseado na idéia inversa: manter um fluxo que não necessariamente satisfaz a lei da conservação e buscar iterativamente satisfazê-la enquanto se garante a ausência de caminhos de aumento. Ou seja, manter viabilidade dual e buscar viabilidade primal, modificando o fluxo para eventualmente conseguir satisfazer a lei da conservação. Quando isso ocorre, como não existem caminhos de aumento, o fluxo é máximo.

O algoritmo, conhecido como *método do pré-fluxo*, baseia-se na idéia de aplicar operações sobre vértices que não satisfazem a viabilidade primal, ou seja, vértices tais que a diferença entre o fluxo que entra e o que sai é positiva. Essa diferença, denotada por e, representa o excesso de fluxo no vértice e as operações aplicadas sobre ele têm como objetivo enviar esse excesso aos seus vértices vizinhos.

Mas como garantir que esse excesso está sendo enviado na direção certa? O método soluciona esse problema associando um valor d a cada vértice e exigindo que o excesso de um certo vértice possa apenas ser enviado a vértices com d menor. Caso não existam tais vértices, o valor de d para o vértice em excesso aumenta. Podemos visualizar d como sendo a altura de cada vértice e o fluxo como sendo água escoada através de canos: quando o excesso de um vértice não pode ser reduzido porque os vizinhos têm a mesma altura, levantamos o vértice em excesso e deixamos a gravidade agir.



Implementações dos algoritmos

Existem várias implementações possíveis para os dois métodos descritos: o método dos caminhos de aumento permite várias maneiras diferentes de se escolher o caminho de aumento desejado e o método do pré-fluxo permite várias maneiras diferentes de se escolher o vértice em excesso que sofrerá as operações. Há vantagens e desvantagens em cada uma destas implementações.

A tabela abaixo mostra a complexidade dos diferentes algoritmos implementados a partir dos métodos, onde n é o número de vértices, m é o número de arcos e U é a maior capacidade.

Algoritmo	Complexidade
Caminhos de aumento de comprimento mínimo	$O(nm^2)$
Fluxos bloqueadores de aumento	$O(n^3)$
Caminhos de maior aumento	$O(m^2 \log mU \log n)$
Capacity scaling	$O(m^2 \log U)$
FIFO pré-fluxo	$O(n^3)$
Vértices ativos de maior rótulo	$O(n^2\sqrt{m})$
Excess scaling	$O(nm + n^2 \log U)$

Quer saber mais?

Caso haja interesse em saber mais detalhes, todo o material relacionado à iniciação científica está disponível na Internet. A monografia contendo toda a teoria estudada, as implementações dos algoritmos e outras referências relacionadas podem ser encontradas nos sítios do projeto:

```
http://www.ime.usp.br/~coelho/oticomb/
http://www.linux.ime.usp.br/~julianab/oticomb/
http://www.linux.ime.usp.br/~mhashimo/oticomb/
```


iniciação científica com apoio da FAPESP
Processos 04/00580-8 e 04/00581-4