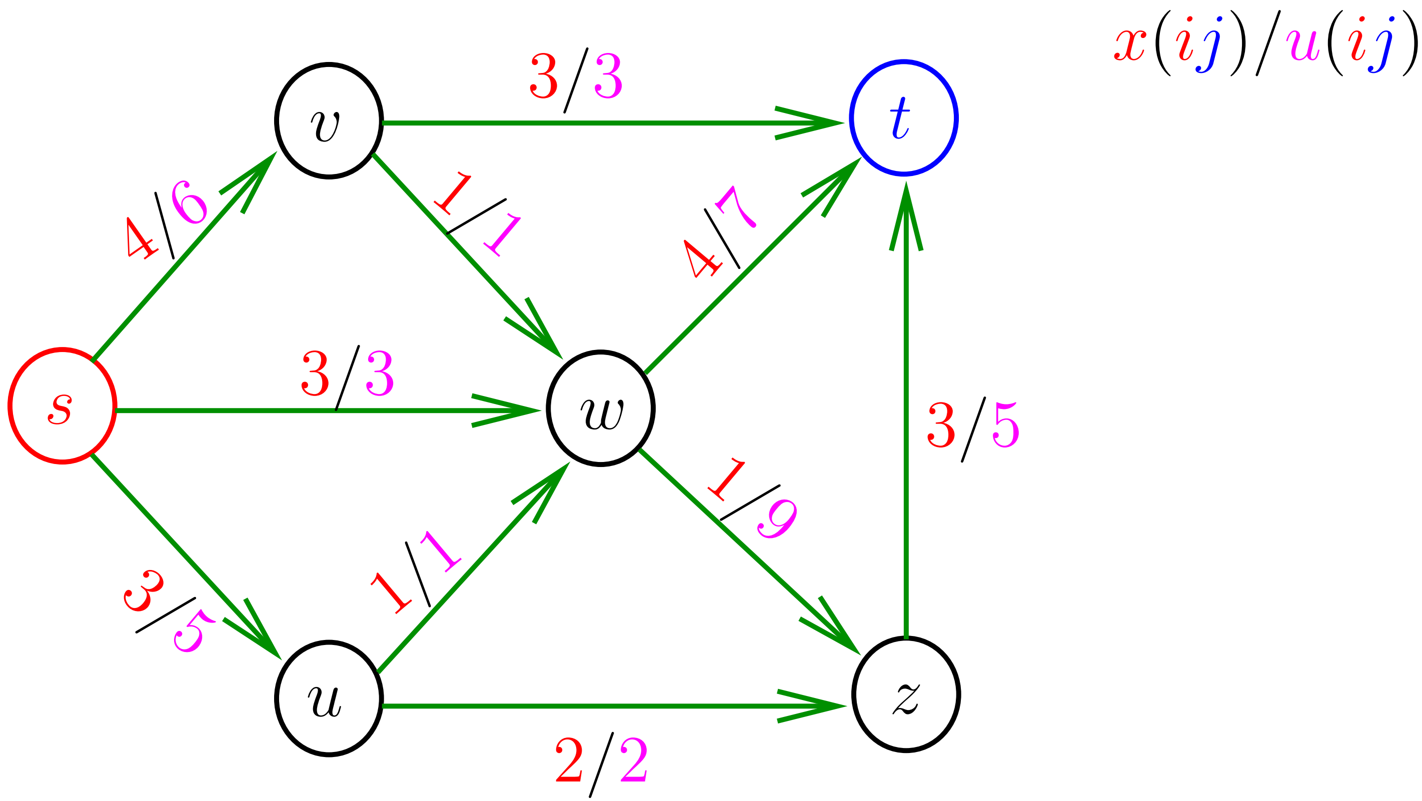
Melhores momentos

AULA PASSADA

Problema

Problema do fluxo máximo: Dados nós s e t de uma rede (N, A, u) com função-capacidade u, encontrar um st-fluxo que repeite u e tenha valor máximo.

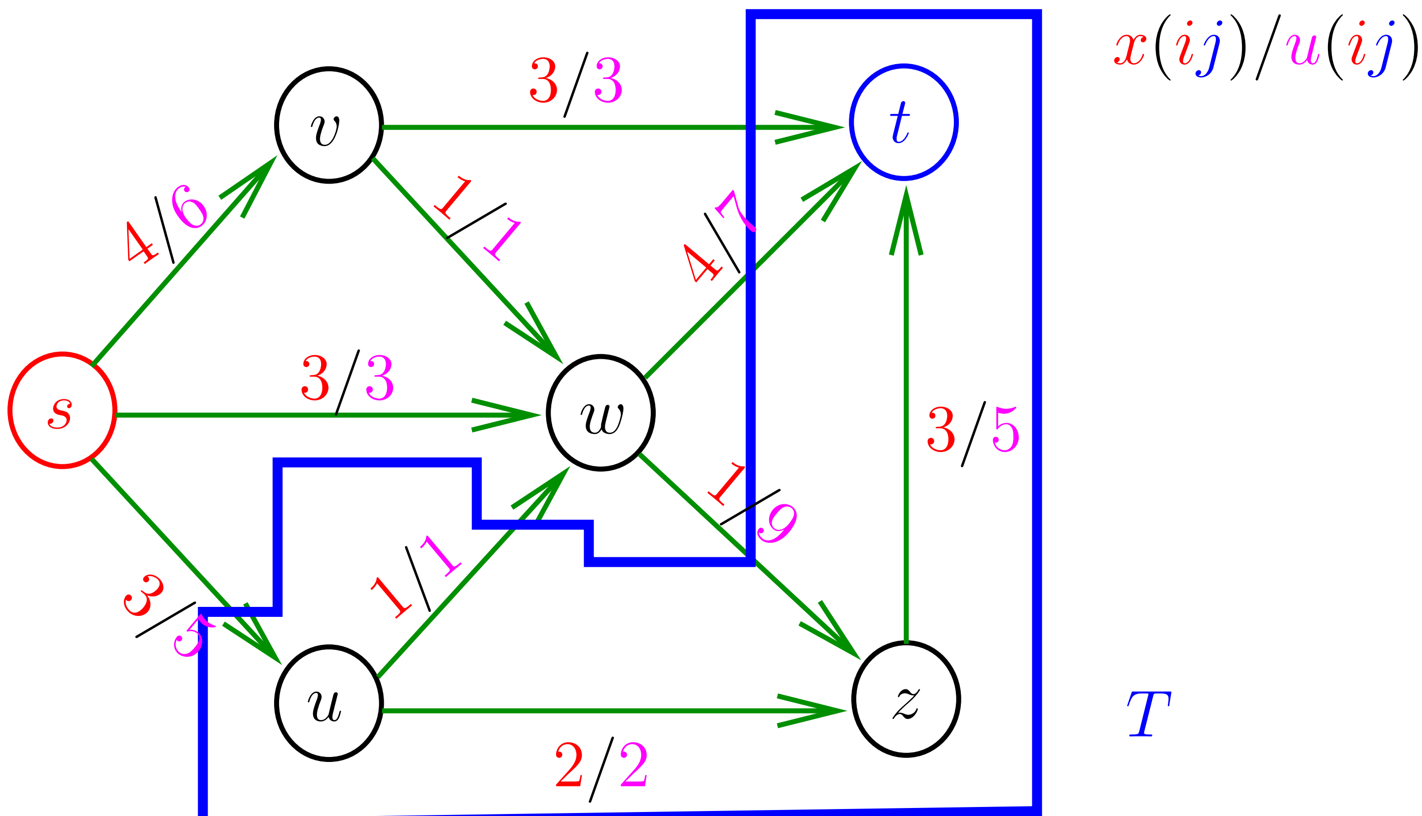


Lema da dualidade

Se x é um st-fluxo que respeita u e $\nabla(\overline{T}, T)$ é um st-corte então

$$\text{val}(x) \leq u(\overline{T}, T).$$

Exemplo: $\text{val}(x) = 10 < 3 + 7 + 9 + 5 = 24 = u(\overline{T}, T)$.

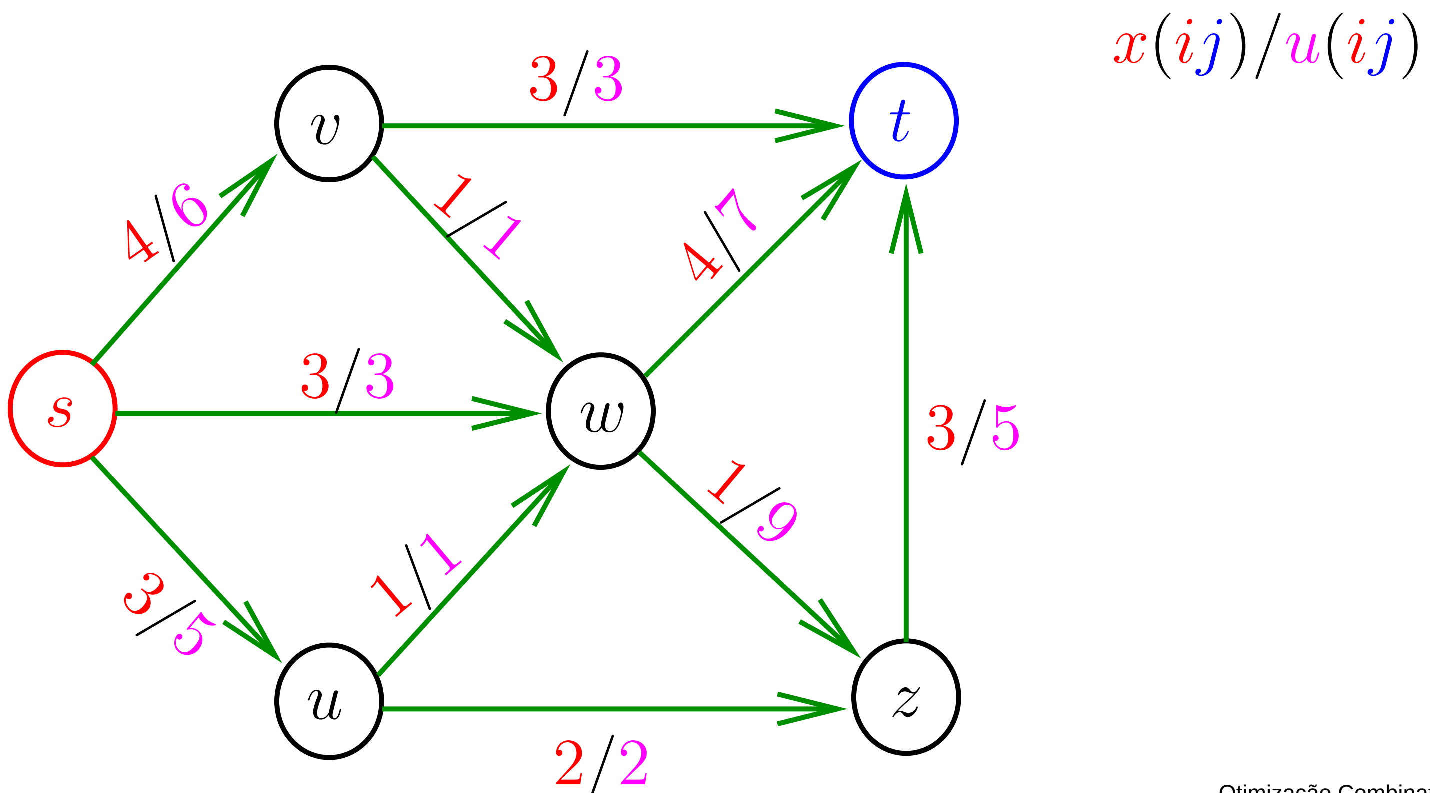


Conseqüência

Se x é um st-fluxo que respeita u e $\nabla(\overline{T}, T)$ é um st-corte tais que

$$\text{val}(x) = u(\overline{T}, T)$$

então x é um st-fluxo de valor máximo e $\nabla(\overline{T}, T)$ é um st-corte de capacidade mínima.

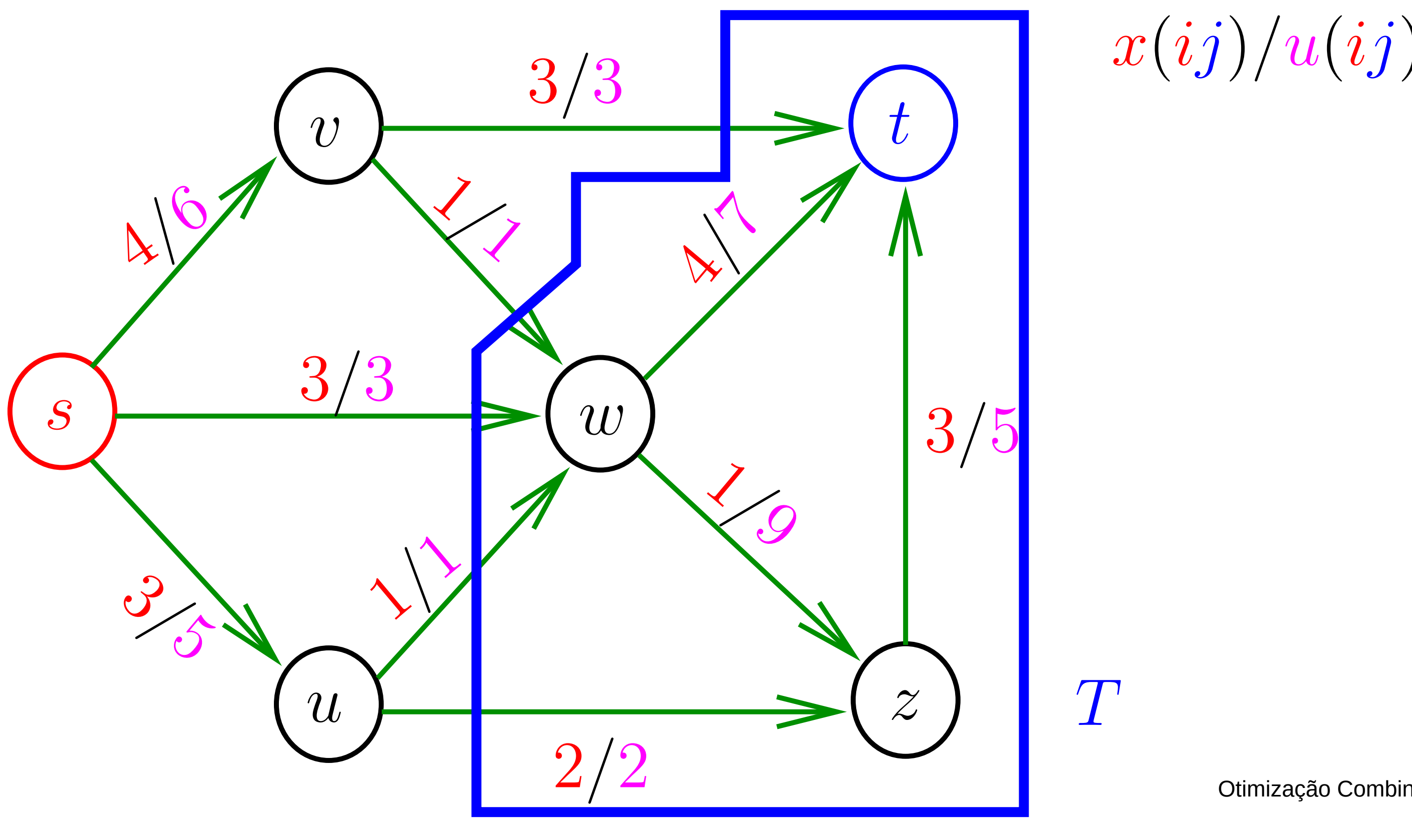


Conseqüência

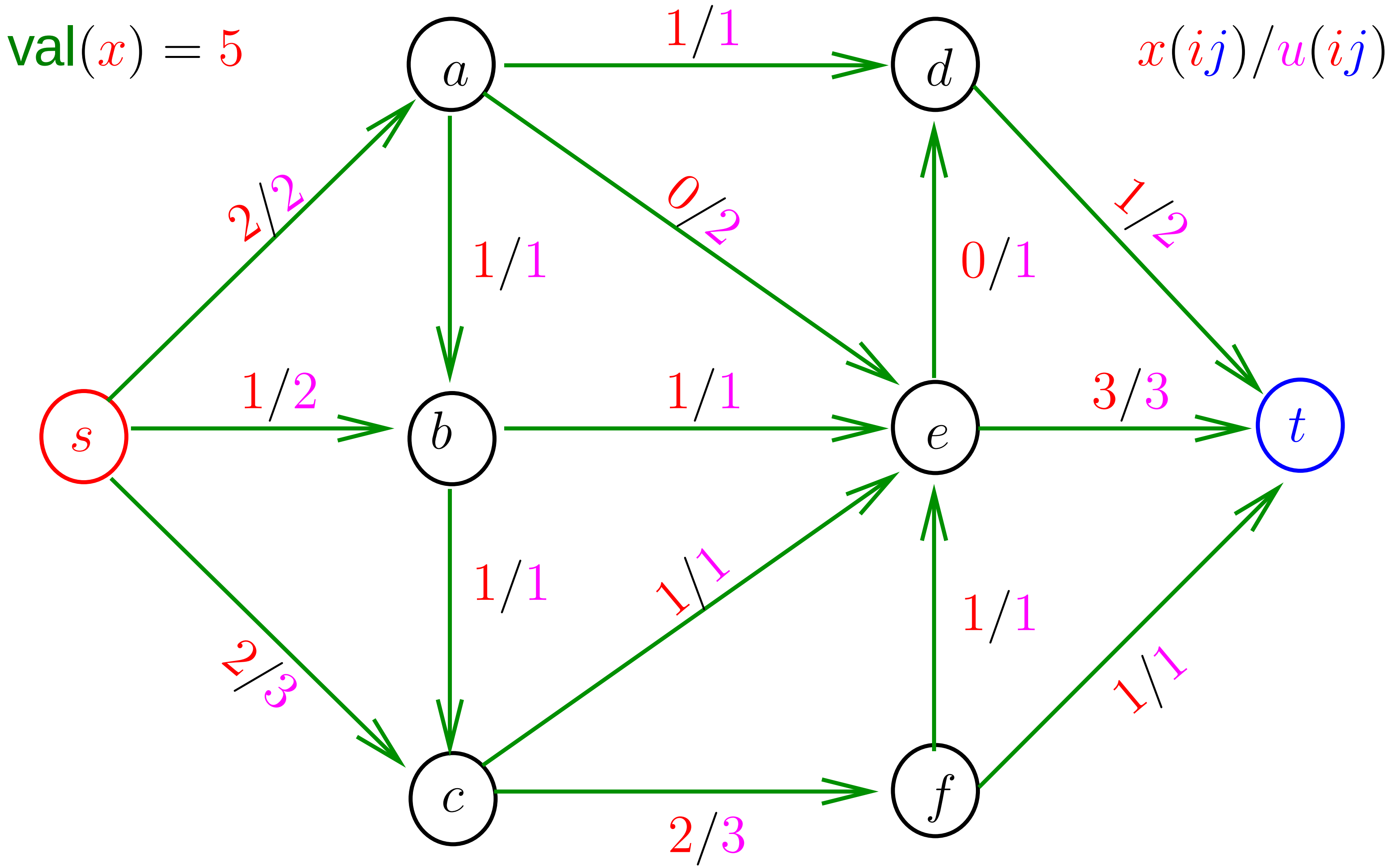
Se x é um st-fluxo que respeita u e $\nabla(\overline{T}, T)$ é um st-corte tais que

$$\text{val}(x) = u(\overline{T}, T)$$

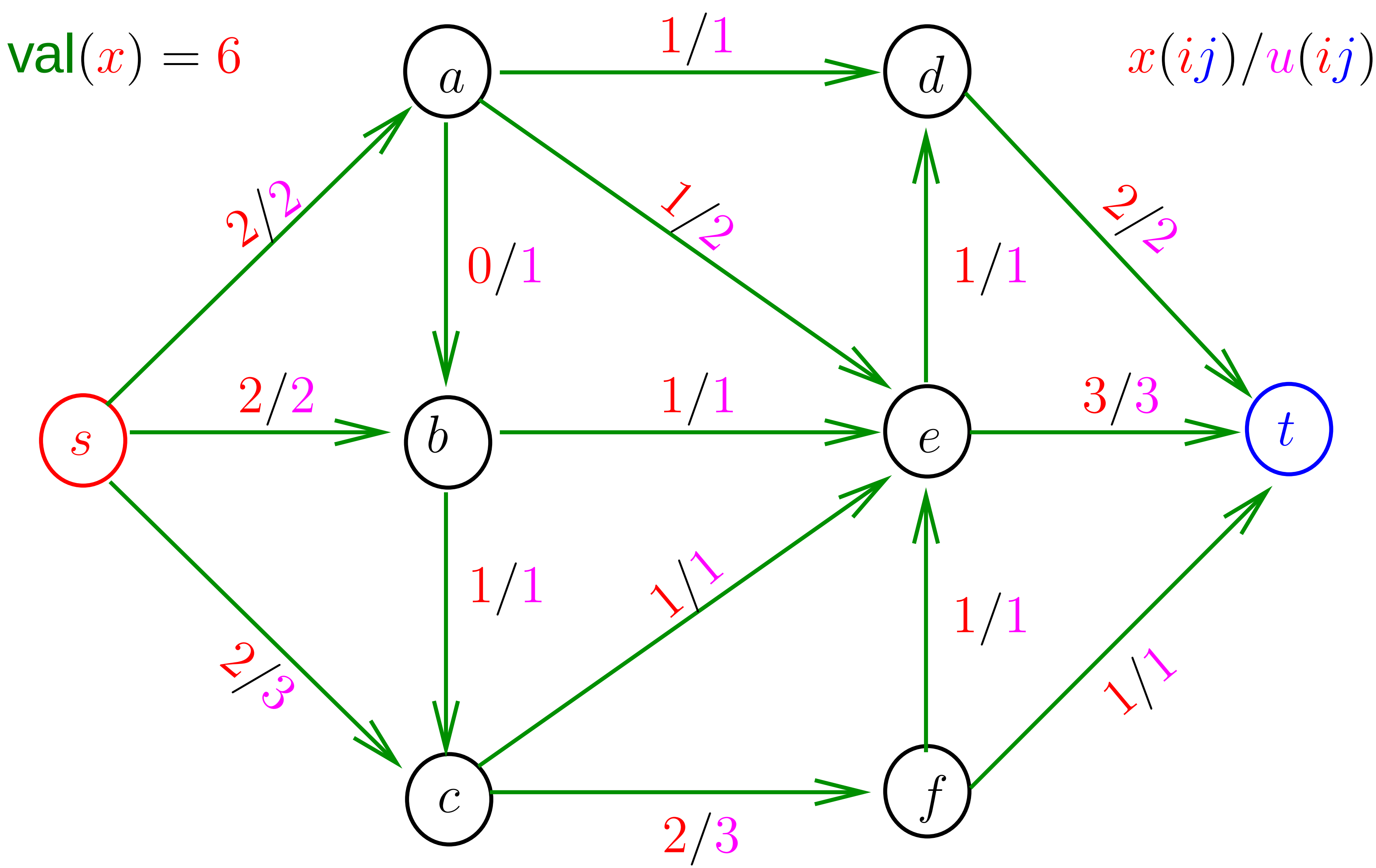
então x é um st-fluxo de valor máximo e $\nabla(\overline{T}, T)$ é um st-corte de capacidade mínima.



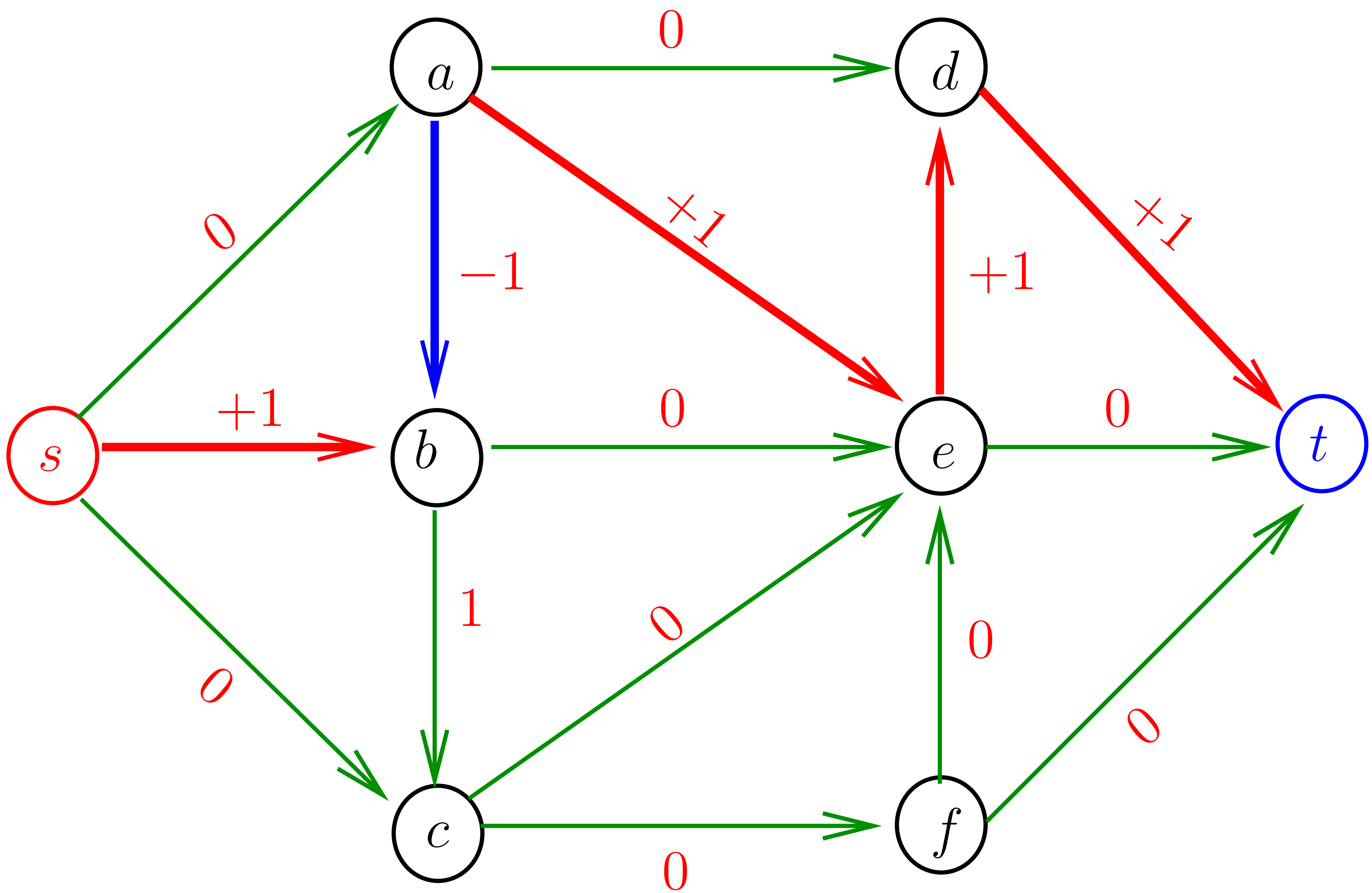
x é máximo?



E agora? x é máximo?



Onde mudou?



Pseudo-caminho

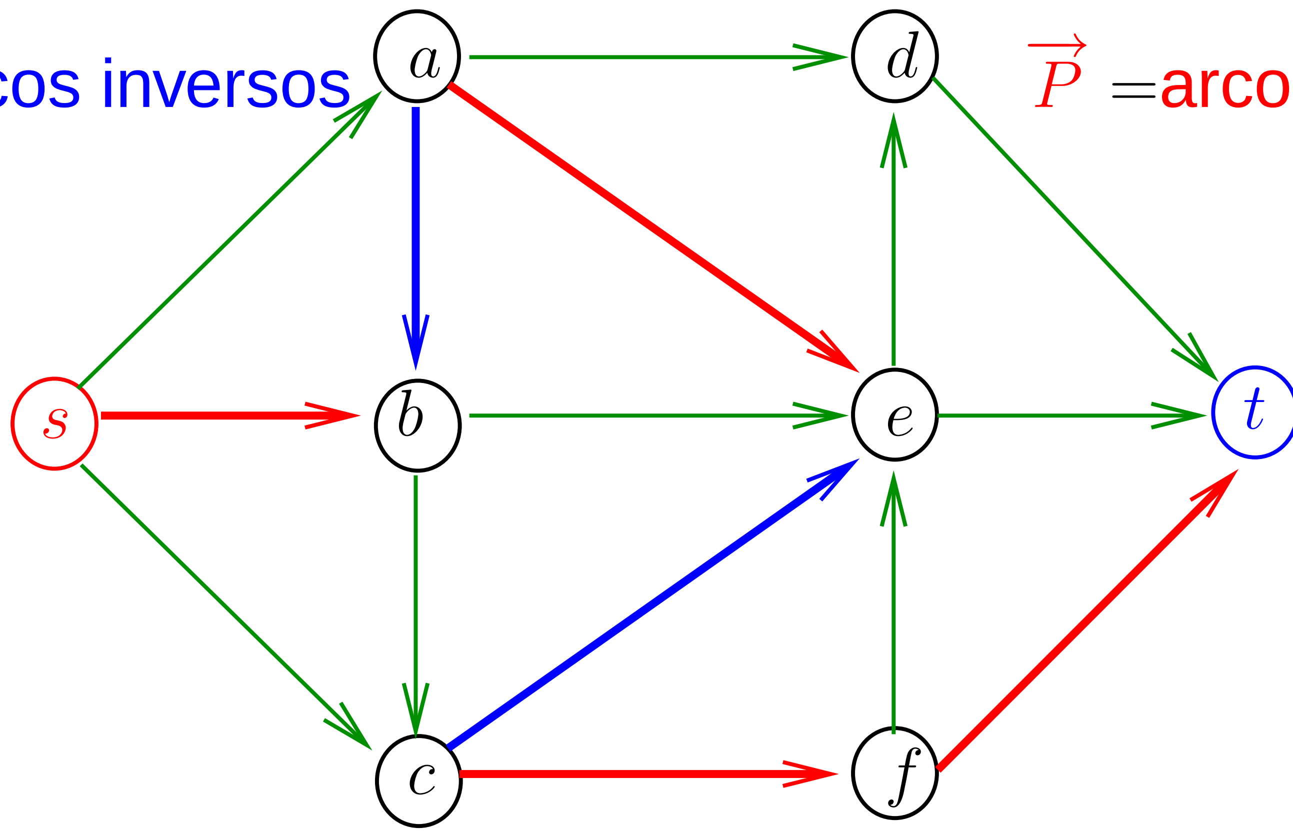
Um pseudo-caminho é uma seqüência

$$\langle i_0, a_1, i_1, \ldots, a_q, i_q \rangle$$

em que $i_0, \ldots, i_q$ são nós distintos e $a_k = i_{k-1} i_k$ ou $a_k = i_k i_{k-1}$.

$\overleftarrow{P}$ =arcos inversos

$\overrightarrow{P}$ =arcos diretos



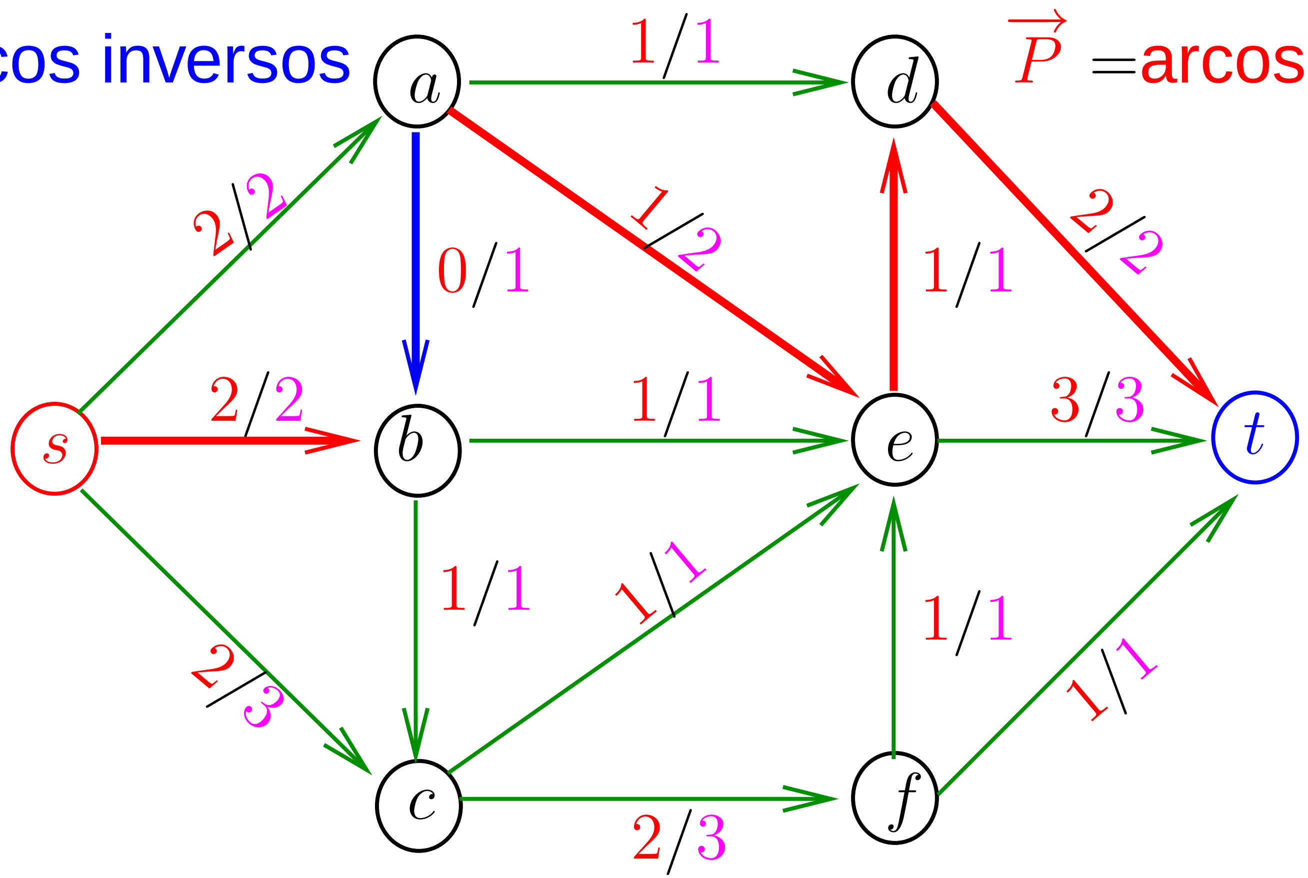
Pseudo-caminho de incremento

Um pseudo-caminho P é de incremento se

$$\begin{array}{lll} x(ij) & < & u(ij) \quad \text{para cada } ij \text{ em } \overrightarrow{P} \\ x(ij) & > & 0 \quad\quad\;\; \text{para cada } ij \text{ em } \overleftarrow{P} \end{array}$$

$\overleftarrow{P}$ =arcos inversos

$\overrightarrow{P}$ =arcos diretos



Lema do incremento

Se x é um st-fluxo e P é um pseudo-caminho de incremento se s a t, então x não é um fluxo máximo.

Rascunho da demonstração: Seja δ o maior valor tal que

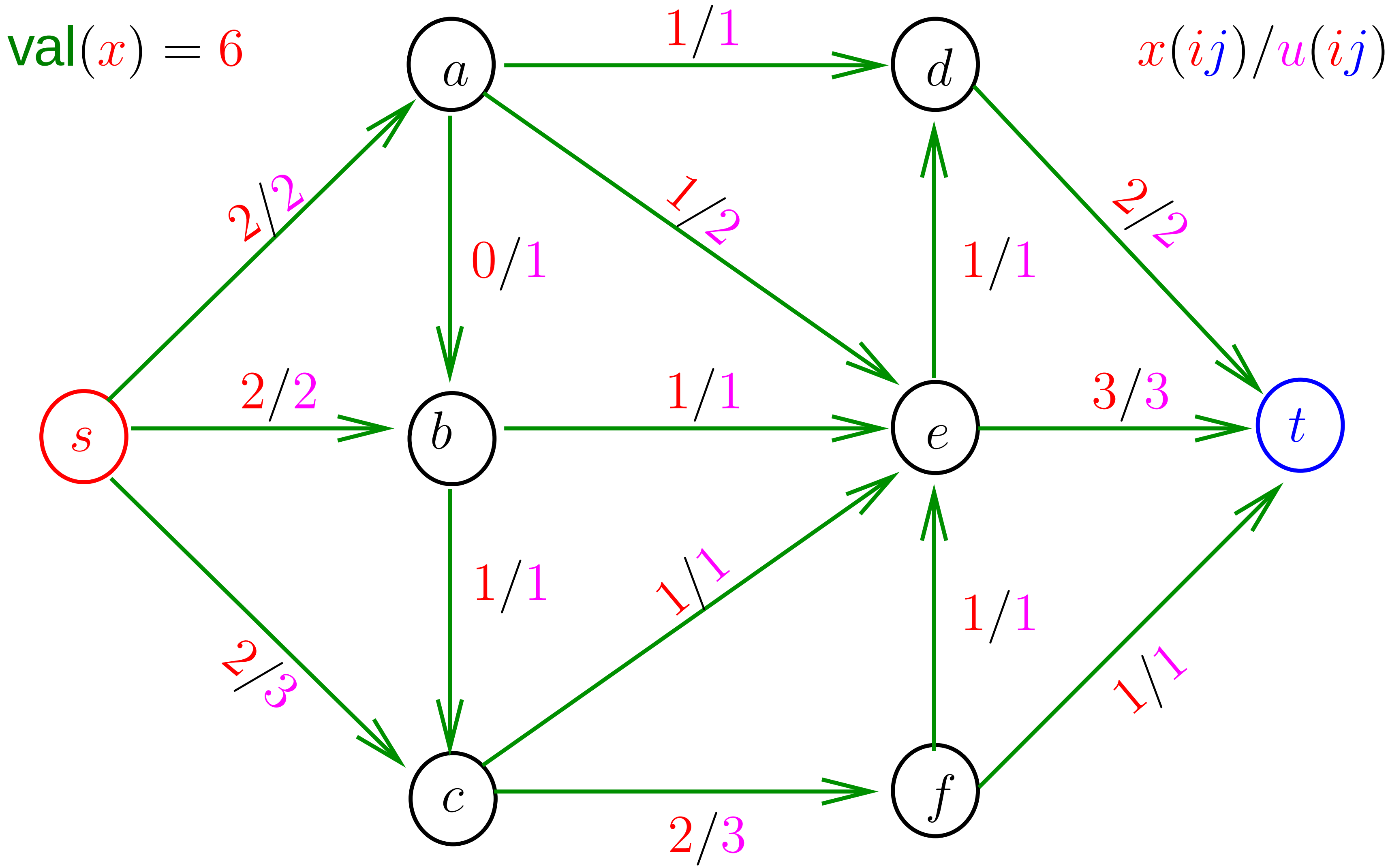
$$
\begin{array}{lll}
\delta & \leq & u(ij) - x(ij) \quad \text{para cada } ij \in \overrightarrow{P} \\
\delta & \leq & x(ij) \qquad\qquad\quad\; \text{para cada } ij \in \overleftarrow{P}.
\end{array}
$$

É evidente que $\delta > 0$. Seja x' o st-fluxo

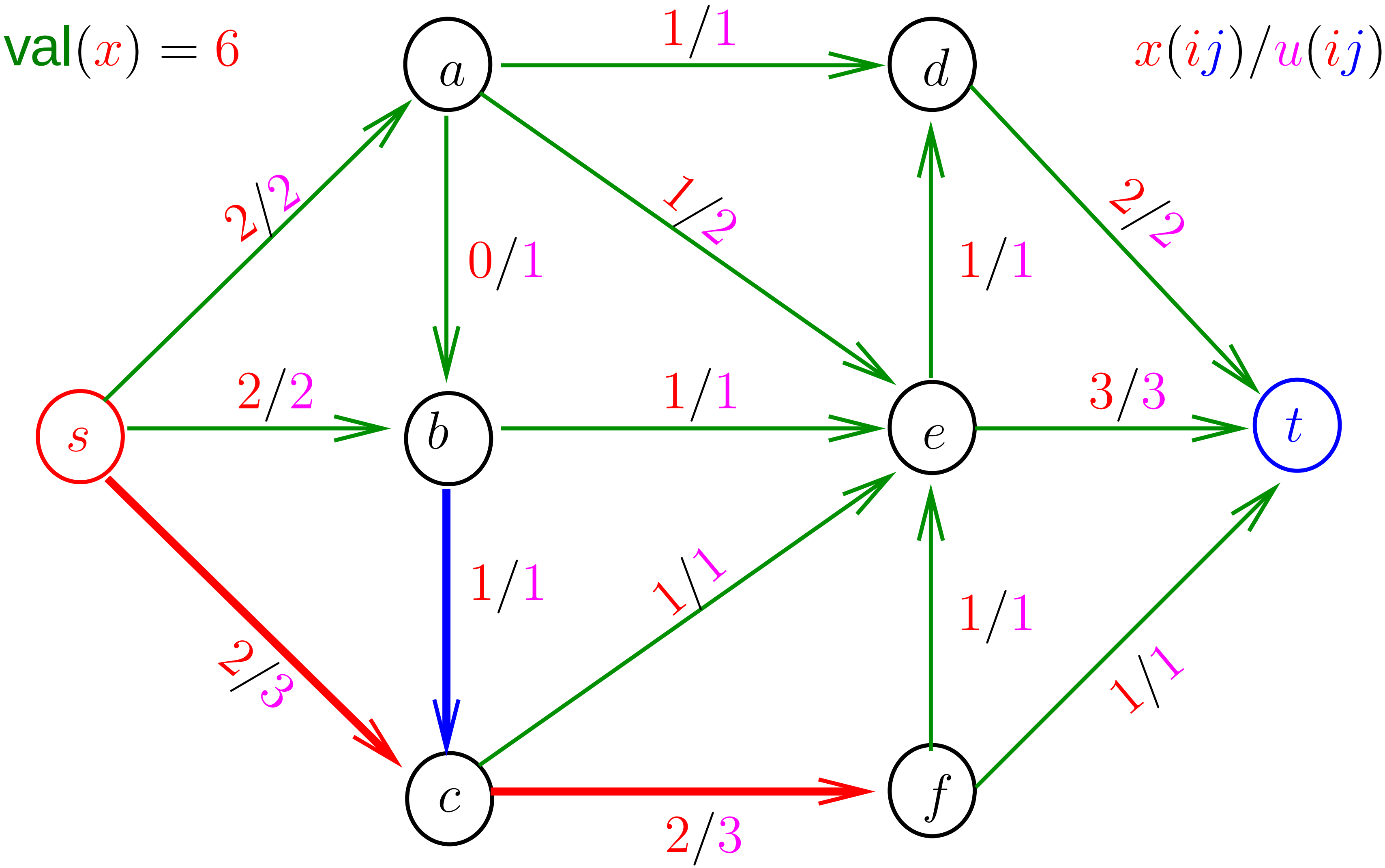
$$
x'(ij) := \begin{cases} x(ij) + \delta & \text{se } ij \in \overrightarrow{P} \\ x(ij) - \delta & \text{se } ij \in \overleftarrow{P} \\ x(ij) & \text{em qualquer outro caso.} \end{cases}
$$

Temos que $\text{val}(x') = \text{val}(x) + \delta$.

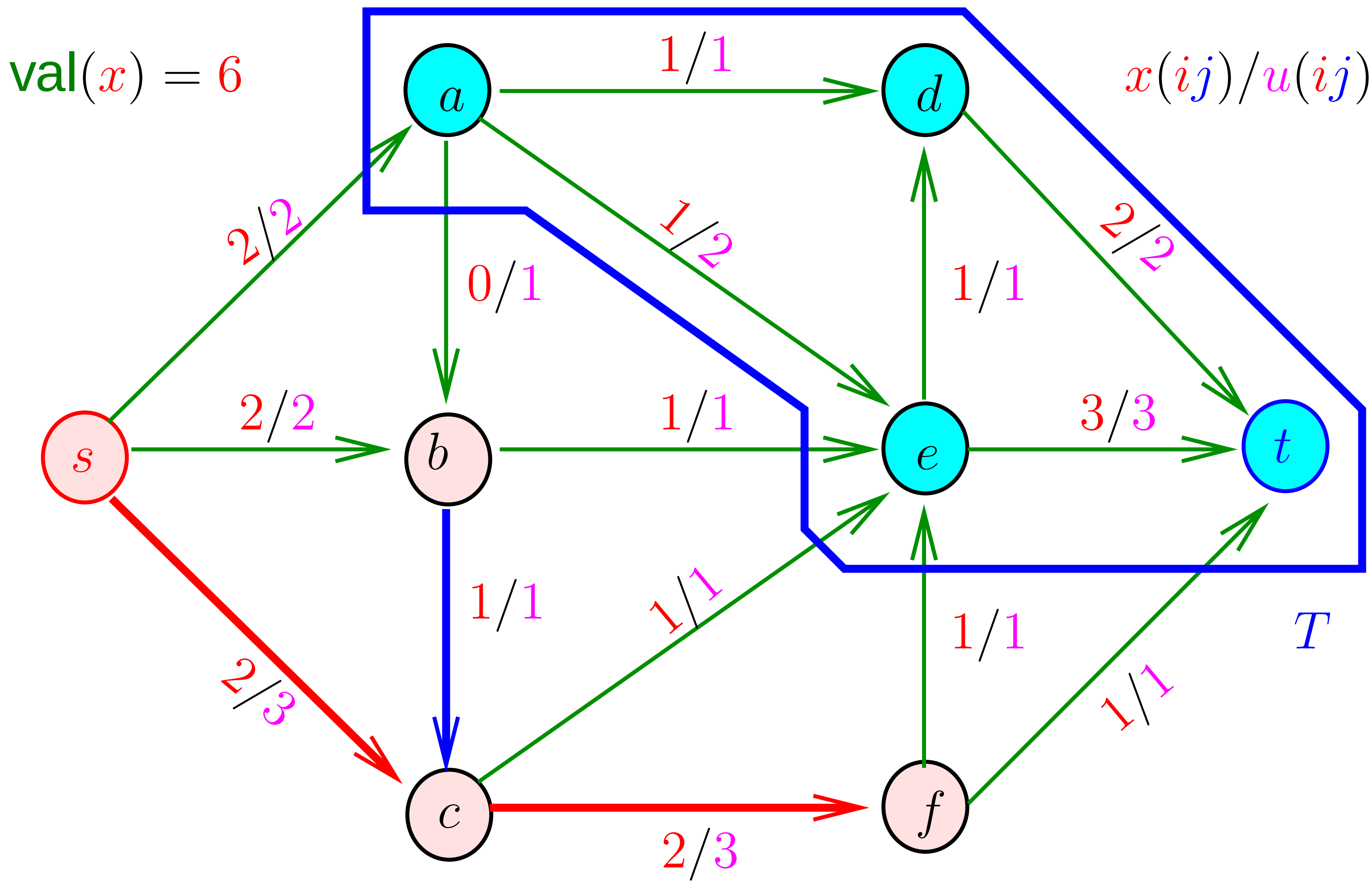
E agora? x é máximo?



E agora? x é máximo?



E agora? x é máximo?



Lema do certificado

Se x é um st-fluxo e não existe um pseudo-caminho de incremento de s a t, então existe um st-corte $\nabla(\overline{T}, T)$ tal que

$$\text{val}(x) = u(\overline{T}, T).$$

Rascunho da demonstração: Seja S o conjunto de nós que são términos de algum pseudo-caminho de incremento que começa em s e seja $T := \overline{S}$.
Da definição segue que $x(\overline{T}, T) = u(\overline{T}, T)$ e $x(T, \overline{T}) = 0$.
Logo,

$$\begin{aligned} \text{val}(x) &= x(\bar{t}, t) - x(t, \bar{t}) \\ &= x(\overline{T}, T) - x(T, \overline{T}) \\ &= x(\overline{T}, T) \\ &= u(\overline{T}, T) \end{aligned}$$

Conseqüência

Para quaisquer dois nós s e t em uma rede (N, A, u) com função-capacidade u, existe um st-fluxo x que respeita u tal que

$$\text{val}(x) = u(\overline{T}, T)$$

para algum st-corte $\nabla(\overline{T}, T)$.

Rascunho de demonstração:

Seja x um st-fluxo de valor máximo.

Pelo lema do incremento não existe um pseudo-caminho de incremente de s a t.

Pelo lema do certificado existe um st-corte $\nabla(\overline{T}, T)$ tal que

$$\text{val}(x) = u(\overline{T}, T).$$

Teorema do fluxo máximo e corte mínimo

O teorema foi demonstrado por Ford e Fulkerson e, independentemente, por Kotzig.

Para quaisquer dois nós s e t em uma rede (N, A, u) com função-capacidade u tem-se que

$$\max\{\text{val}(x) : 0 \leq x \leq u\} = \min\{u(\overline{T}, T) : T \text{ é } st\text{-corte}\}.$$

AULA 10

Ford e Fulkerson

Método dos caminhos de incremento

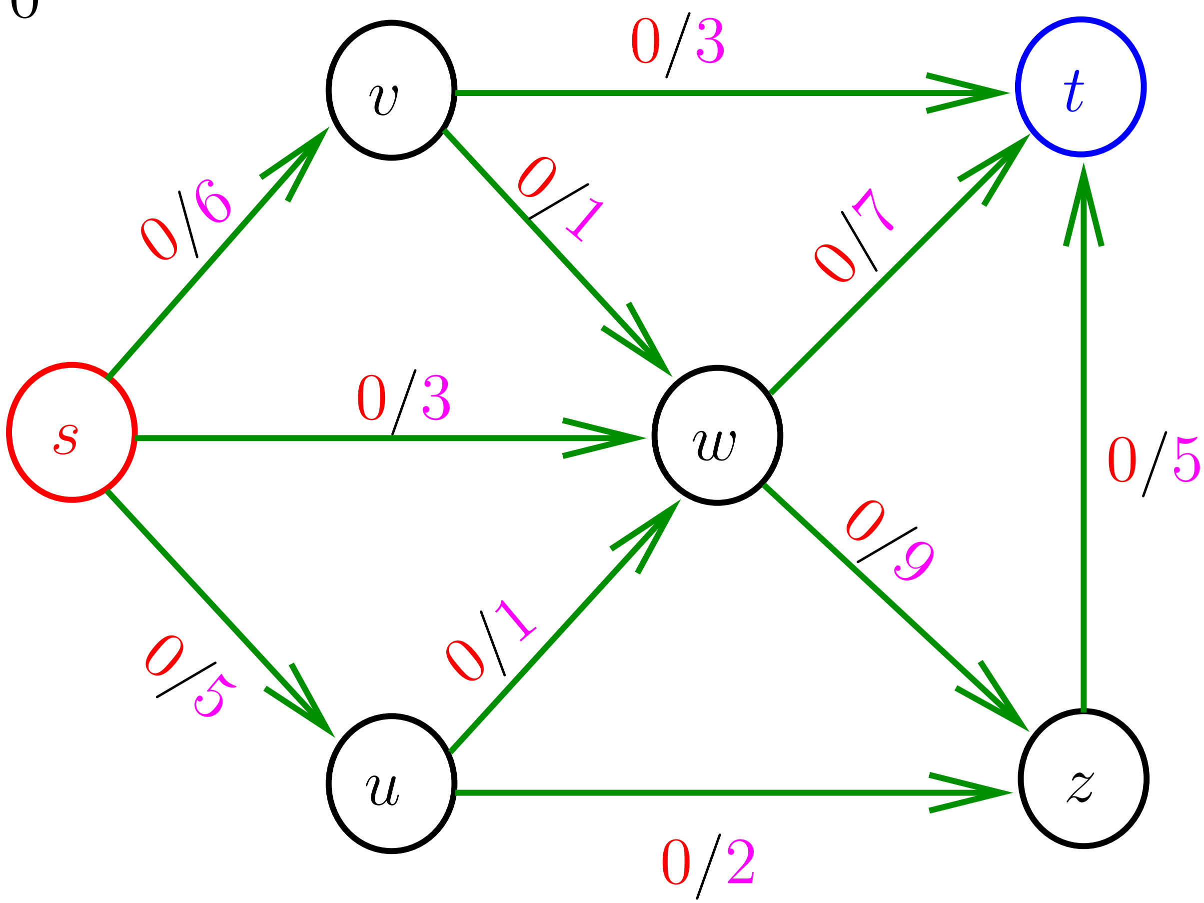
> PASSO DE INCREMENTO: encontre um pseudo-caminho de incremento (para o fluxo corrente). Incremente o valor do fluxo “enviando $\delta > 0$ unidades de fluxo através do caminho”.

Note que o método não especifica como encontrar o pseudo-caminho de incremento.

Método dos caminhos de incremento

val$(x) = 0$

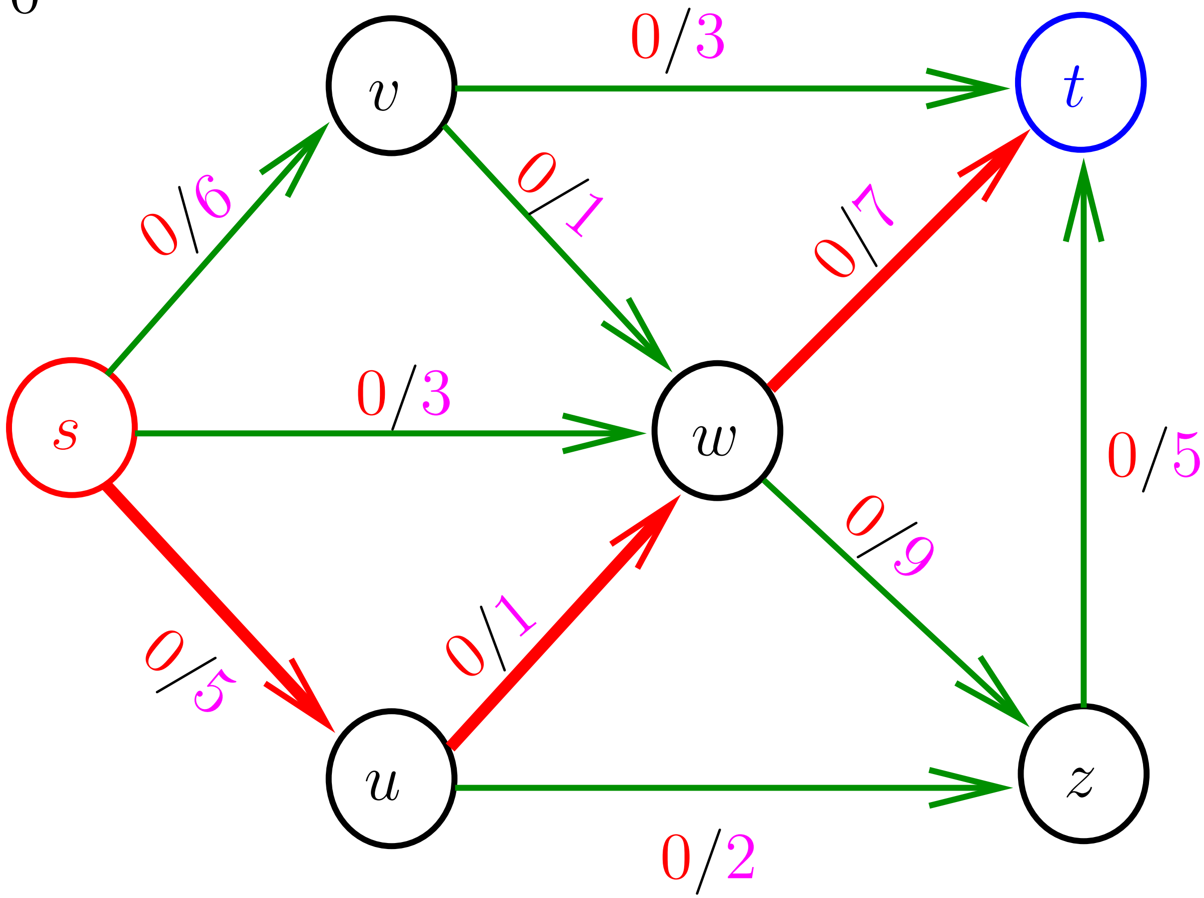
$x(ij)/u(ij)$



Método dos caminhos de incremento

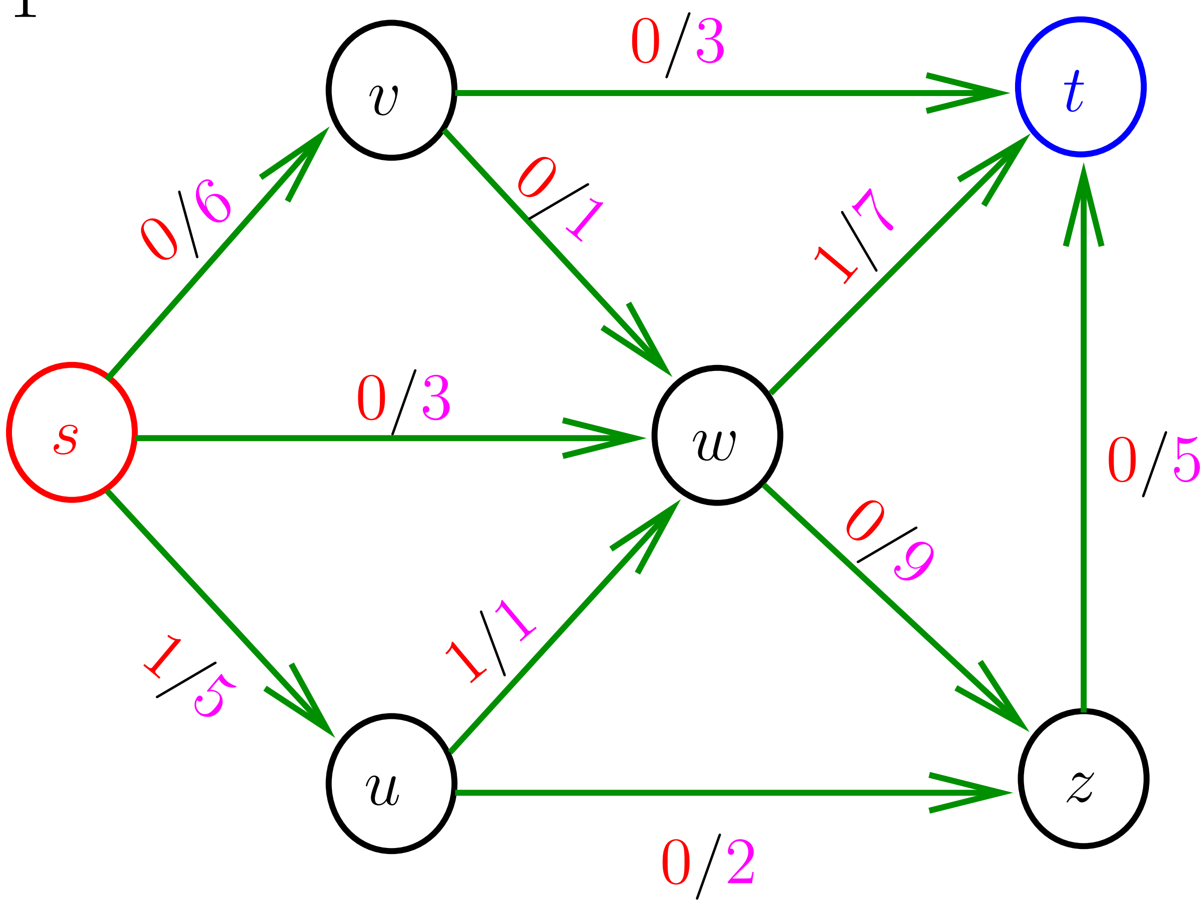
val$(x) = 0$

$x(ij)/u(ij)$



Método dos caminhos de incremento

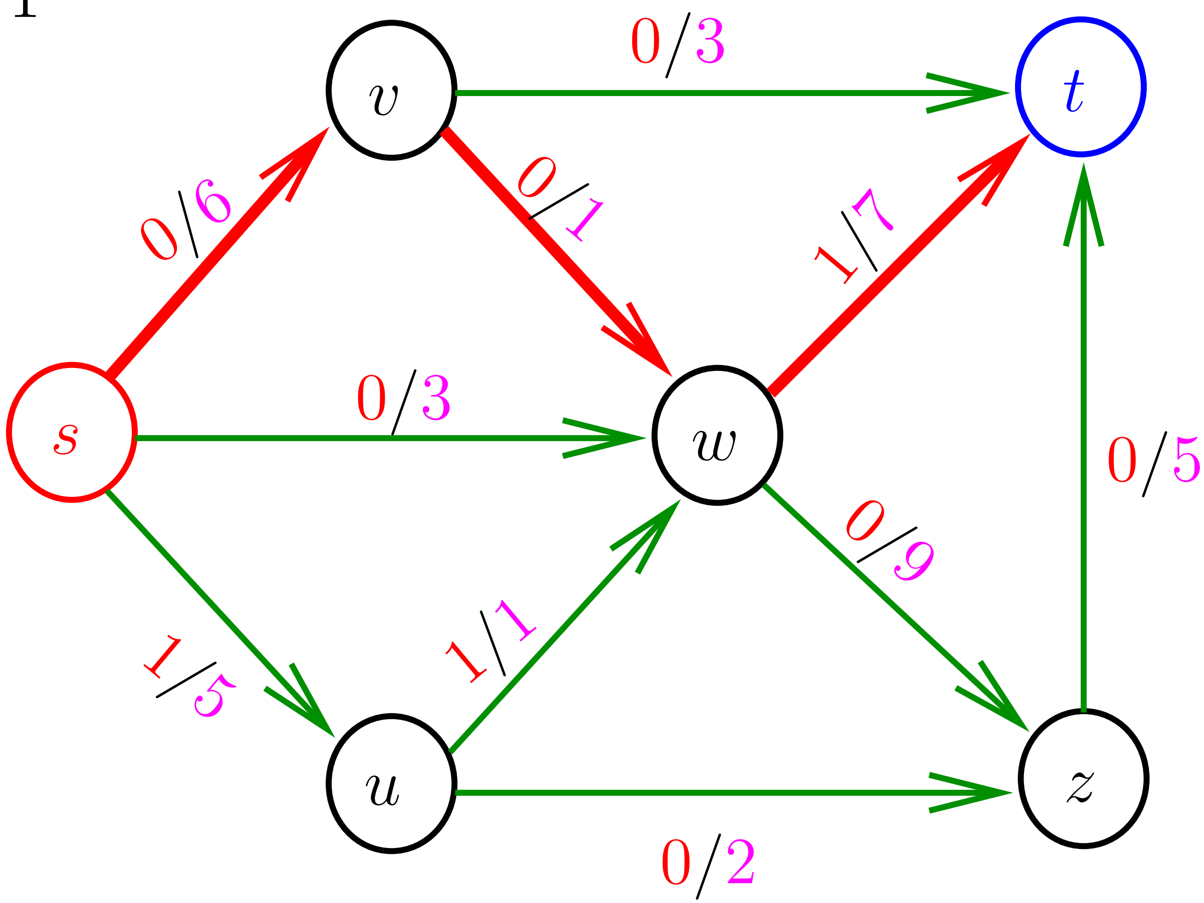
val$(x) = 1$ $\qquad x(ij)/u(ij)$



Método dos caminhos de incremento

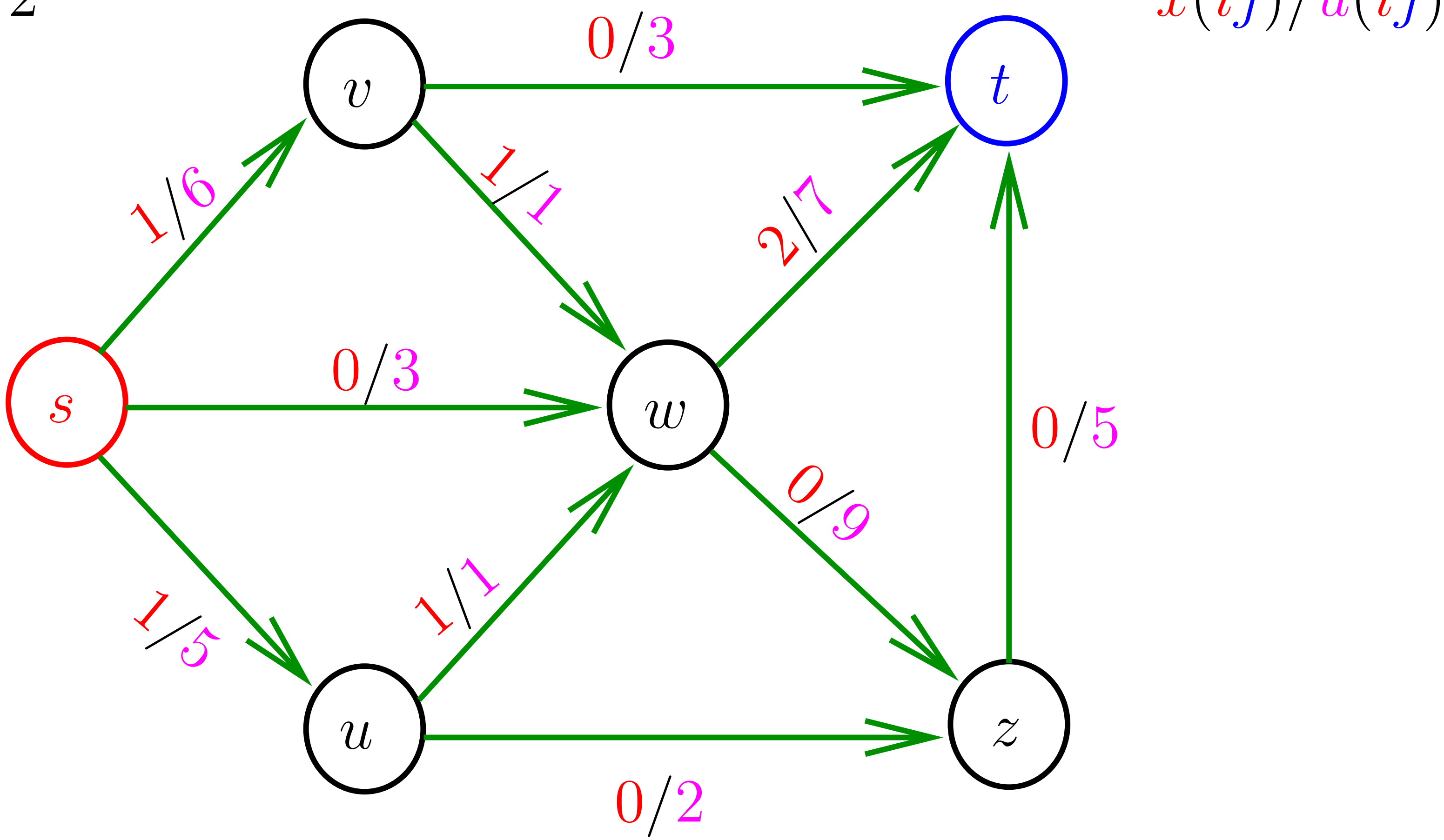
val$(x) = 1$

$x(ij)/u(ij)$



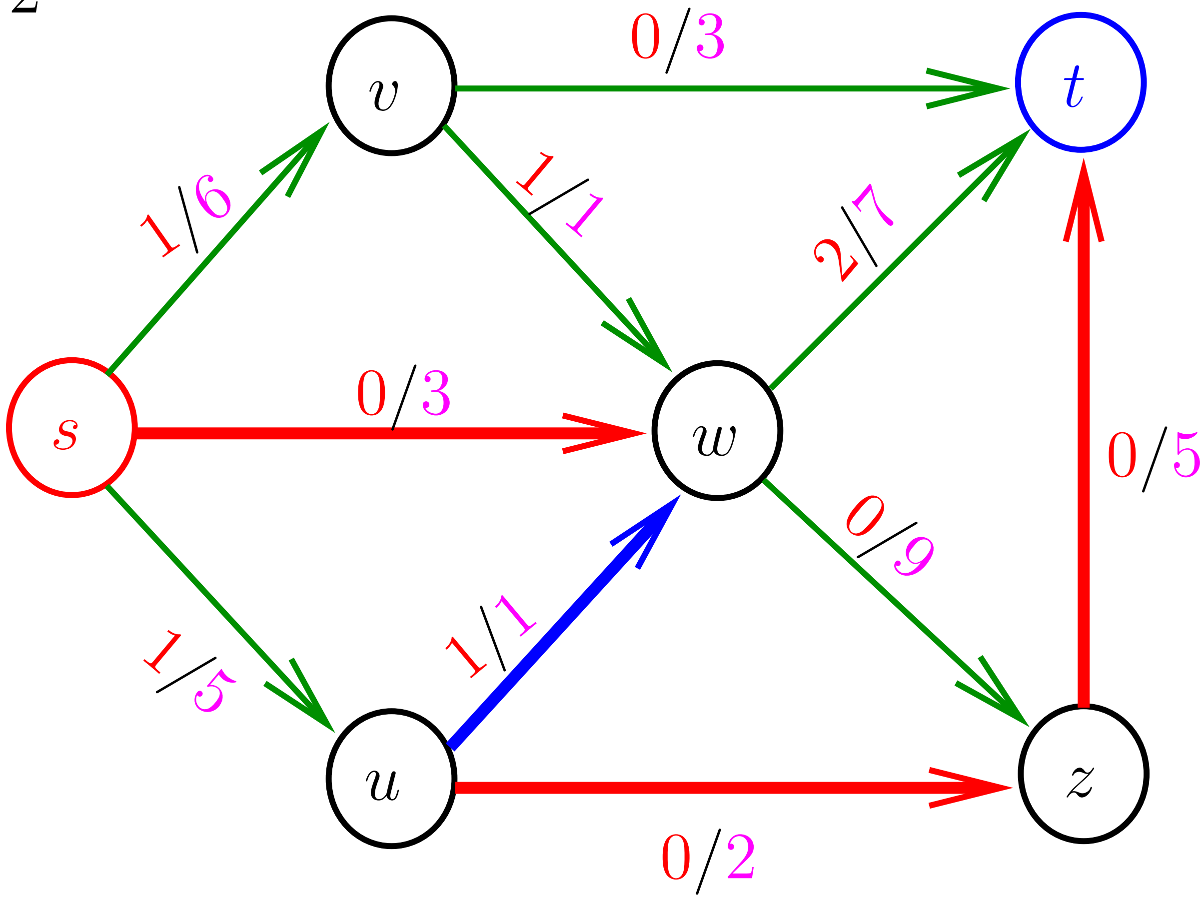
Método dos caminhos de incremento

val$(x) = 2$



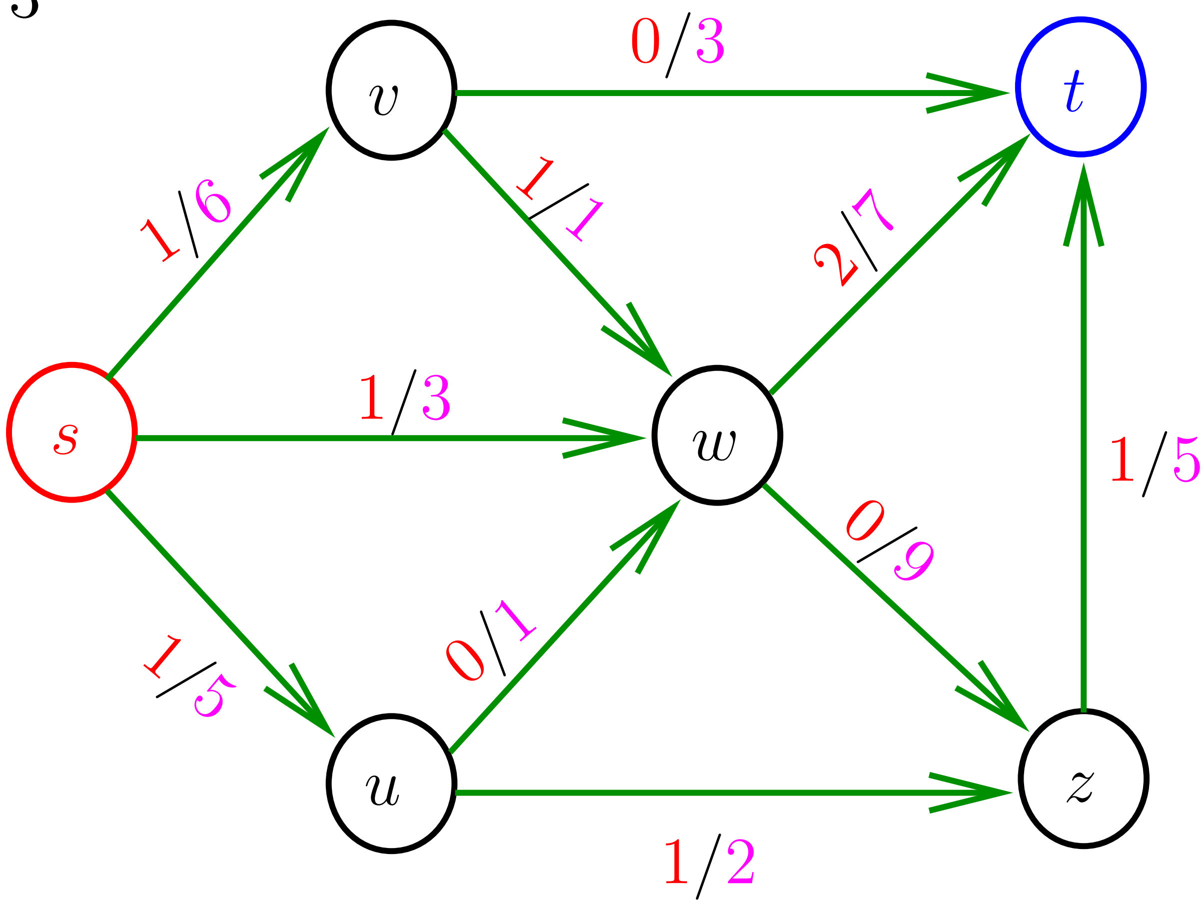
Método dos caminhos de incremento

val$(x) = 2$ $\qquad x(ij)/u(ij)$



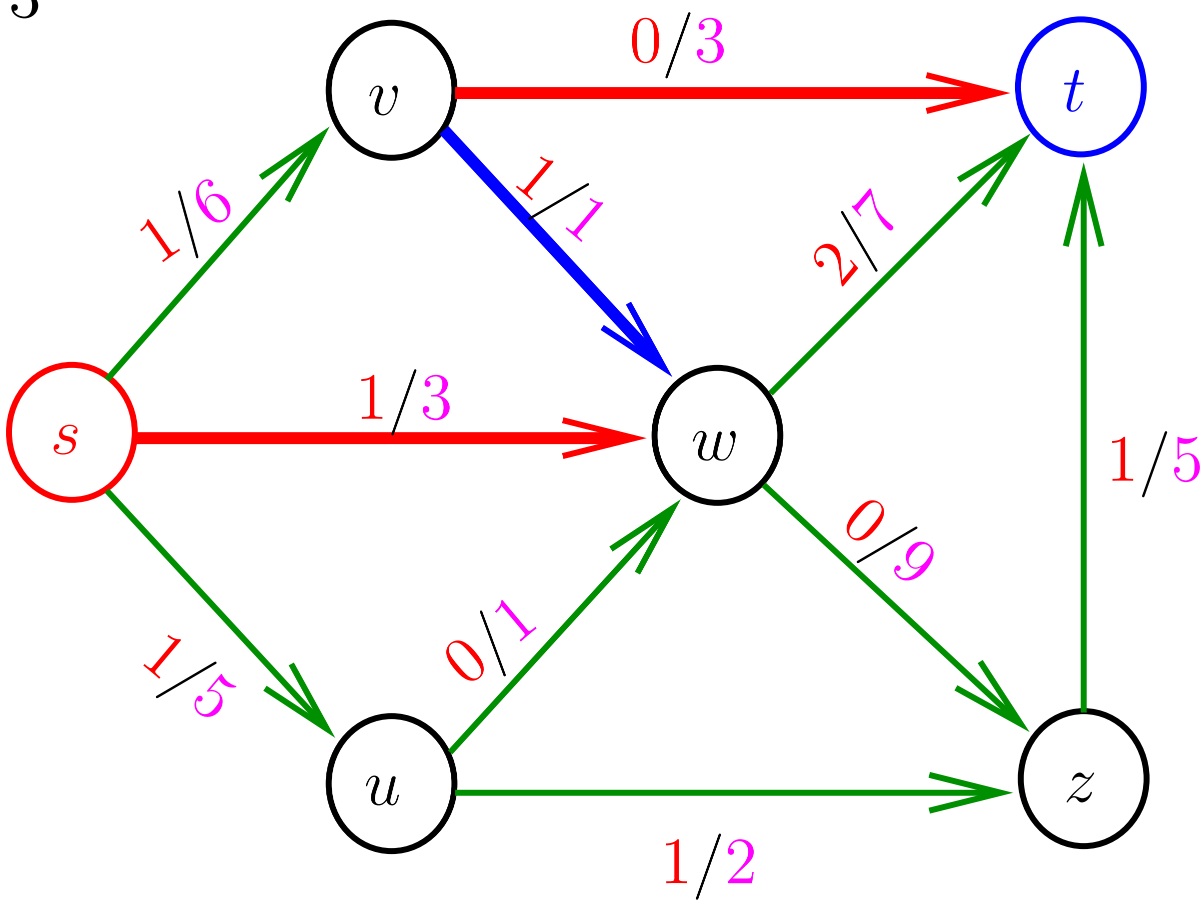
Método dos caminhos de incremento

val$(x) = 3$ $\qquad x(ij)/u(ij)$



Método dos caminhos de incremento

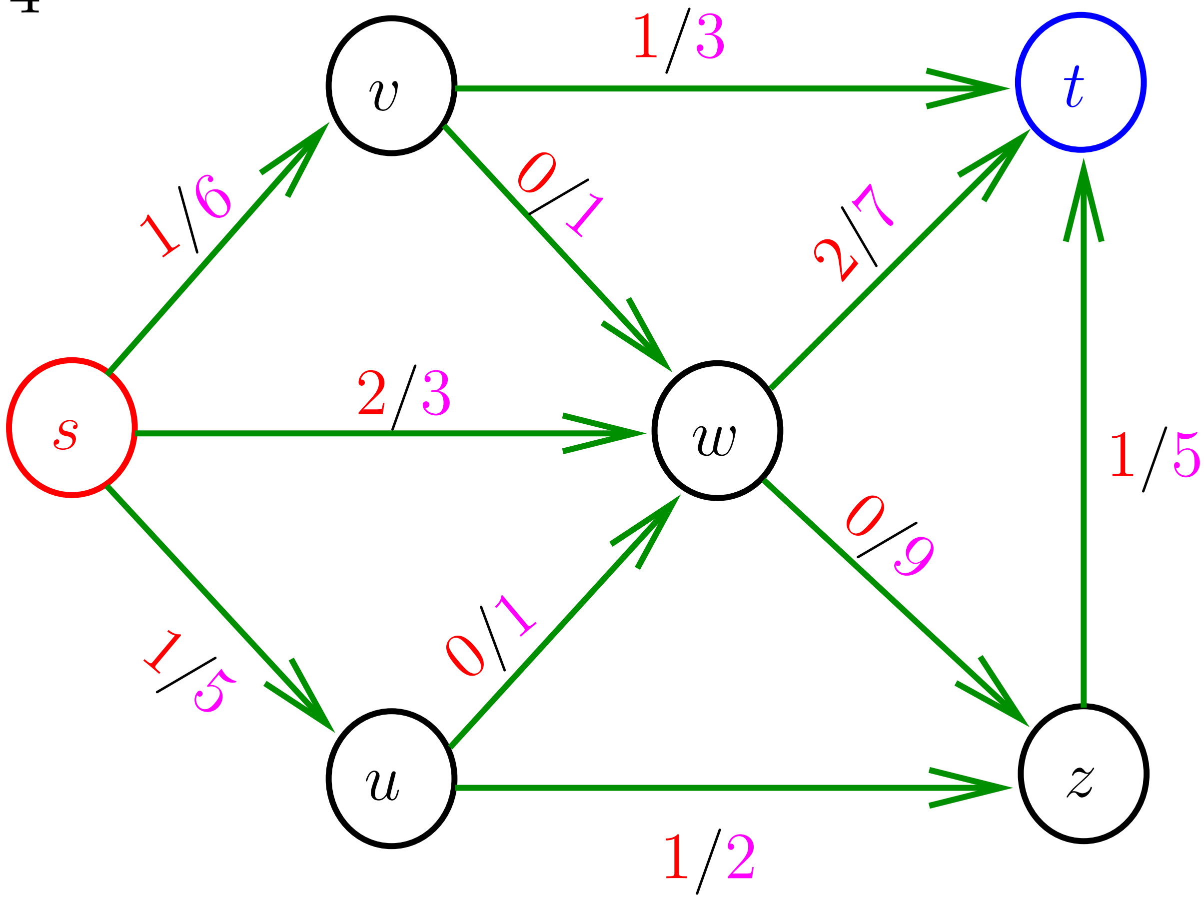
$\text{val}(x) = 3$ $\qquad x(ij)/u(ij)$



Método dos caminhos de incremento

val$(x) = 4$

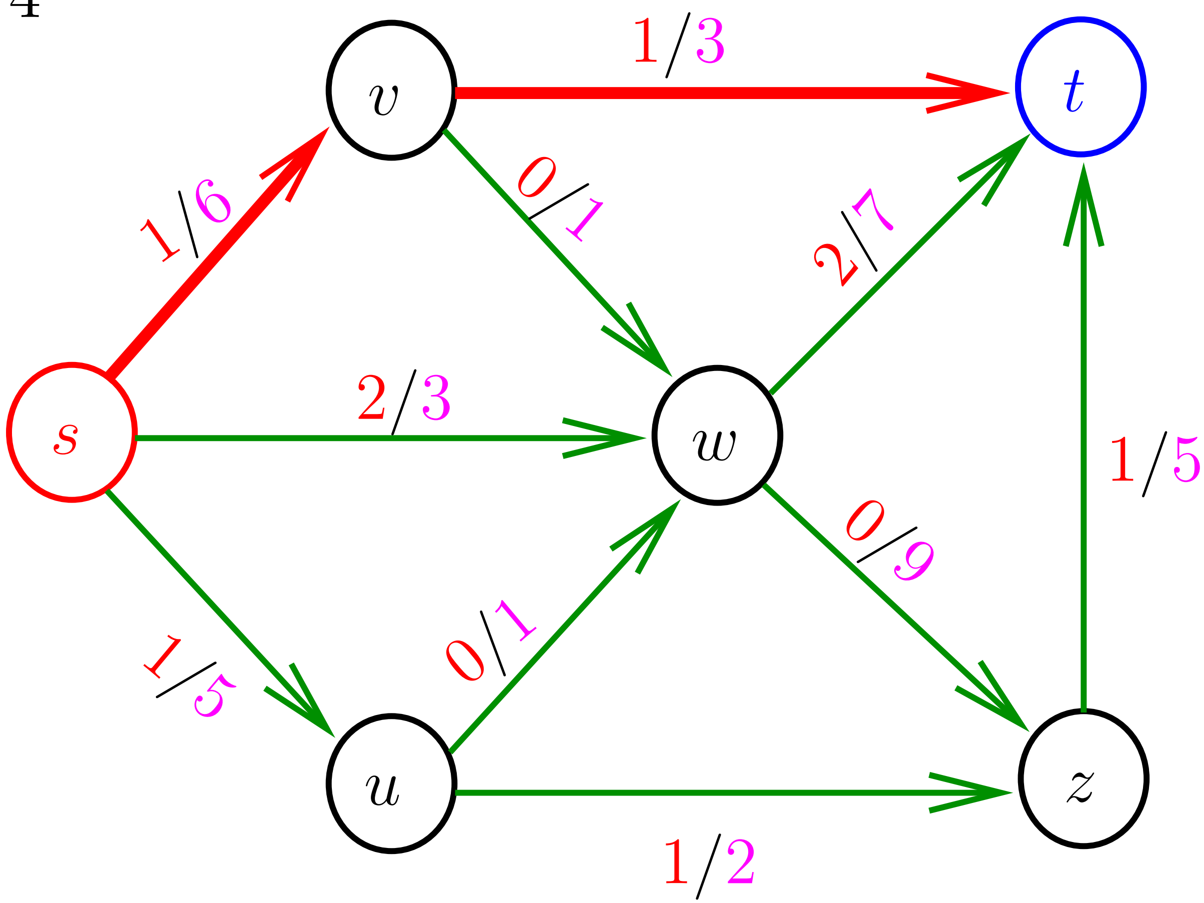
$x(ij)/u(ij)$



Método dos caminhos de incremento

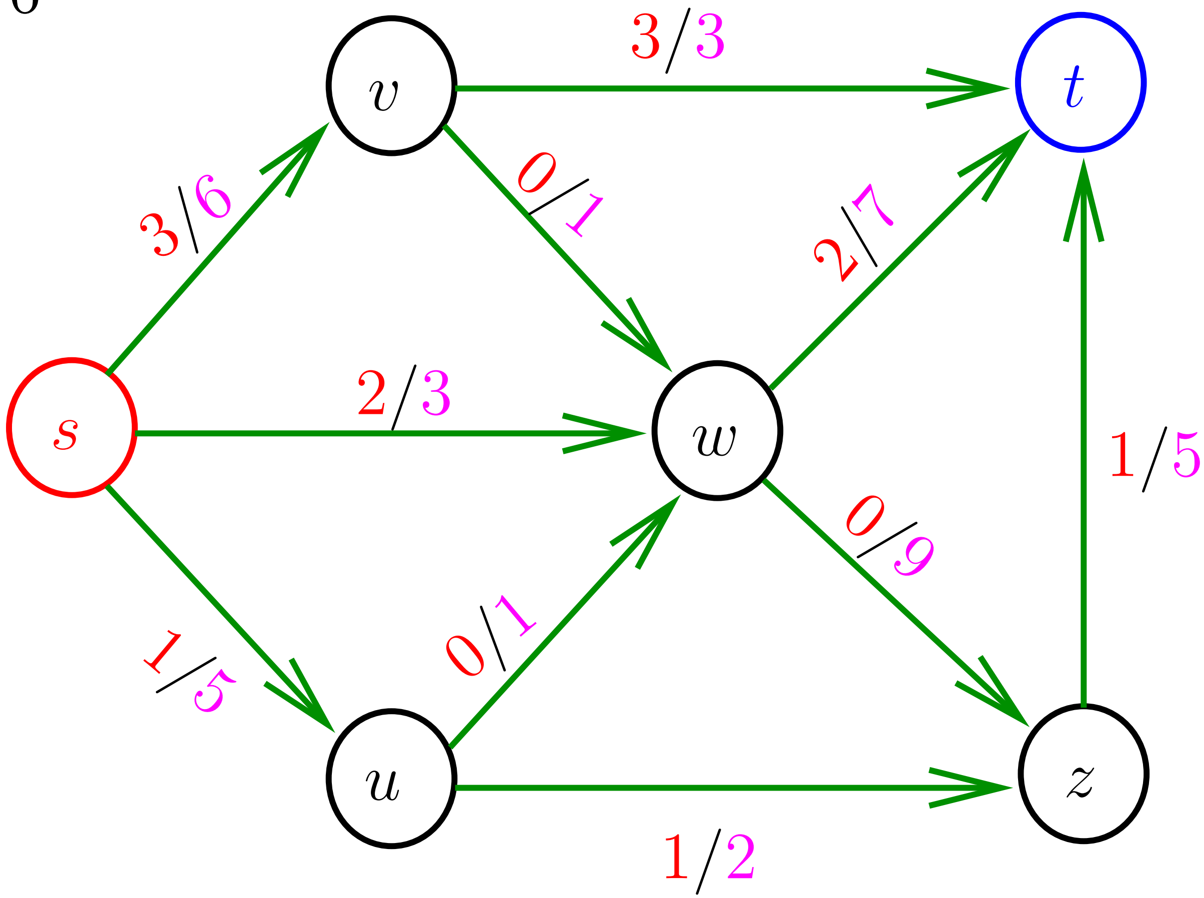
$\text{val}(x) = 4$

$x(ij)/u(ij)$

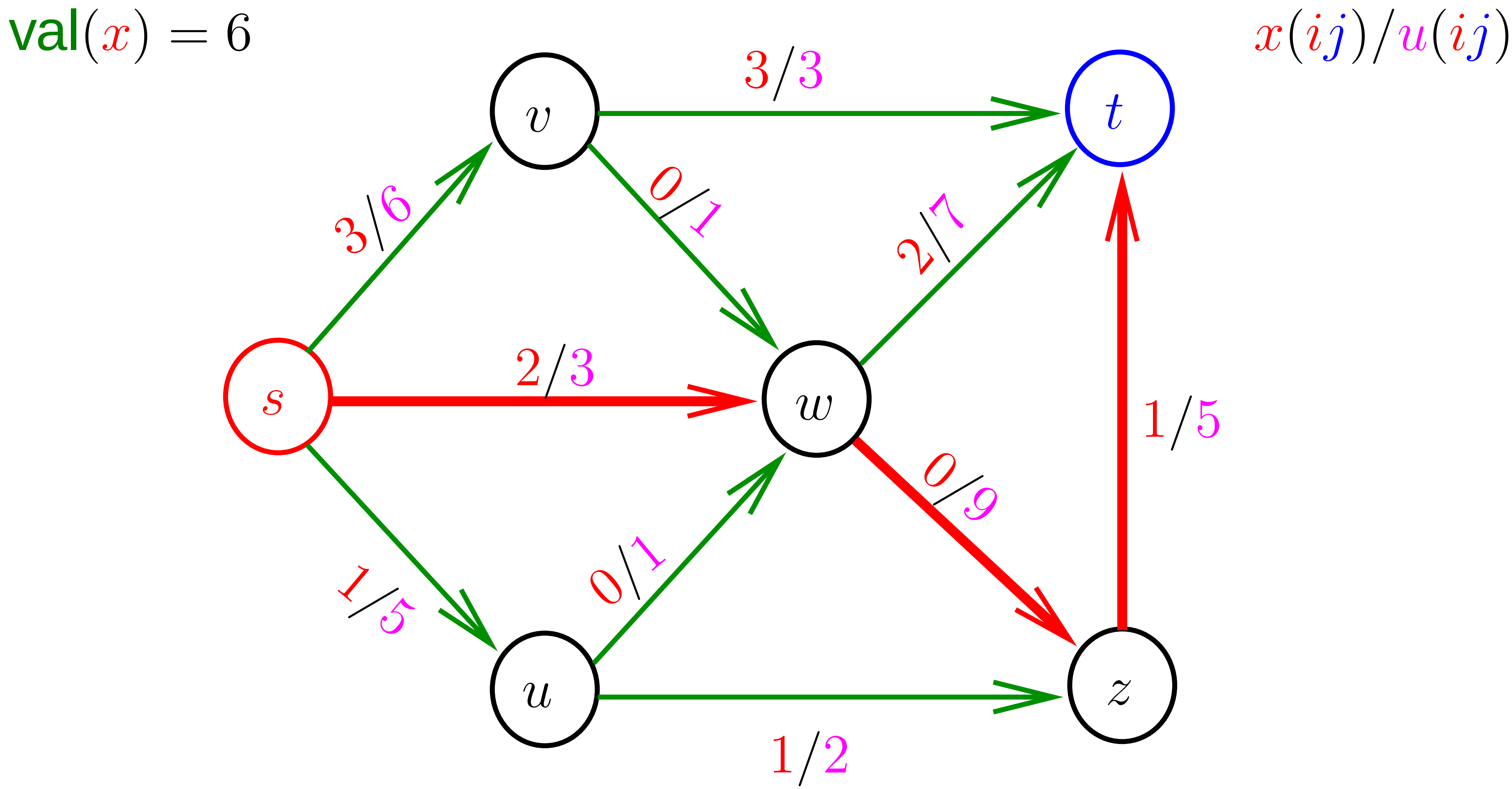


Método dos caminhos de incremento

$\text{val}(x) = 6$ $\qquad$ $x(ij)/u(ij)$



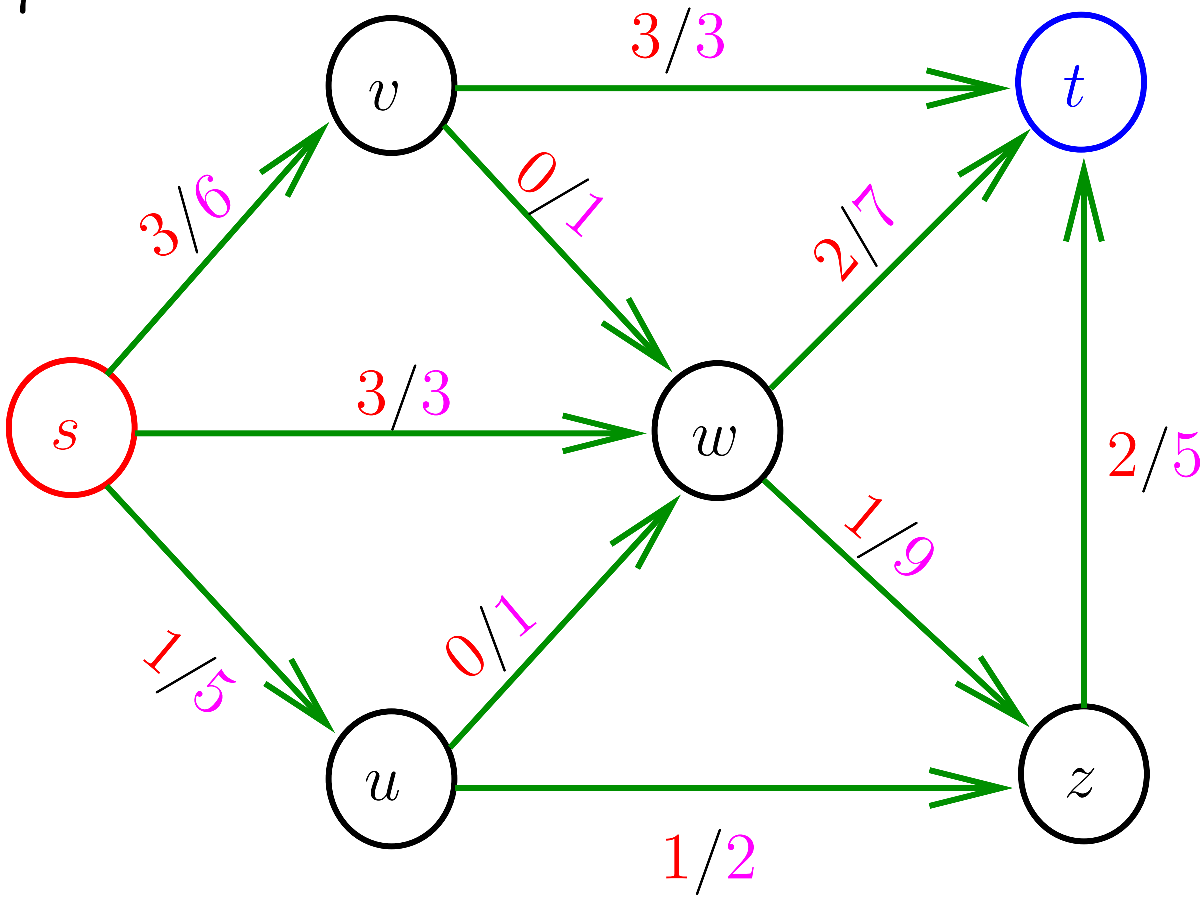
Método dos caminhos de incremento



Método dos caminhos de incremento

$\text{val}(x) = 7$

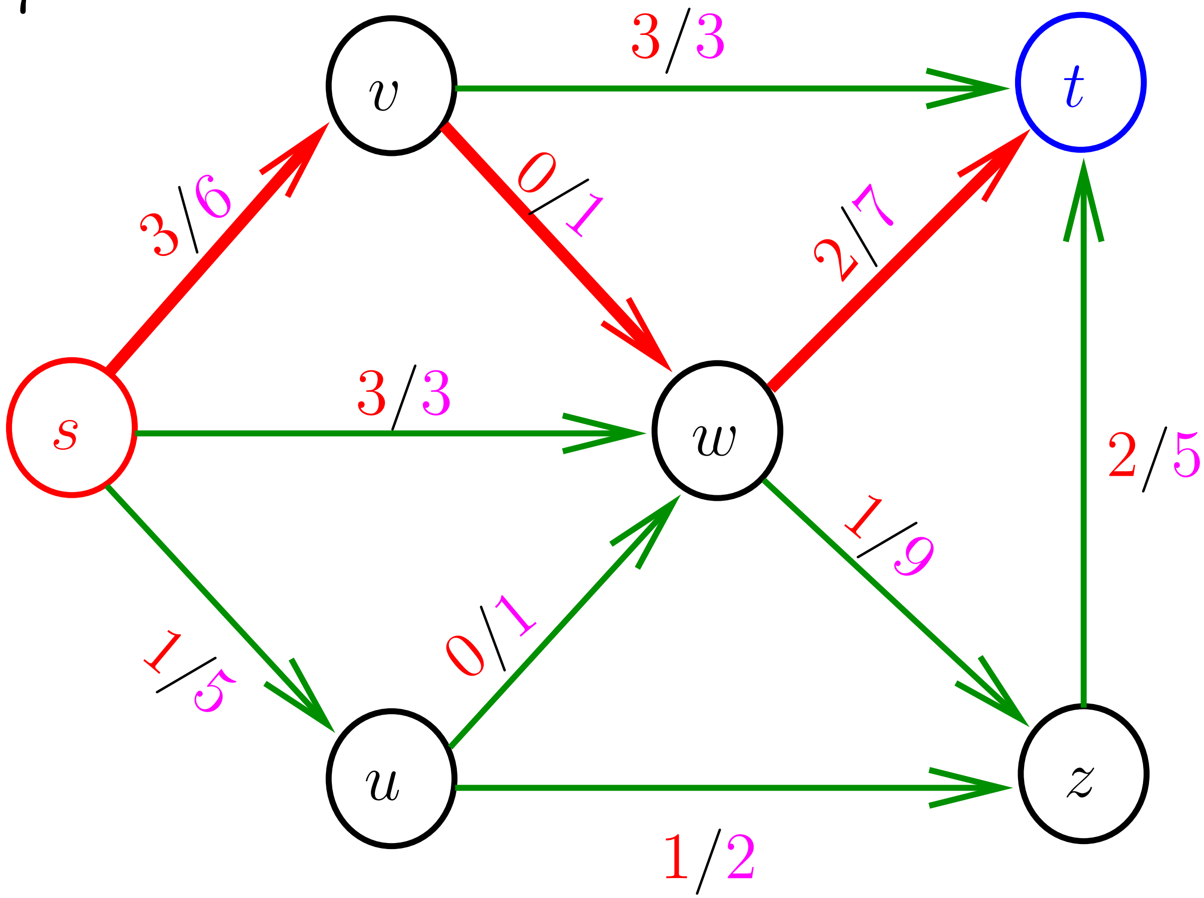
$x(ij)/u(ij)$



Método dos caminhos de incremento

$\text{val}(x) = 7$

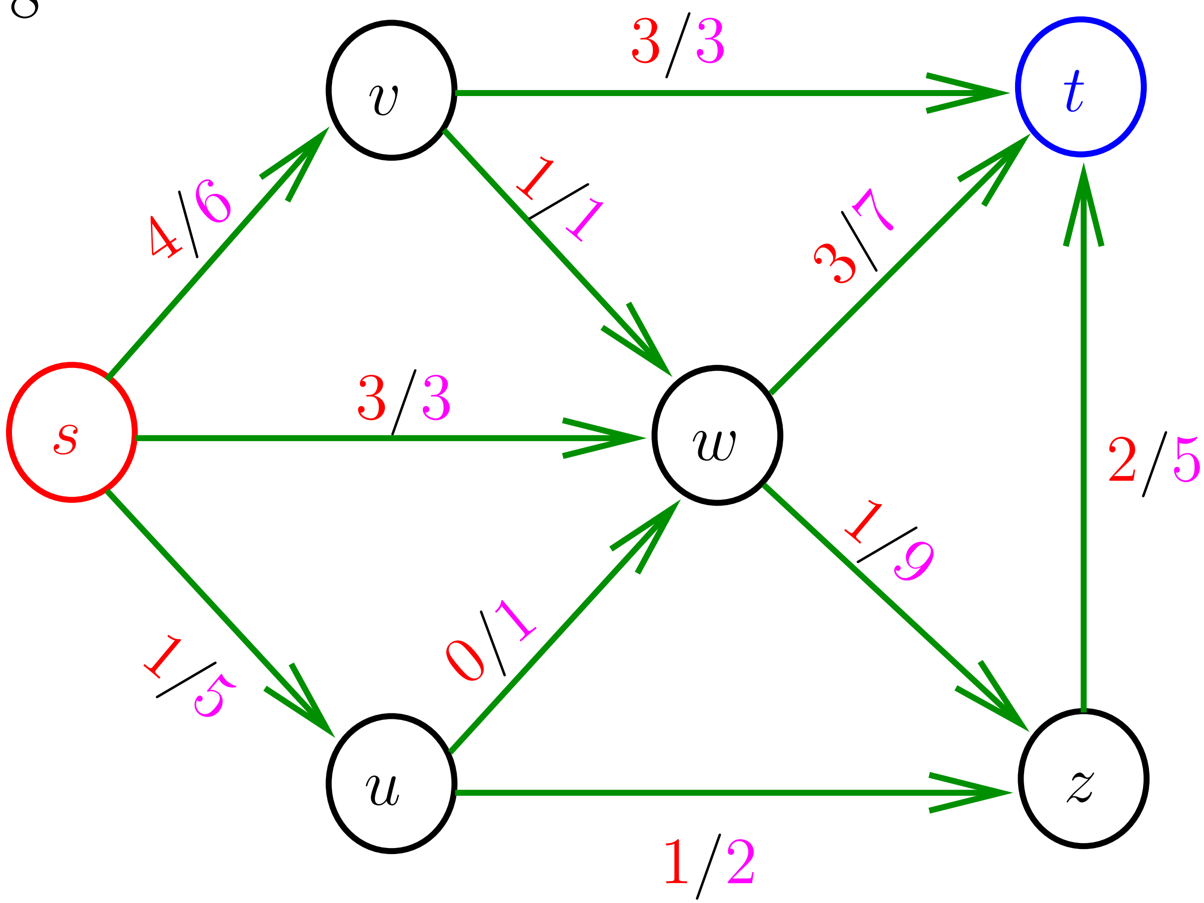
$x(ij)/u(ij)$



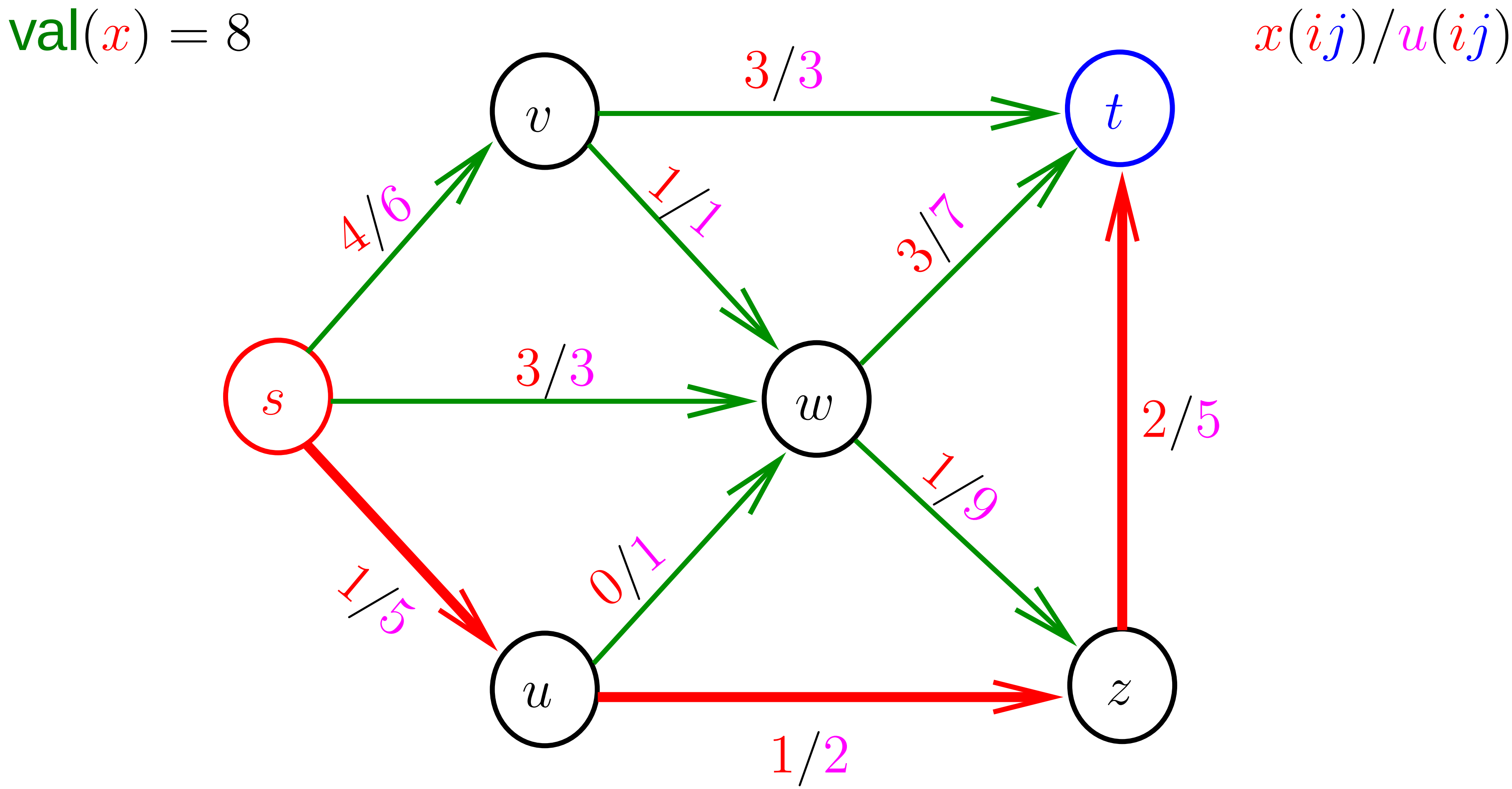
Método dos caminhos de incremento

val$(x) = 8$

$x(ij)/u(ij)$



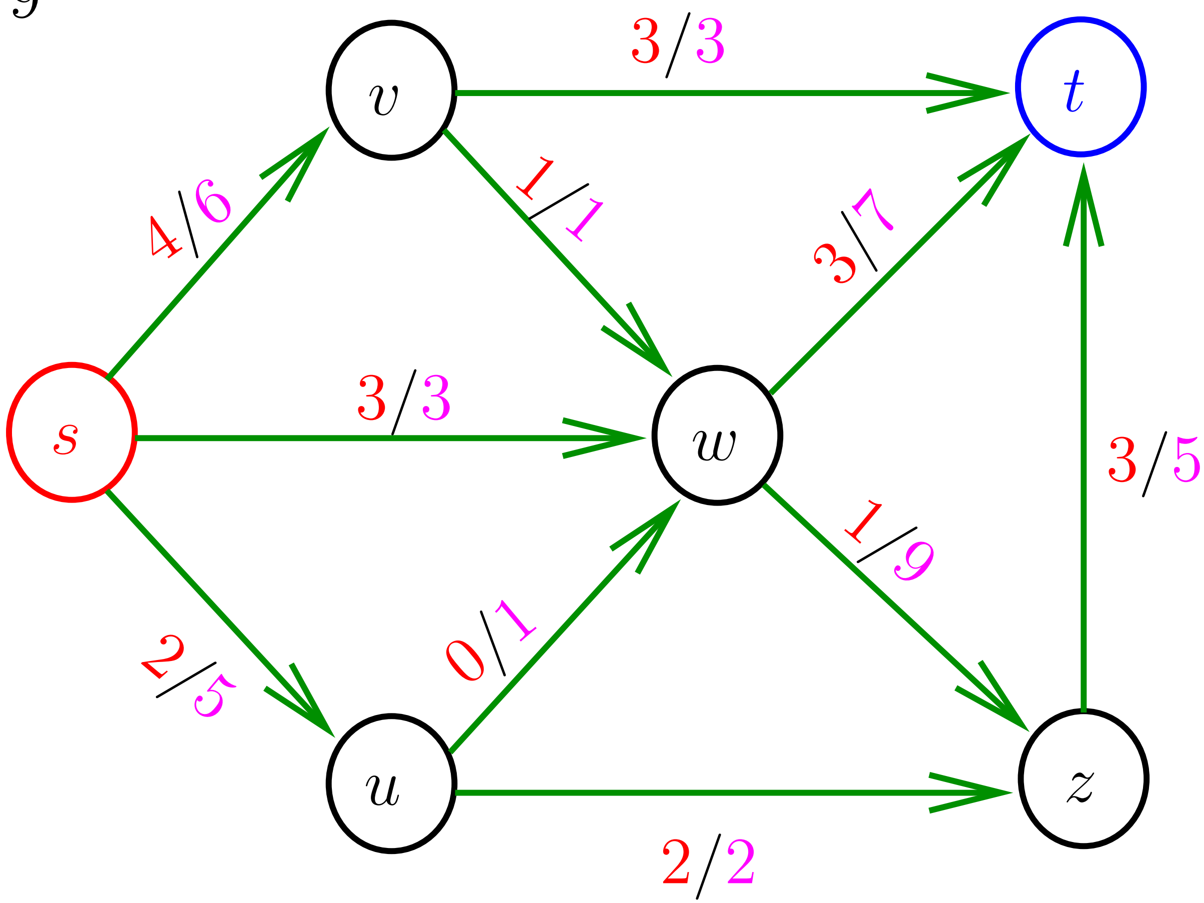
Método dos caminhos de incremento



Método dos caminhos de incremento

val$(x) = 9$

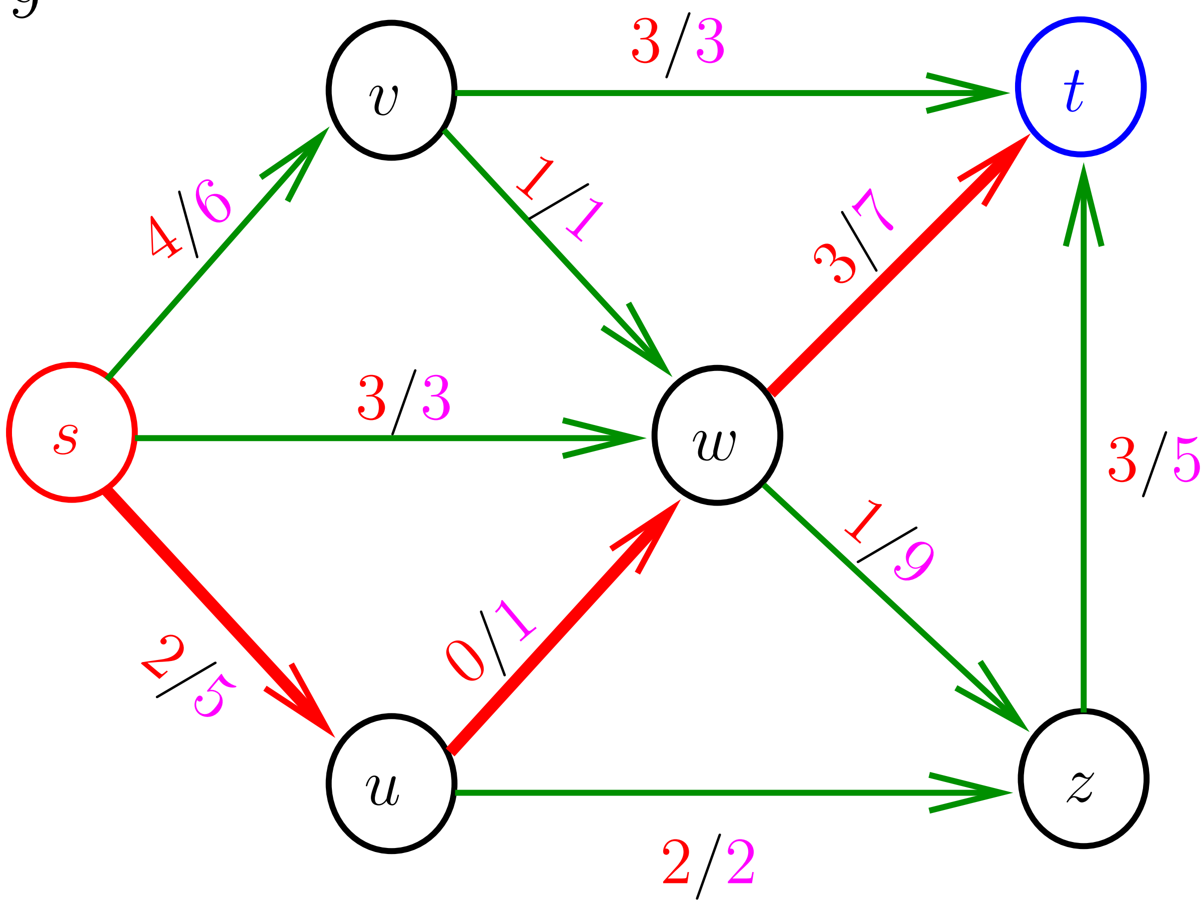
$x(ij)/u(ij)$



Método dos caminhos de incremento

val$(x) = 9$

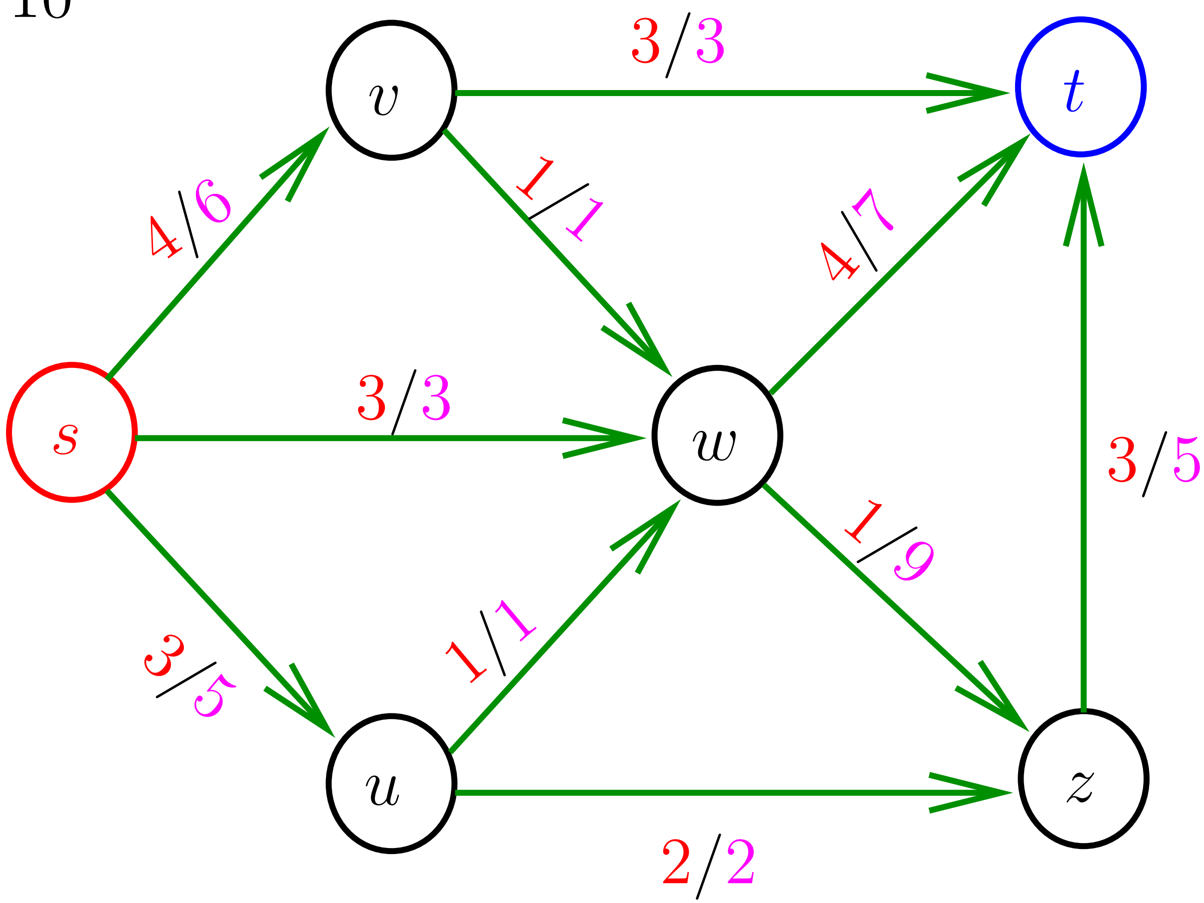
$x(ij)/u(ij)$



Método dos caminhos de incremento

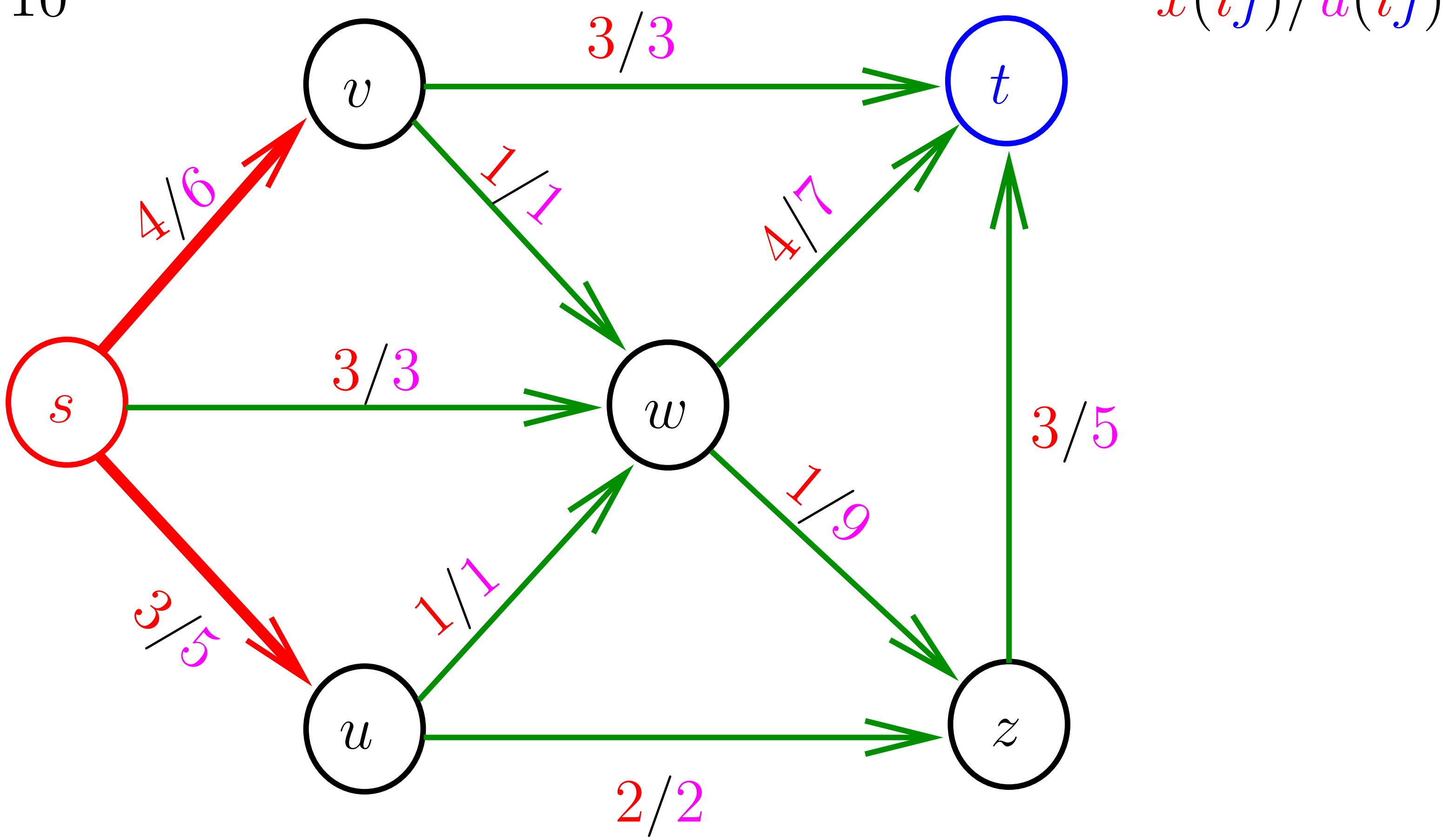
$\mathsf{val}(x) = 10$

$x(ij)/u(ij)$



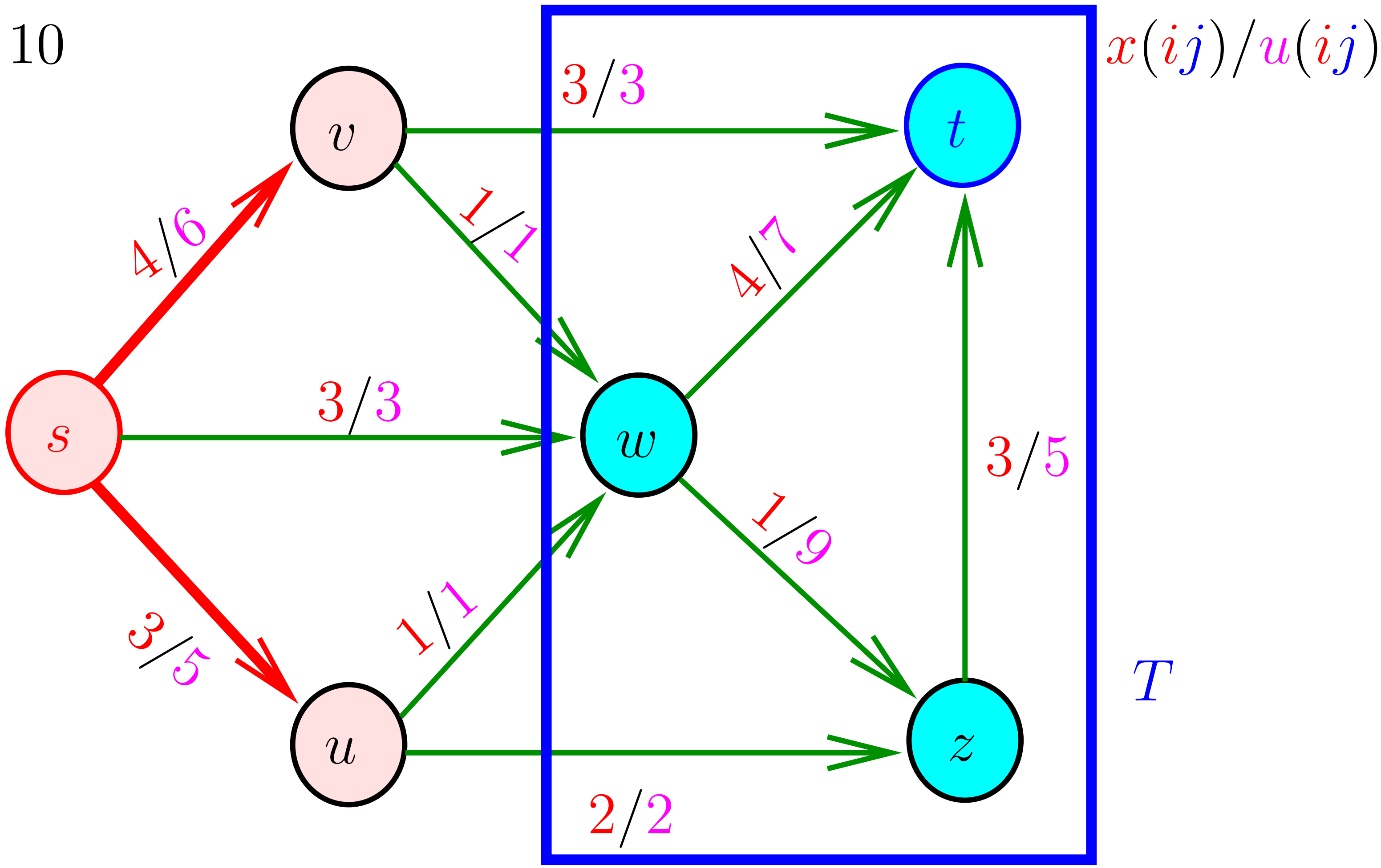
Método dos caminhos de incremento

val$(x) = 10$



Método dos caminhos de incremento

val$(x) = 10$



Algoritmo de Ford e Fulkerson (esboço)

Recebe uma rede (N, A, u) com função-capacidade u e nós s e t e **devolve** um st fluxo máximo x e um st-corte mínimo $\nabla(\overline{T}, T)$.

FORD-FULKERSON (N, A, u, s, t)

$x \leftarrow 0$

repita

$\quad A_x \leftarrow \{ij \in A : x(ij) < u(ij)\} \cup \{ji : x(ij) > 0\}$

$\quad \langle y, P\rangle \leftarrow$ BUSCA(N, A_x, s, t)

$\quad$ **se** $y(t) - y(s) = 0$

$\quad\quad$ **então** $x \leftarrow$ INCREMENTE-FLUXO(x, P)

até que $y(t) - y(s) > 0$

$T \leftarrow \{j : y(j) - y(s) > 0\}$

devolva x e T

Algoritmo de incremento (esboço)

Recebe um st-fluxo x e um pseudo-caminho de incremento P e devolve o fluxo x após enviar "δ unidades de fluxo através de P".

INCREMENTE-FLUXO (x, P)

$\delta_1 \leftarrow \min\{x(ij) : ij$ é arco de $\overleftarrow{P}\}$

$\delta_2 \leftarrow \min\{u(ij) - x(ij) : ij$ é arco de $\overrightarrow{P}\}$

$\delta \leftarrow \min\{\delta_1, \delta_2\}$

para cada arco ij em P **faça**

    se $ij \in \overrightarrow{P}$

        então $x(ij) \leftarrow x(ij) + \delta$

        senão $x(ij) \leftarrow x(ij) - \delta$

devolva x

Invariante

Na linha 2 e na linha 7 valem as seguintes invariantes:

(i0) x é inteiro;

(i1) x é um st-fluxo;

(i2) x respeita u.

Correção

- Depois da última iteração das linhas 2–7, x é um st-fluxo que respeita u;
- T definido na linha 8 separa s de t.
- Como y é um 0-potencial em (N, A_x) então $x(ij) = u(ij)$ para cada arco ij em $\nabla(\overline{T}, T)$ e $x(ij) = 0$ para cada arco ij em $\nabla(T, \overline{T})$.

Logo,

$$\begin{aligned}\text{val}(x) &= x(\overline{T}, T) - x(T, \overline{T}) \\ &= x(\overline{T}, T) \\ &= u(\overline{T}, T)\end{aligned}$$

Conclusão: o algoritmo faz o que promete.

Teorema da integralidade

O fato a seguir é um conseqüência da correção do algoritmo FORD-FULKERSON.

Se (N, A, u) é um rede com função-capacidade u de A em $\mathbb{Z}_{\geq}$, então existe um fluxo de valor máximo com valores inteiros.

Consumo de tempo

O número de execuções do bloco de linhas 2–7 é

$$< nU,$$

onde $U := \max\{u(ij) : ij \in A\}$.

linha	consumo de todas as execuções da linha
1	$\mathrm{O}(m)$
3	$nU\,\mathrm{O}(m) = \mathrm{O}(nmU)$
4	$nU\,\mathrm{O}(n+m) = \mathrm{O}(nmU)$
5	$\mathrm{O}(nU)$
6	$nU\,\mathrm{O}(m) = \mathrm{O}(nmU)$
total	$\mathrm{O}(m) + \mathrm{O}(nU) + 3\,\mathrm{O}(nmU)$
	$= \mathrm{O}(nmU)$

Conclusão

O algoritmo FORD-FULKERSON faz não mais que nU passos de incremento.

O consumo de tempo do algoritmo FORD-FULKERSON é $\mathrm{O}(mnU)$.

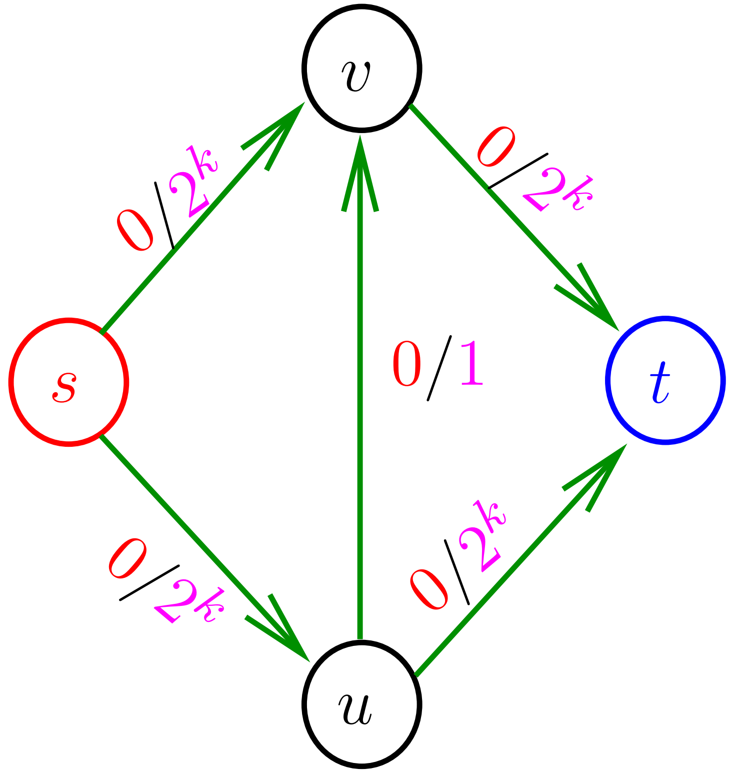
Este consumo de tempo não é polinomial.

Mau exemplo

$U := 2^k$

$\text{val}(x) = 0$

$x(ij)/u(ij)$

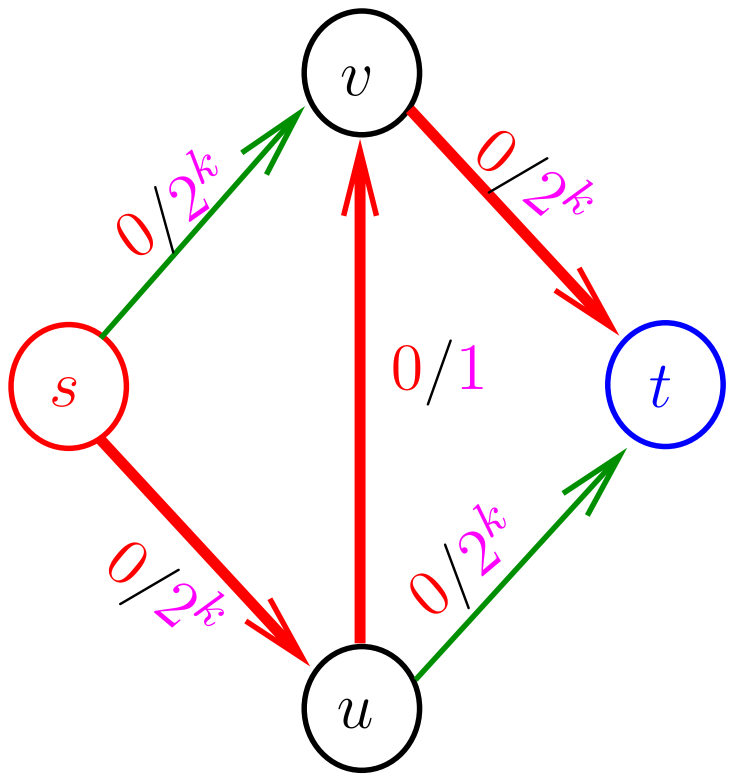


Mau exemplo

$U := 2^k$

$\mathsf{val}(x) = 0$

$x(ij)/u(ij)$

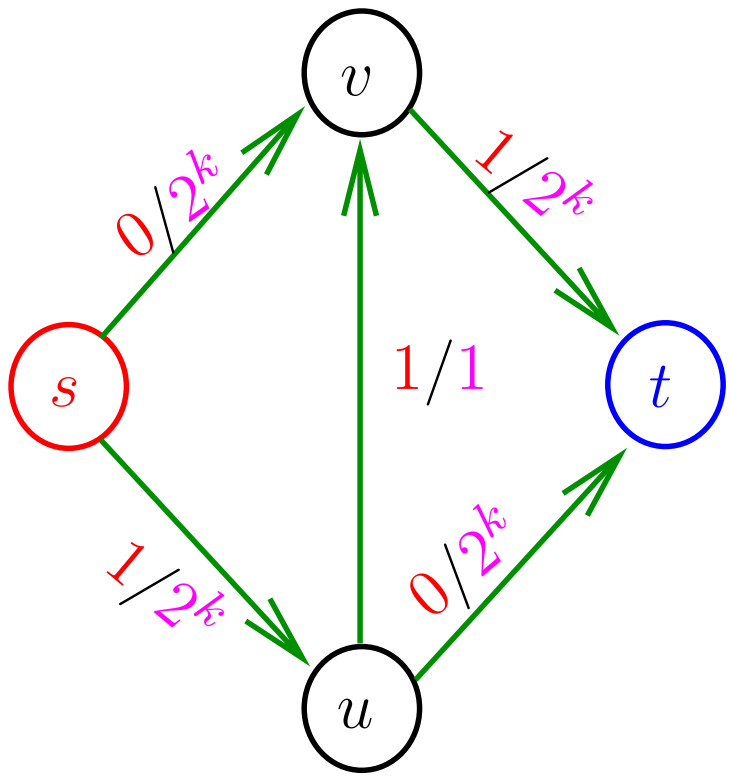


Mau exemplo

$U := 2^k$

val$(x) = 1$

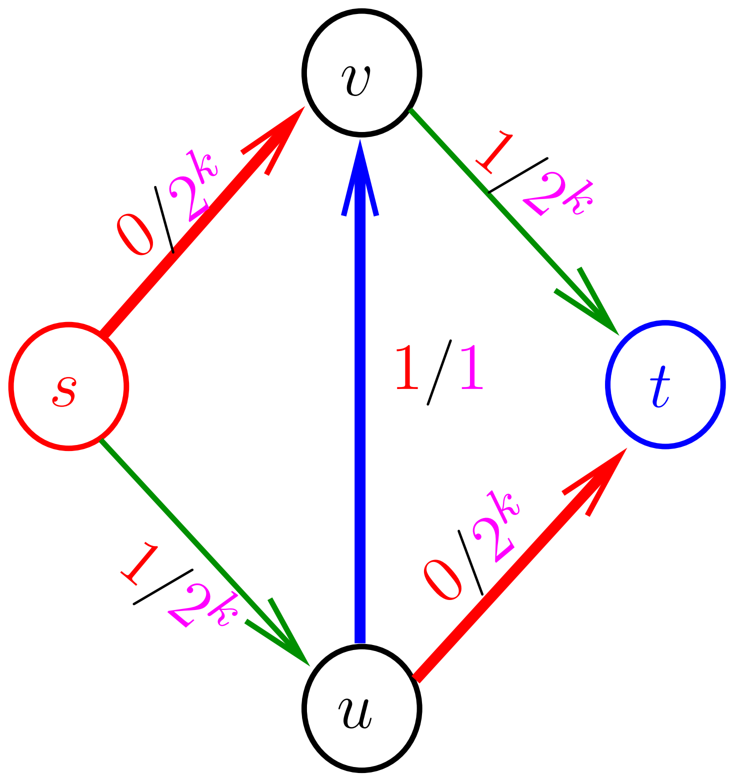
$x(ij)/u(ij)$



Mau exemplo

$U := 2^k$

$\mathsf{val}(x) = 1$ $\qquad$ $x(ij)/u(ij)$

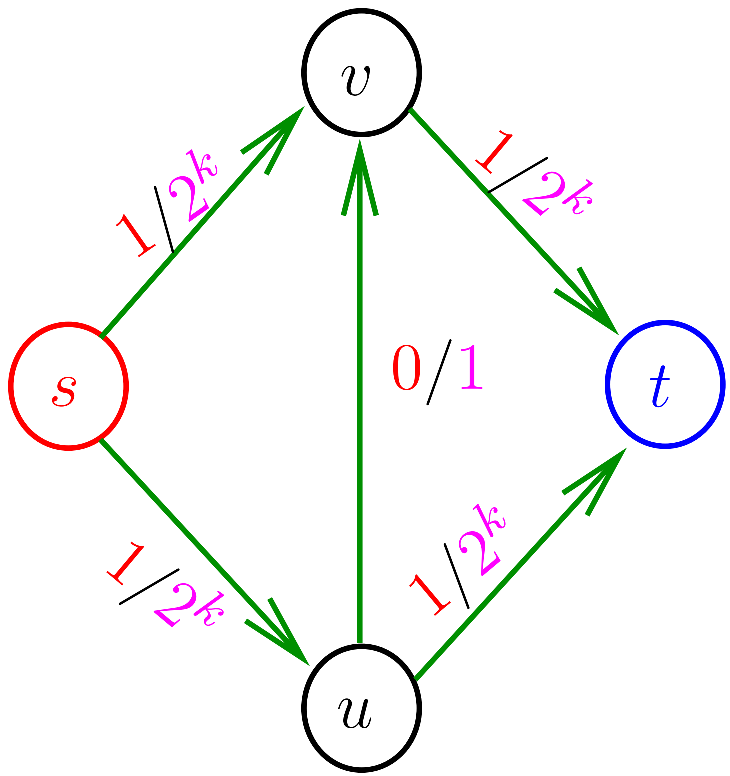


Mau exemplo

$U := 2^k$

$\text{val}(x) = 2$

$x(ij)/u(ij)$

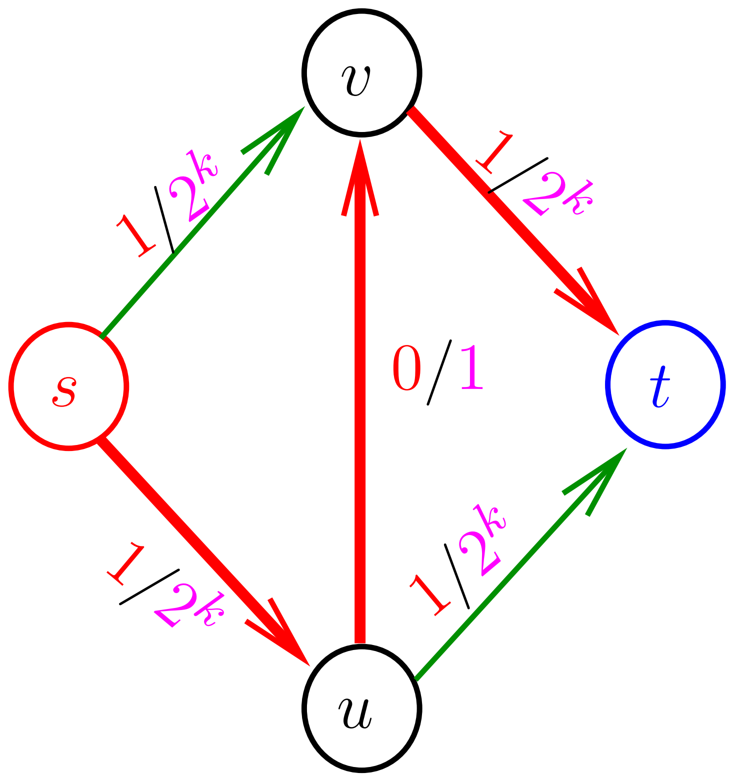


Mau exemplo

$U := 2^k$

$\mathsf{val}(x) = 2$

$x(ij)/u(ij)$

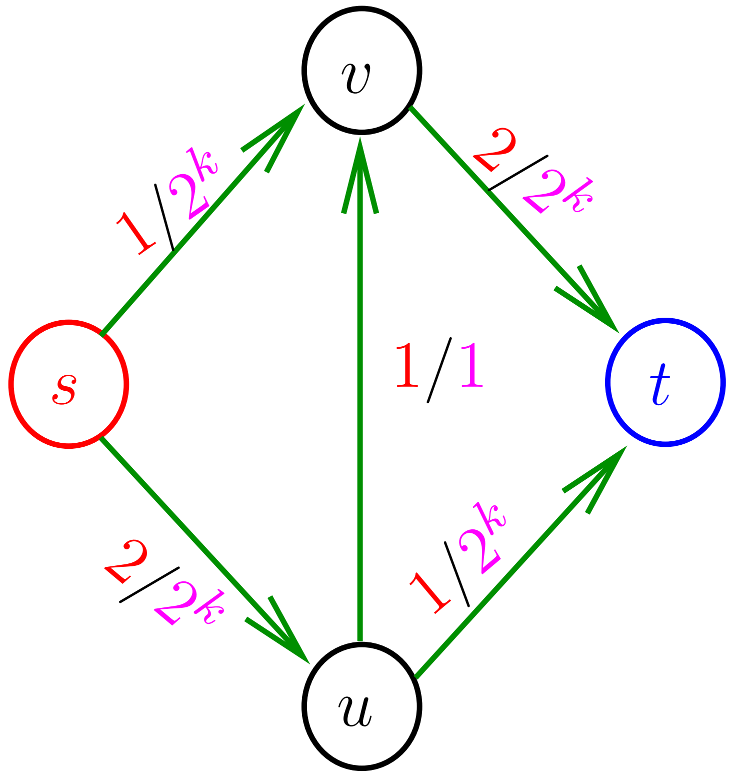


Mau exemplo

$U := 2^k$

$\mathsf{val}(x) = 3$

$x(ij)/u(ij)$

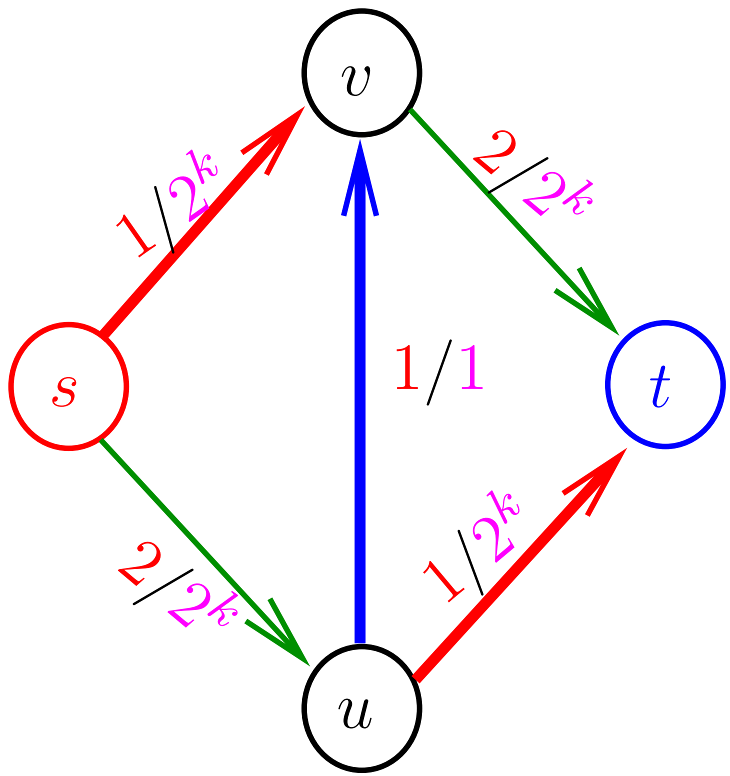


Mau exemplo

$U := 2^k$

$\mathsf{val}(x) = 3$

$x(ij)/u(ij)$

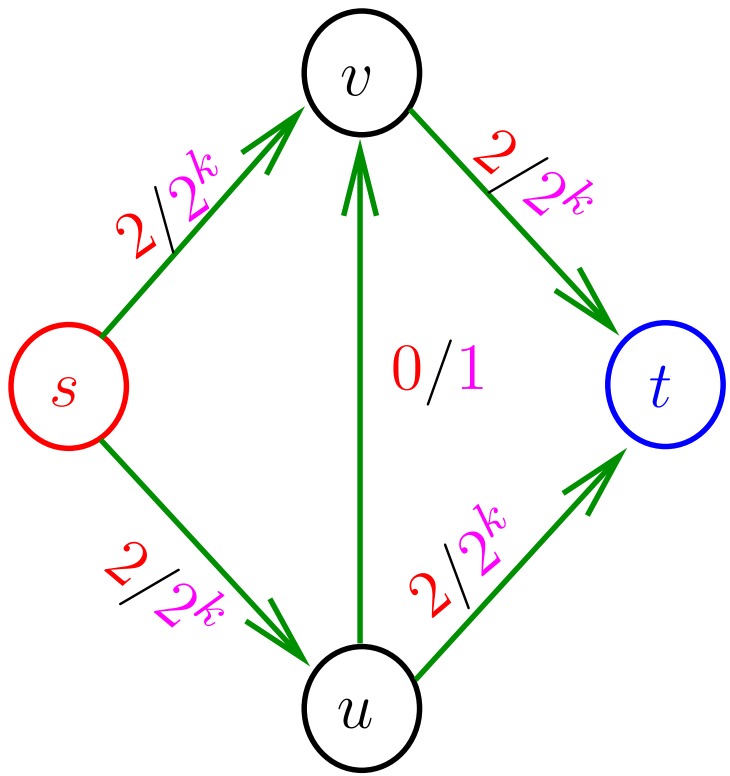


Mau exemplo

$U := 2^k$

$\mathsf{val}(x) = 4$

$x(ij)/u(ij)$

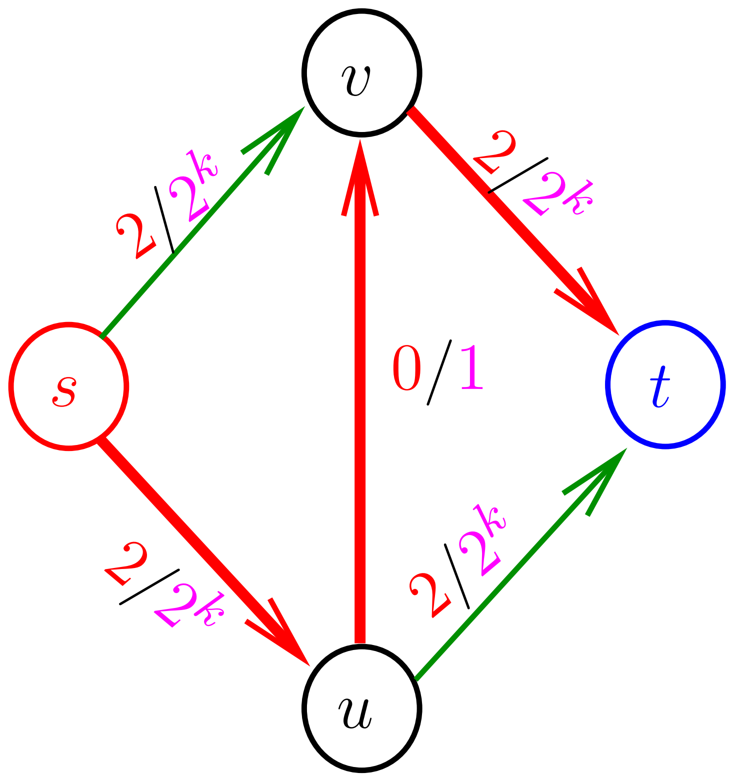


Mau exemplo

$U := 2^k$

val$(x) = 4$

$x(ij)/u(ij)$

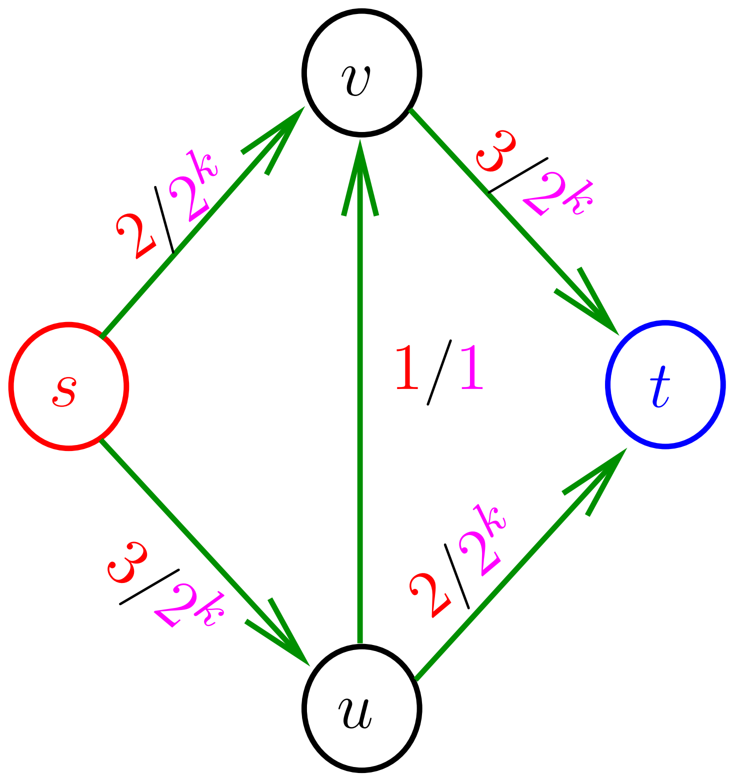


Mau exemplo

$U := 2^k$

$\mathsf{val}(x) = 5$

$x(ij)/u(ij)$

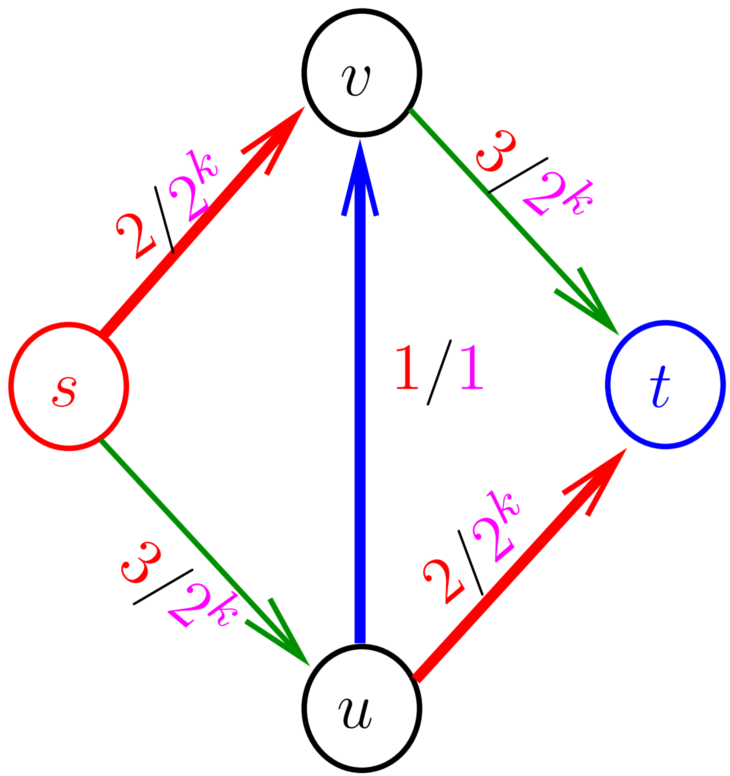


Mau exemplo

$U := 2^k$

val$(x) = 5$

$x(ij)/u(ij)$

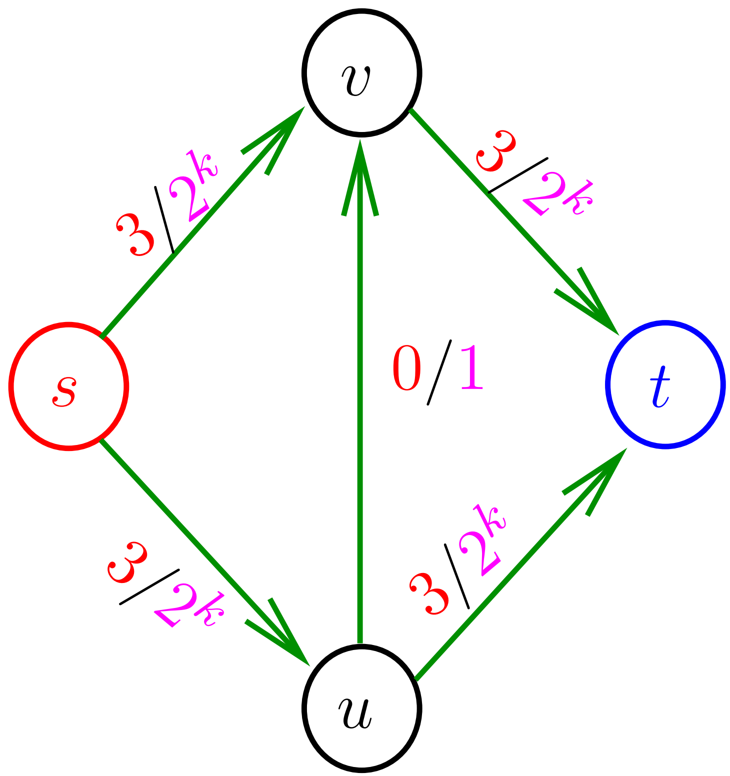


Mau exemplo

$U := 2^k$

$\mathsf{val}(x) = 6$

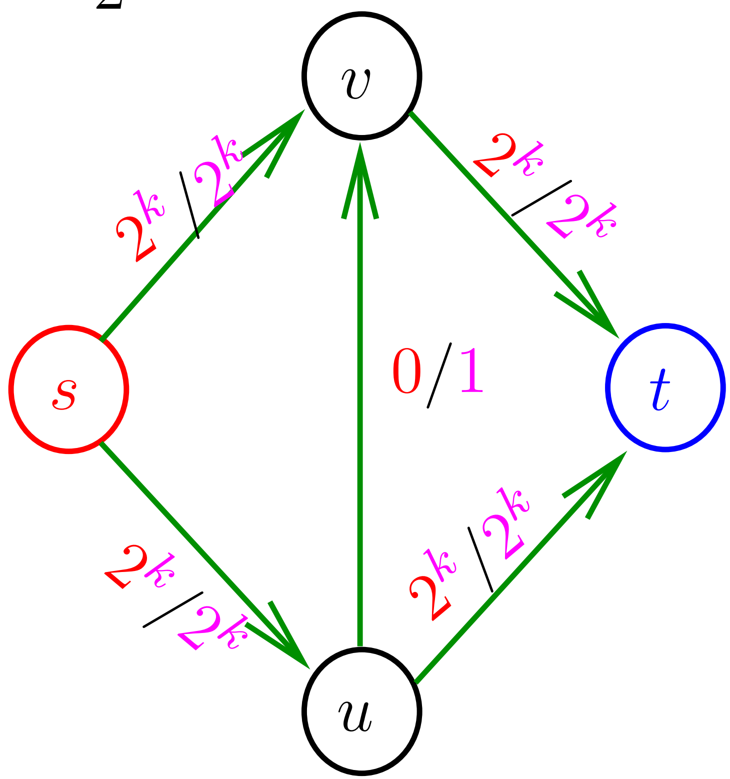
$x(ij)/u(ij)$



Mau exemplo

$U := 2^k$

val$(x) = 2U = 2^{k+1}$ $\qquad$ $x(ij)/u(ij)$



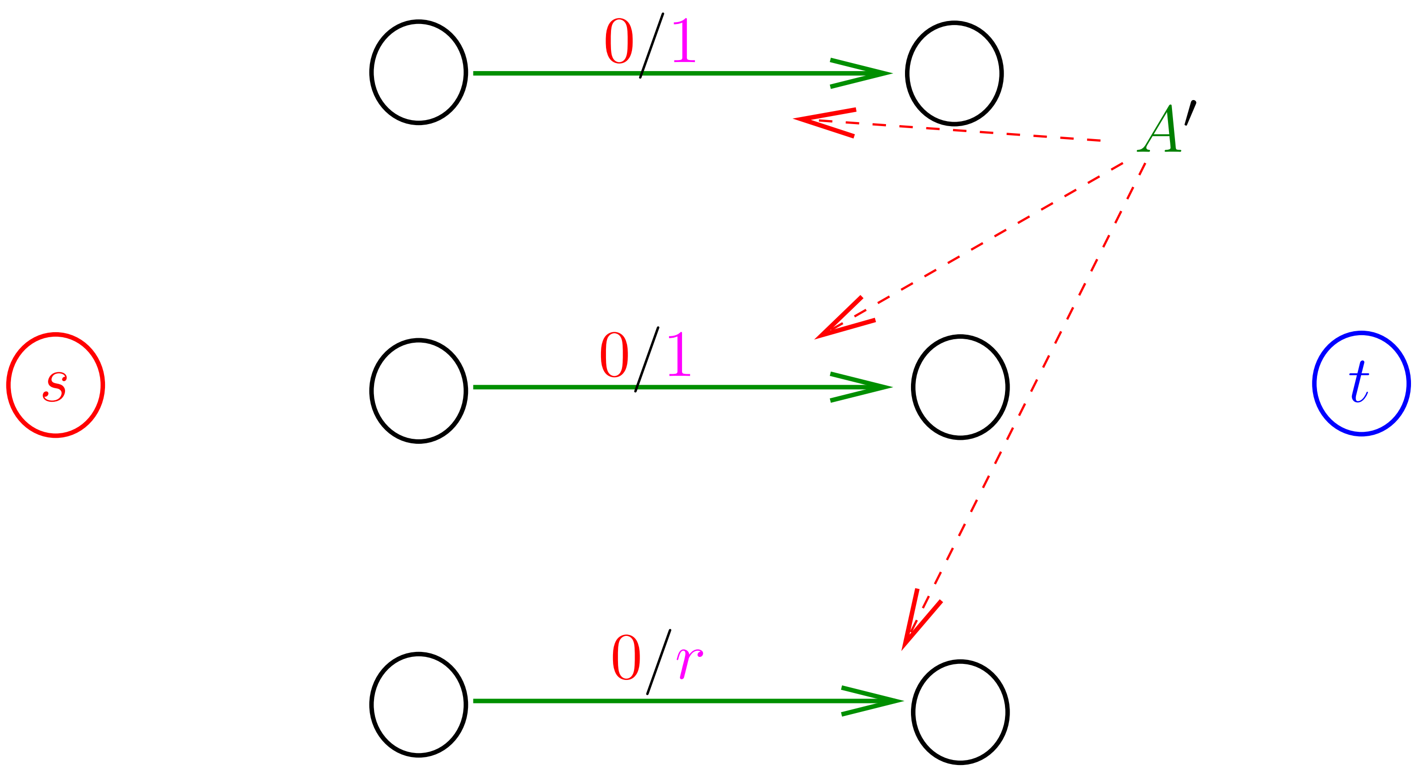
O algoritmo pára após $2U = 2^{k+1}$ passos de incremento.

Fluxos reais

Fluxos reais

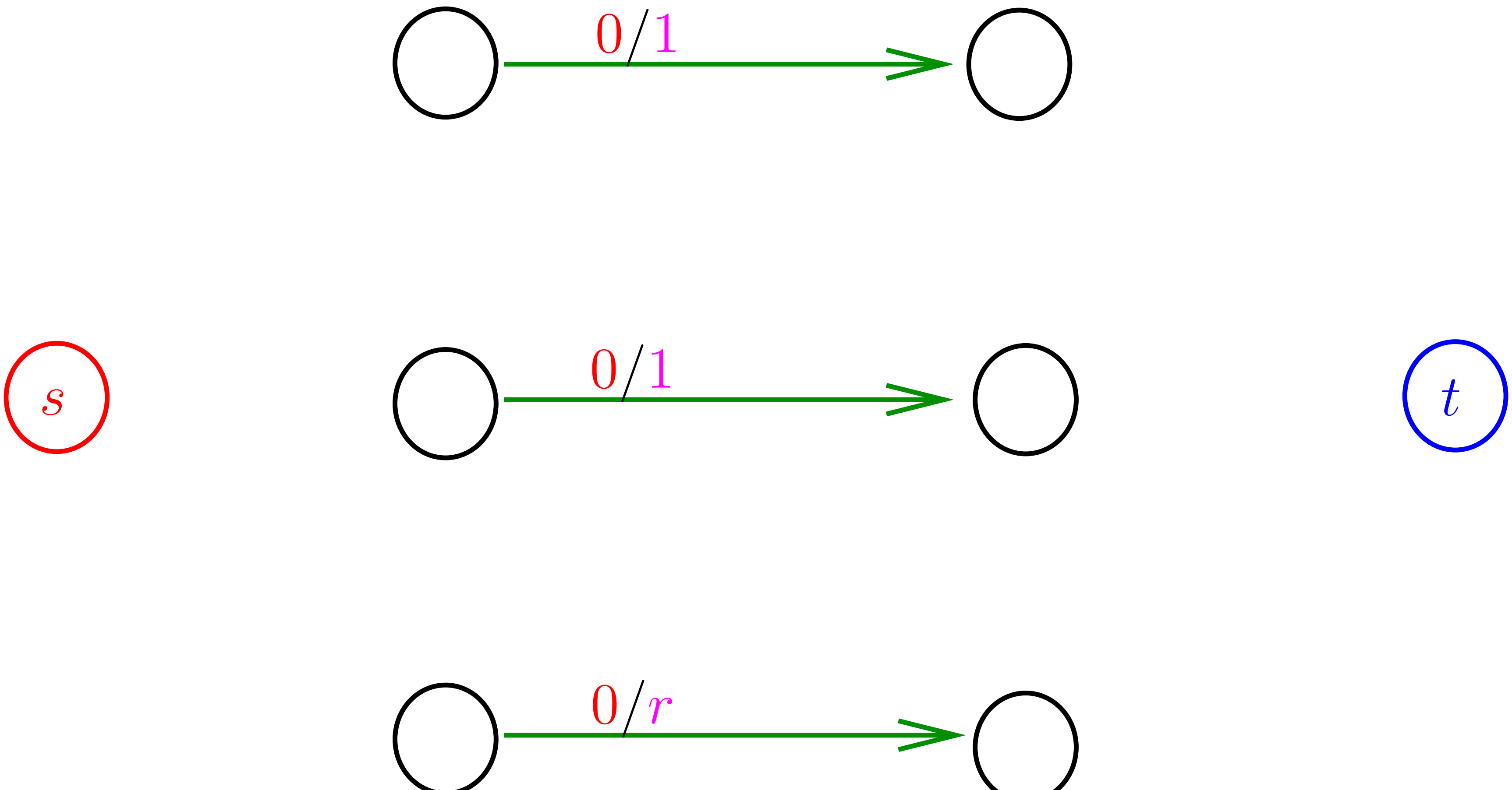
O grafo (N, A) abaixo tem 8 nós e todos os arcos possíveis e $r := (-1+\sqrt{5})/2 < 1$ é a raiz real positiva de $r^2 + r - 1 = 0$. A capacidade dos arcos não desenhados é

$$q > 1/(1-r) = 1 + r + r^2 + \cdots$$



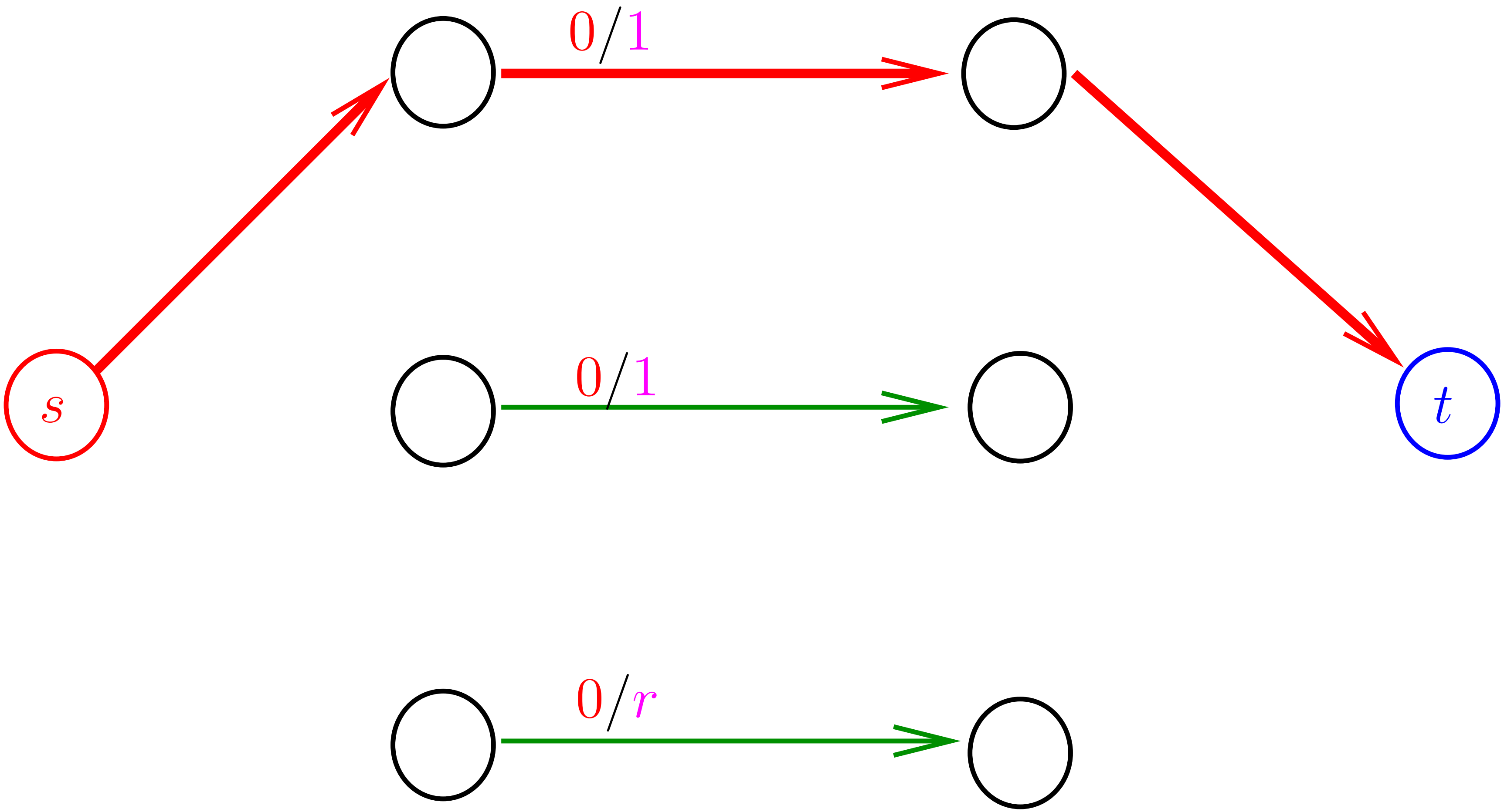
Método dos caminhos de incremento

$\mathsf{val}(x) = 0$



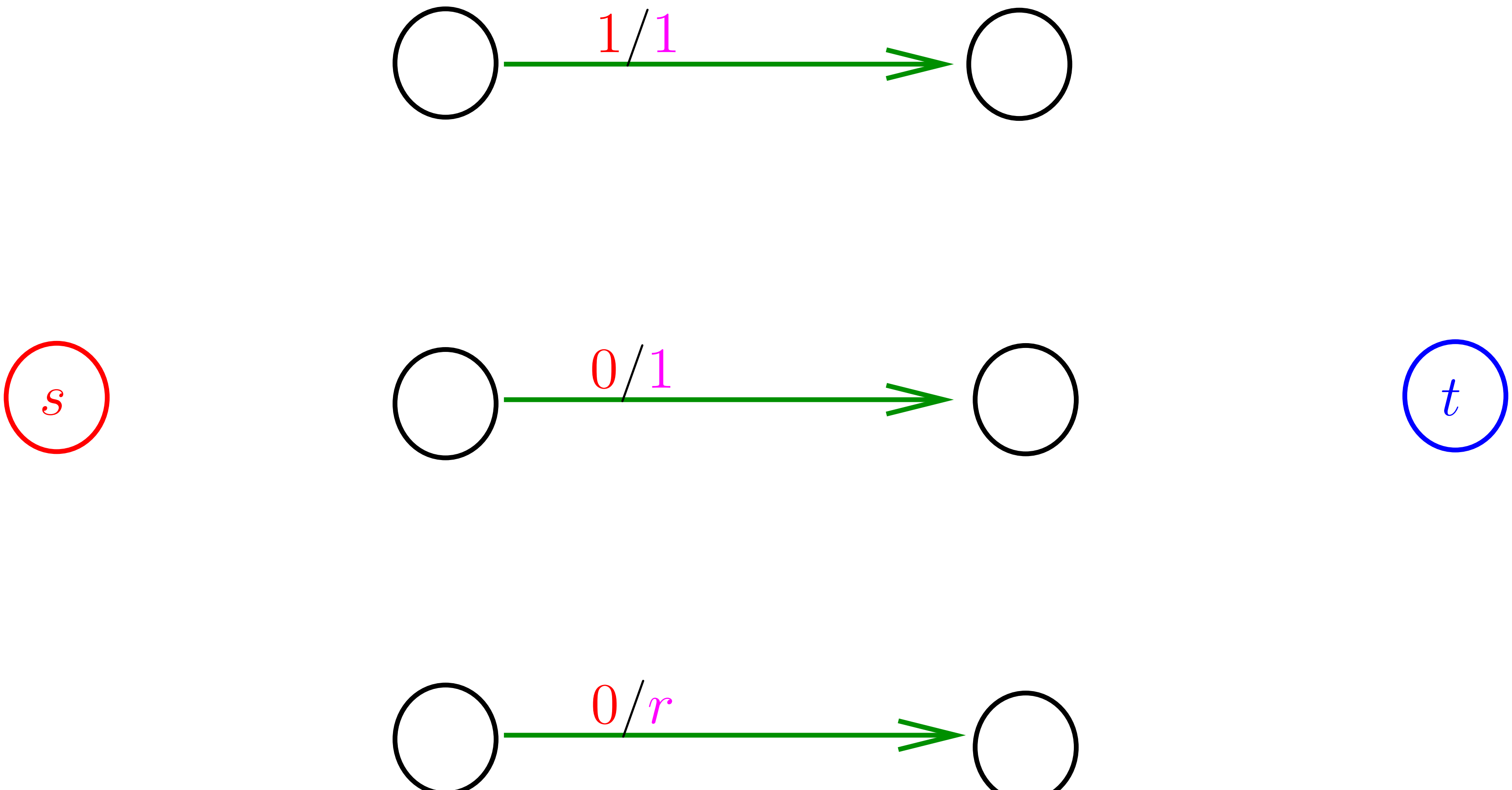
Método dos caminhos de incremento

$\text{val}(x) = 0$



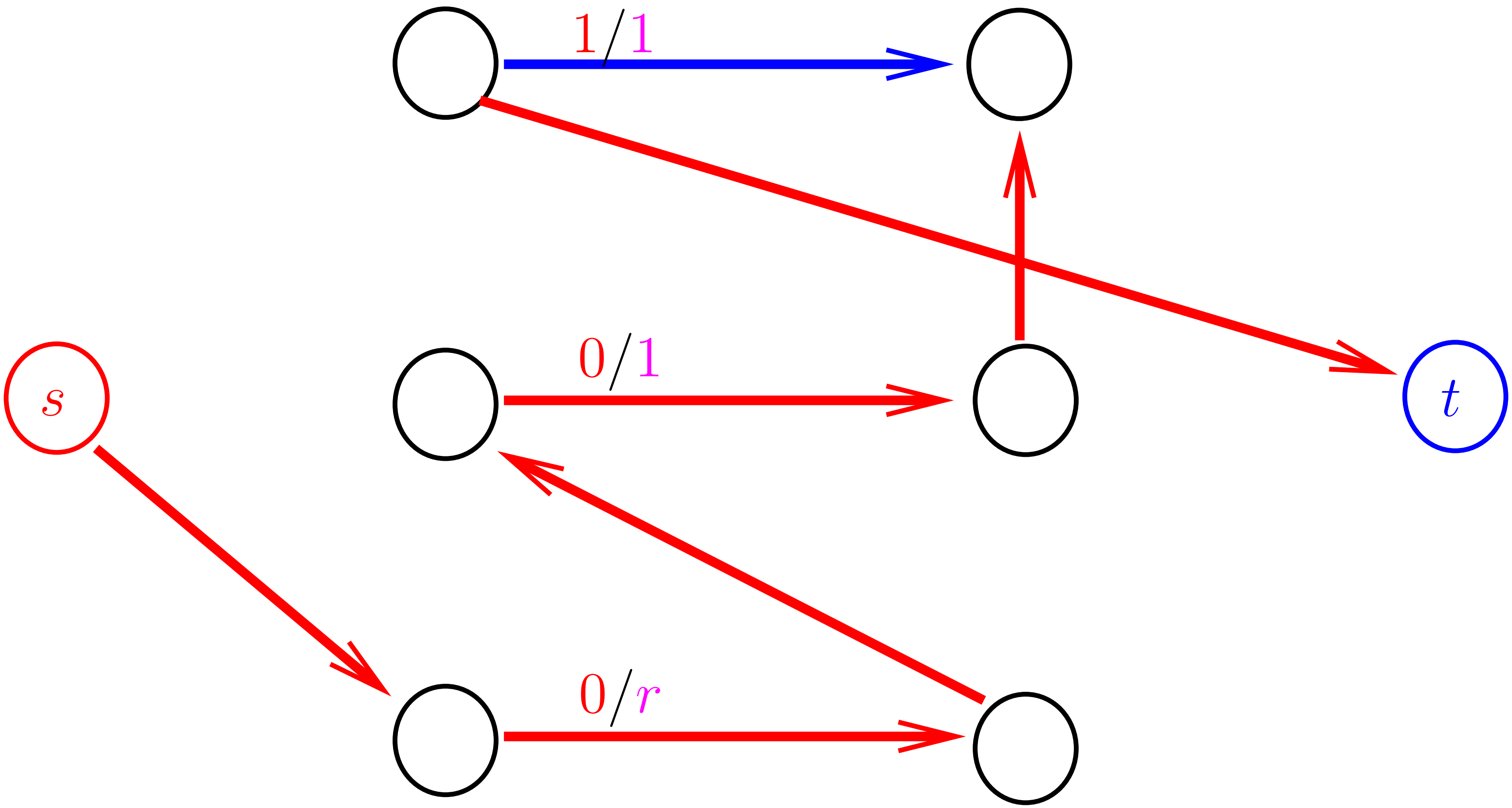
Método dos caminhos de incremento

val$(x) = 1$



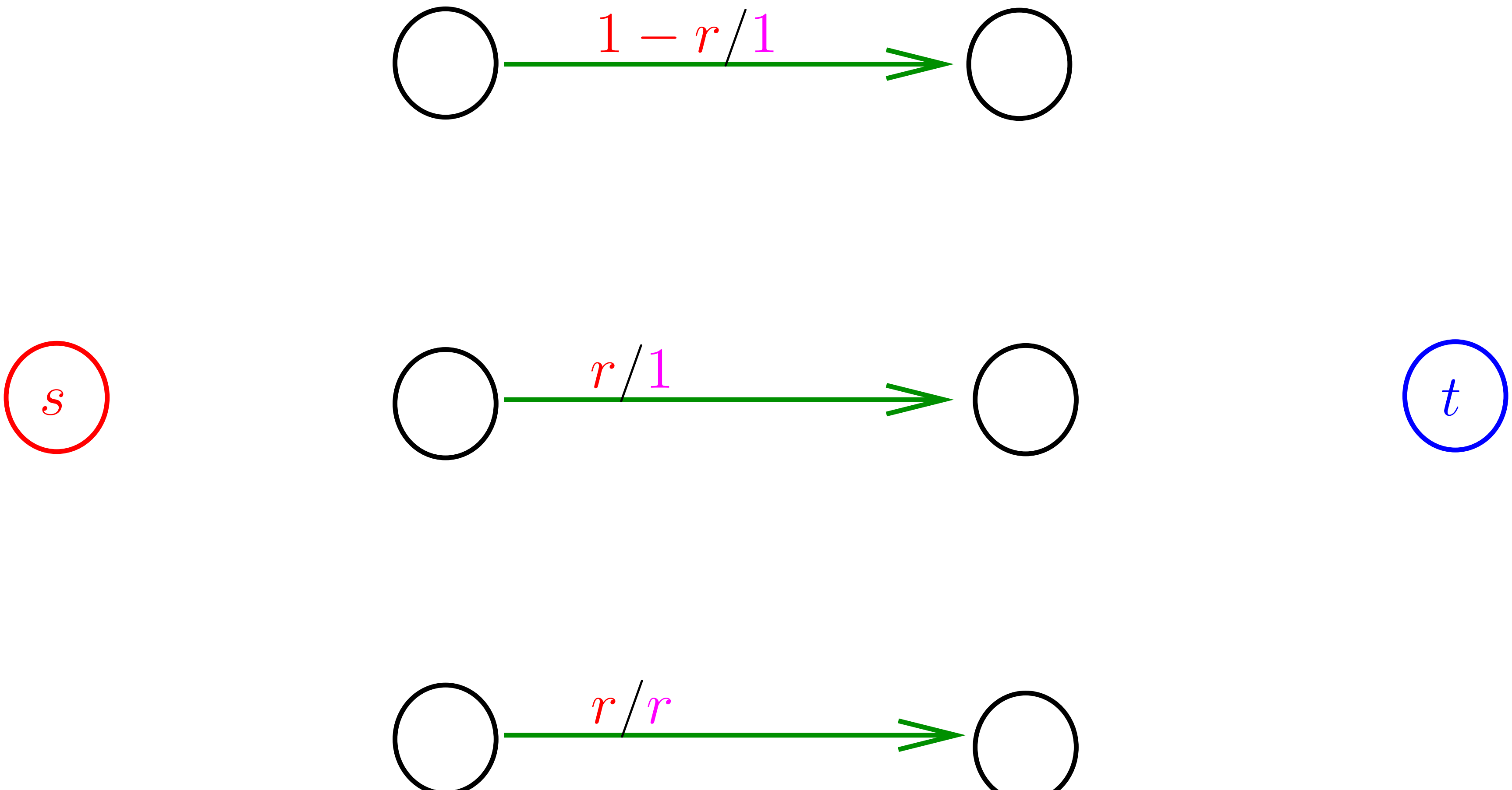
Método dos caminhos de incremento

$\text{val}(x) = 1$



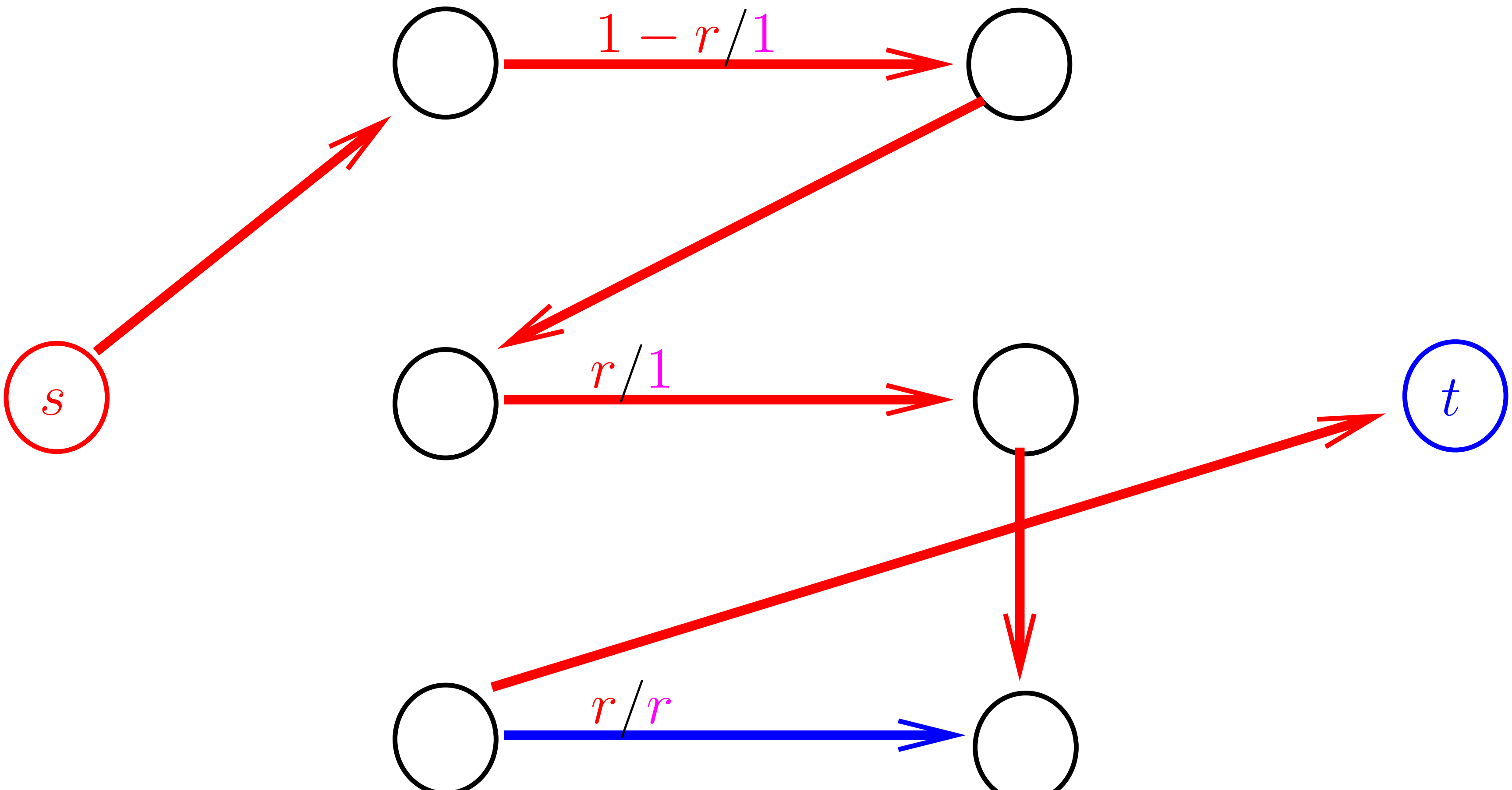
Método dos caminhos de incremento

$\text{val}(x) = 1 + r$



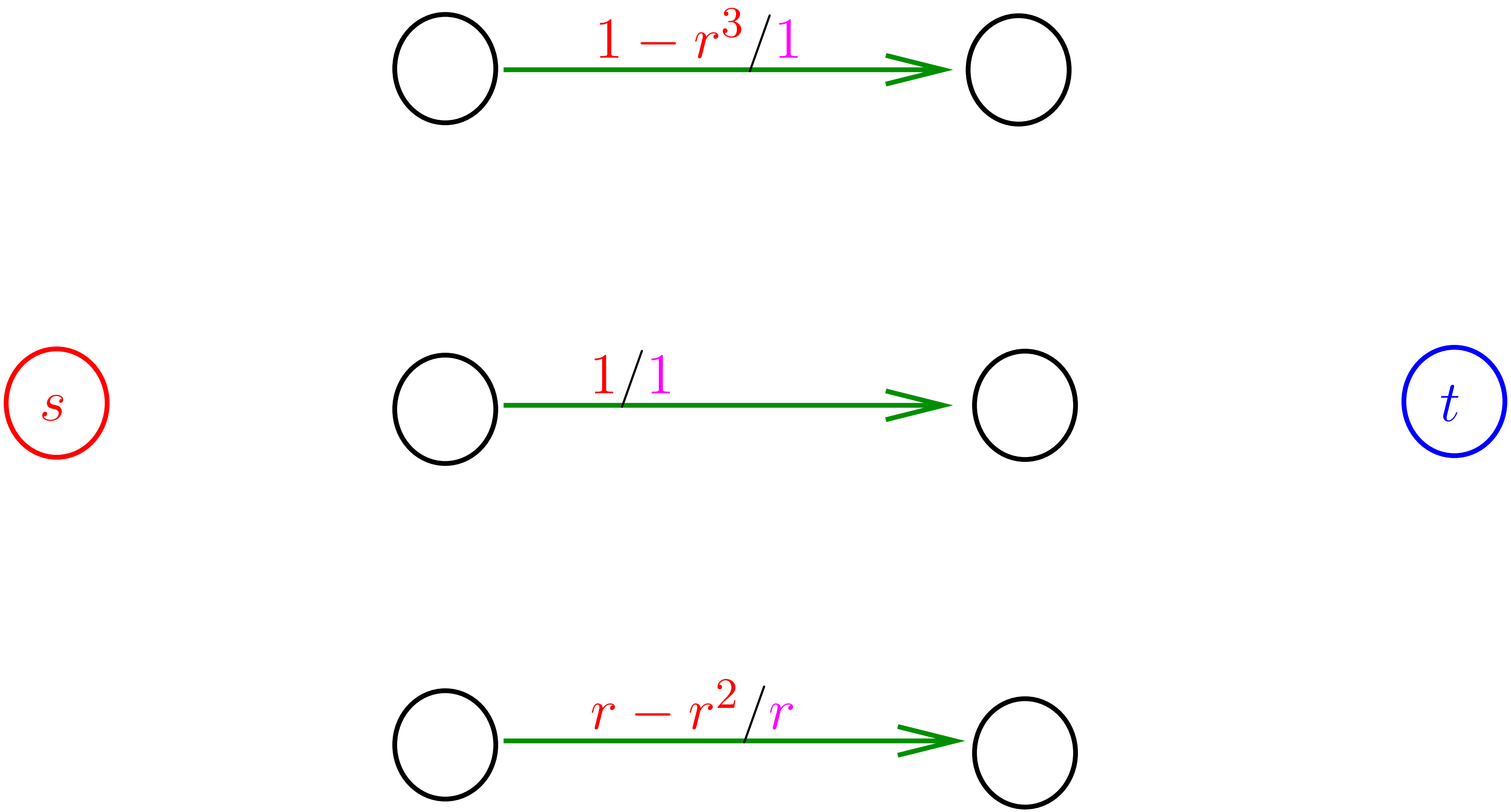
Método dos caminhos de incremento

val$(x) = 1 + r$



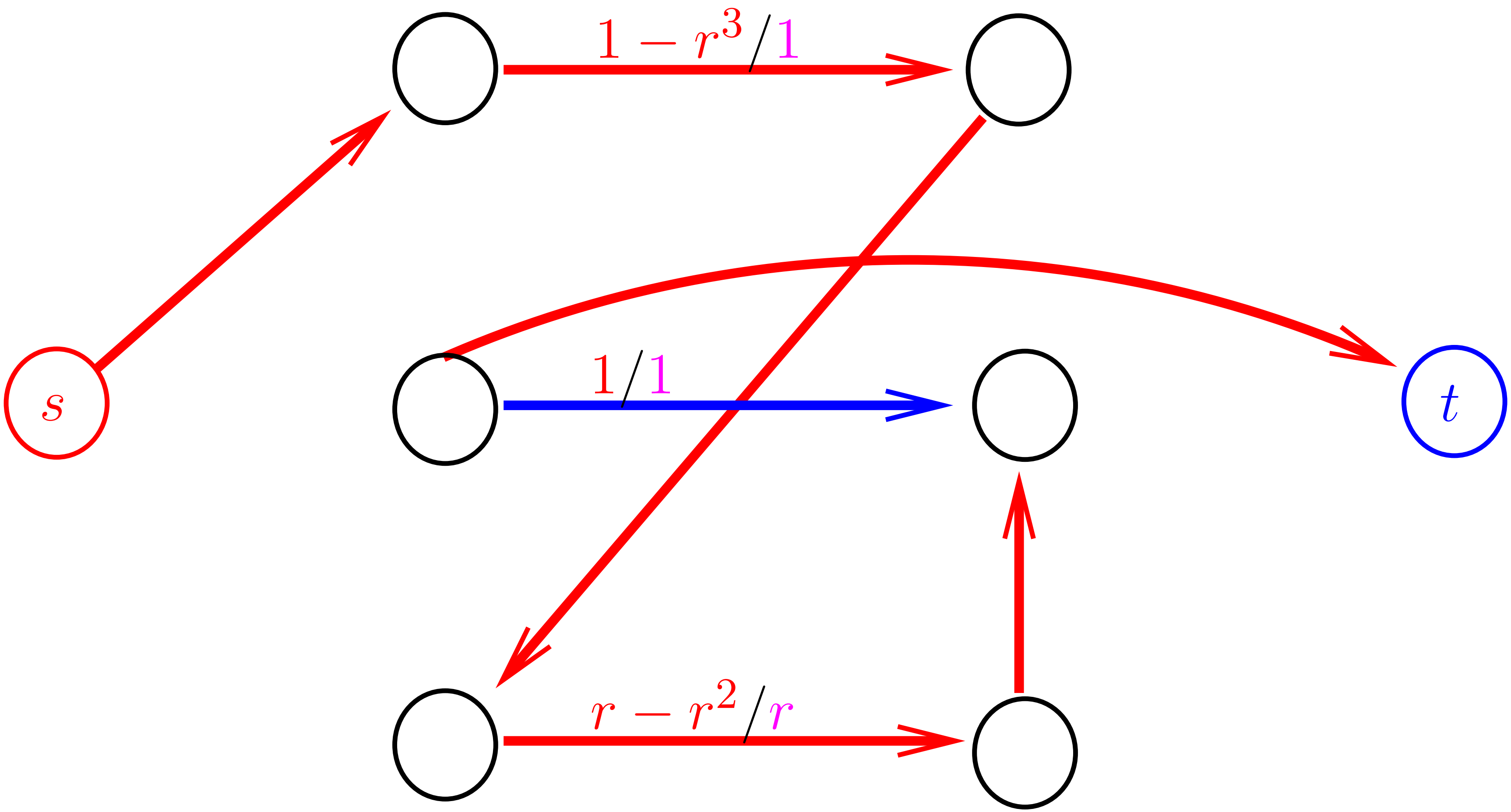
Método dos caminhos de incremento

$\text{val}(x) = 1 + r + r^2$



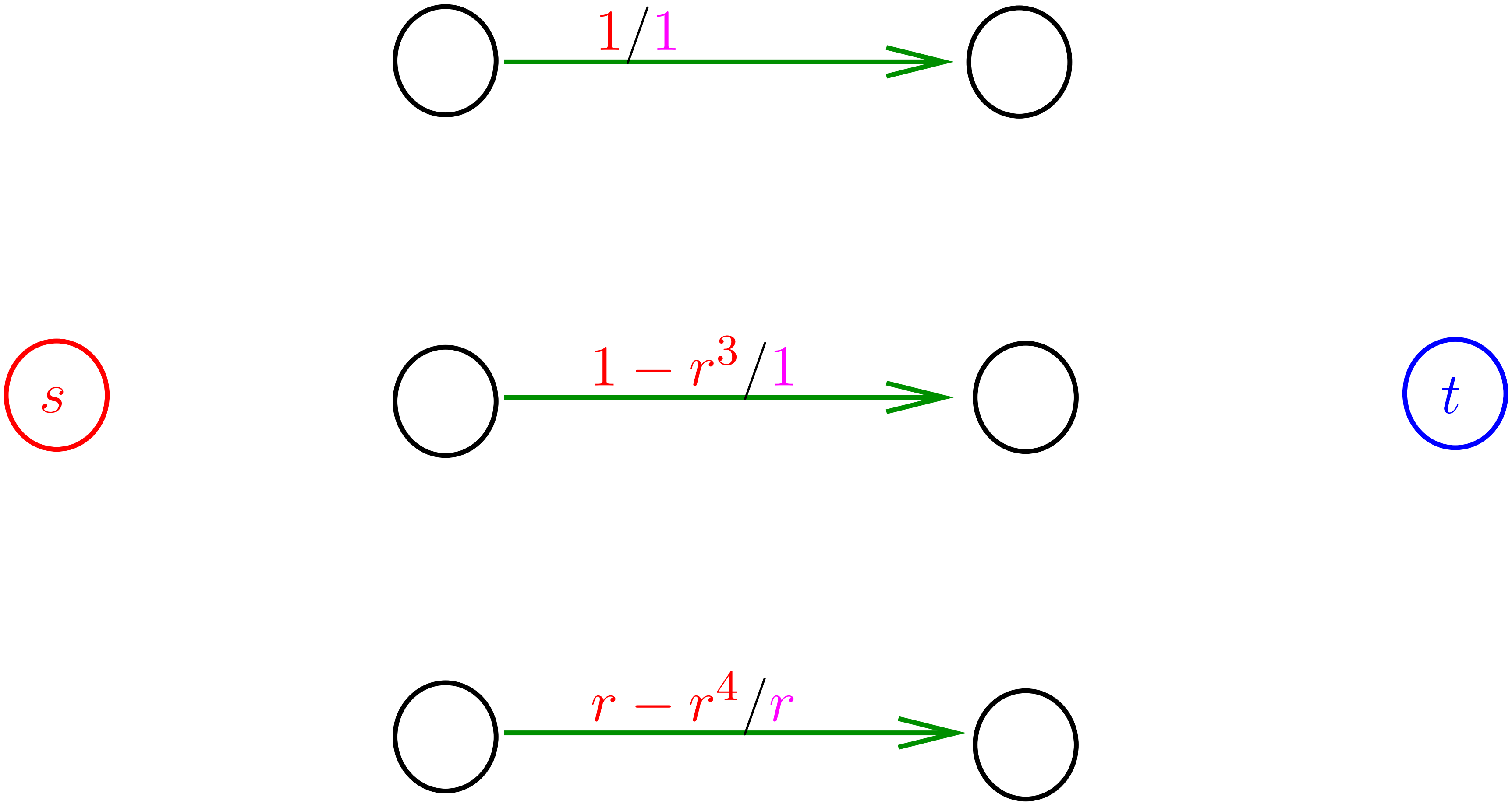
Método dos caminhos de incremento

$\mathsf{val}(x) = 1 + r + r^2$



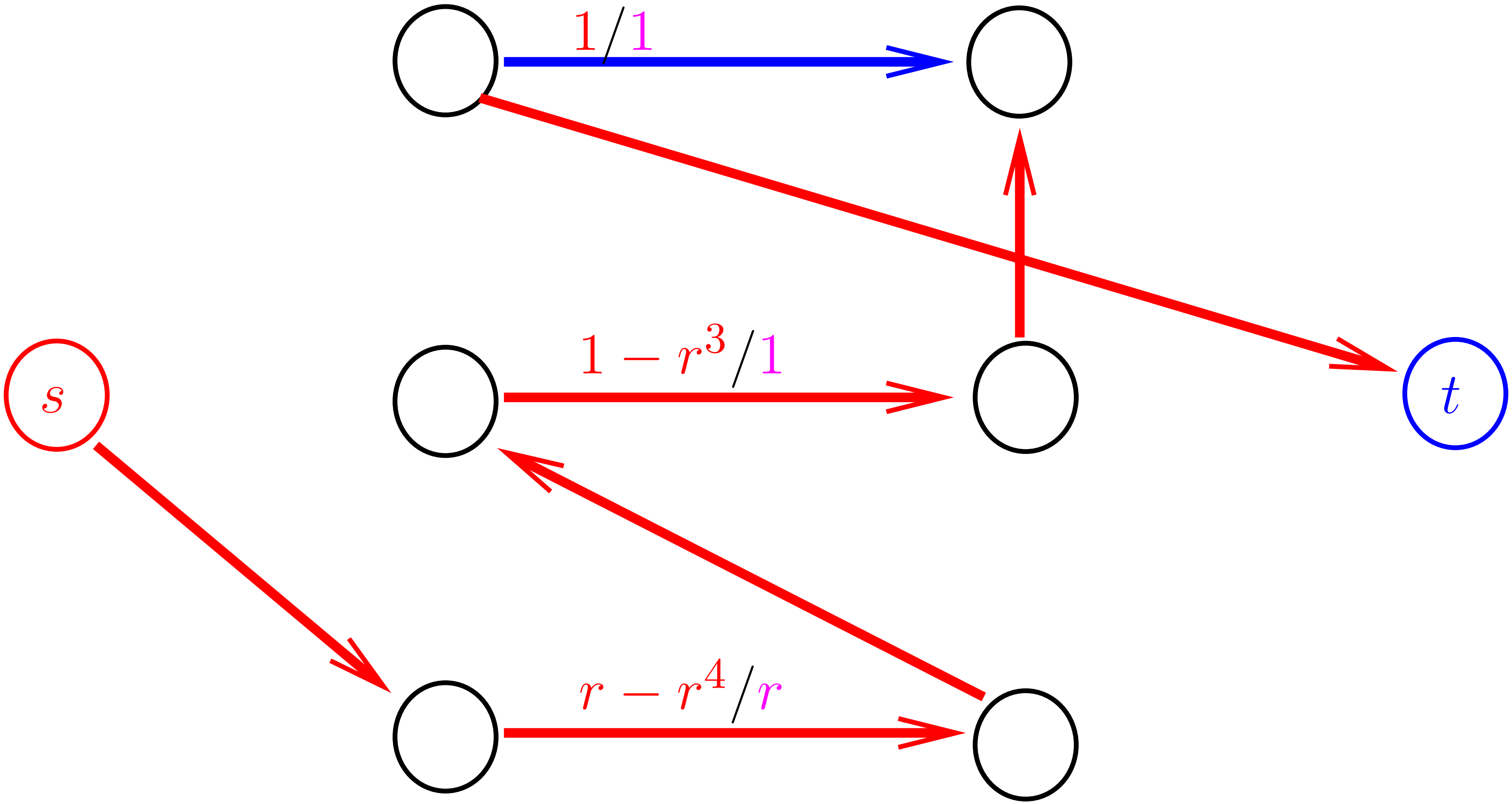
Método dos caminhos de incremento

$\mathsf{val}(x) = 1 + r + r^2 + r^3$



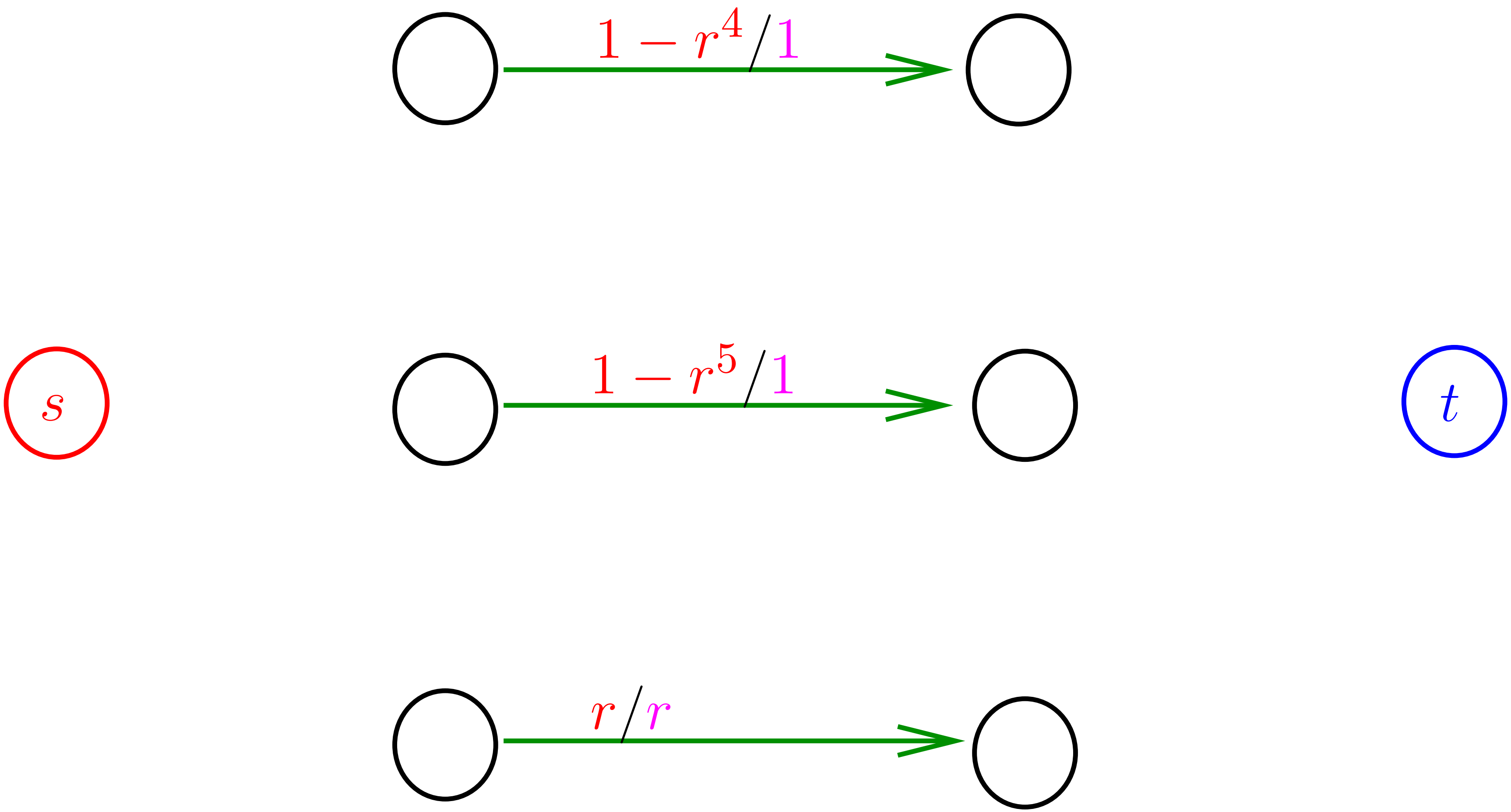
Método dos caminhos de incremento

$\text{val}(x) = 1 + r + r^2 + r^3$



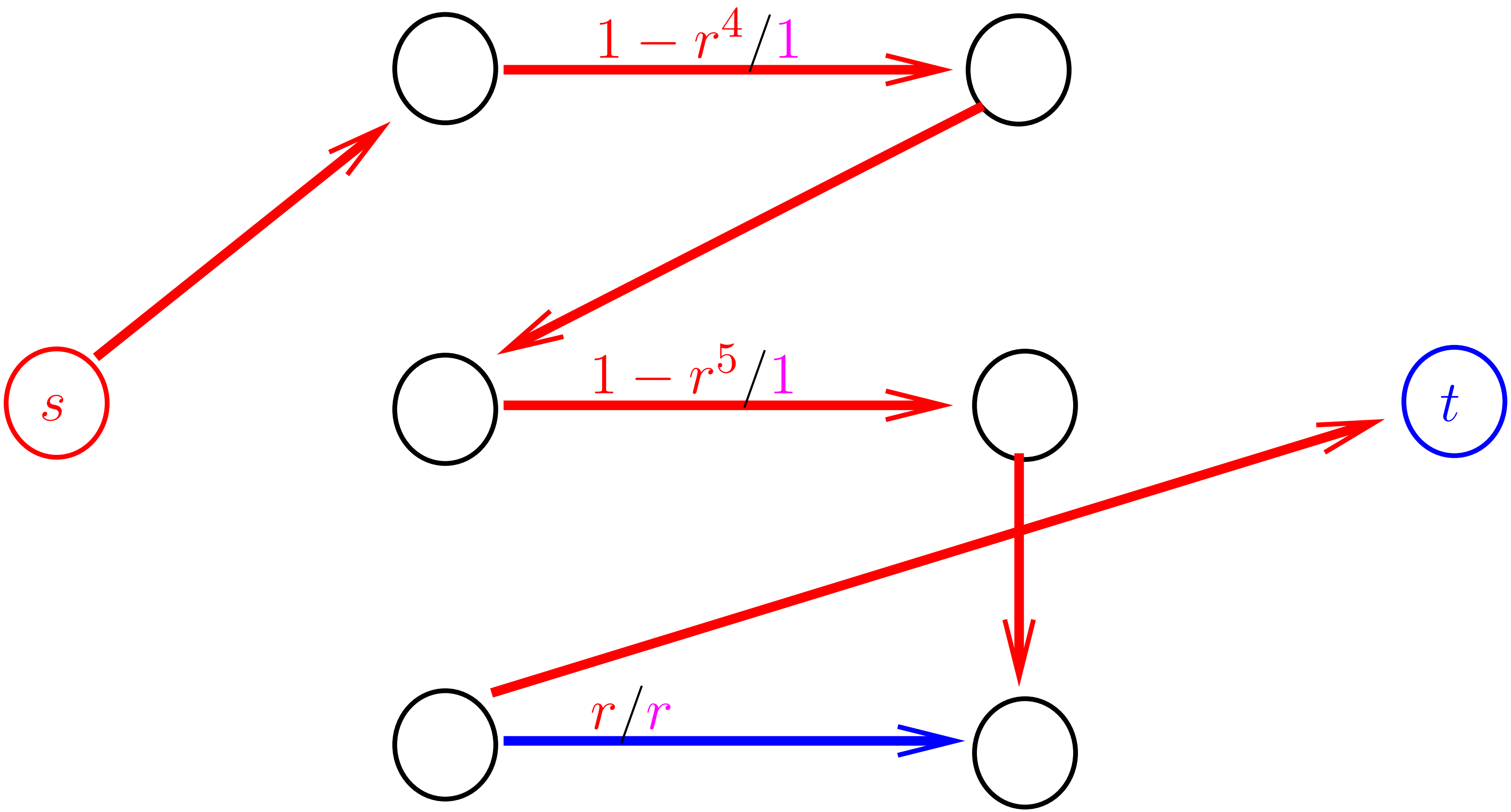
Método dos caminhos de incremento

val$(x) = 1 + r + r^2 + r^3 + r^4$



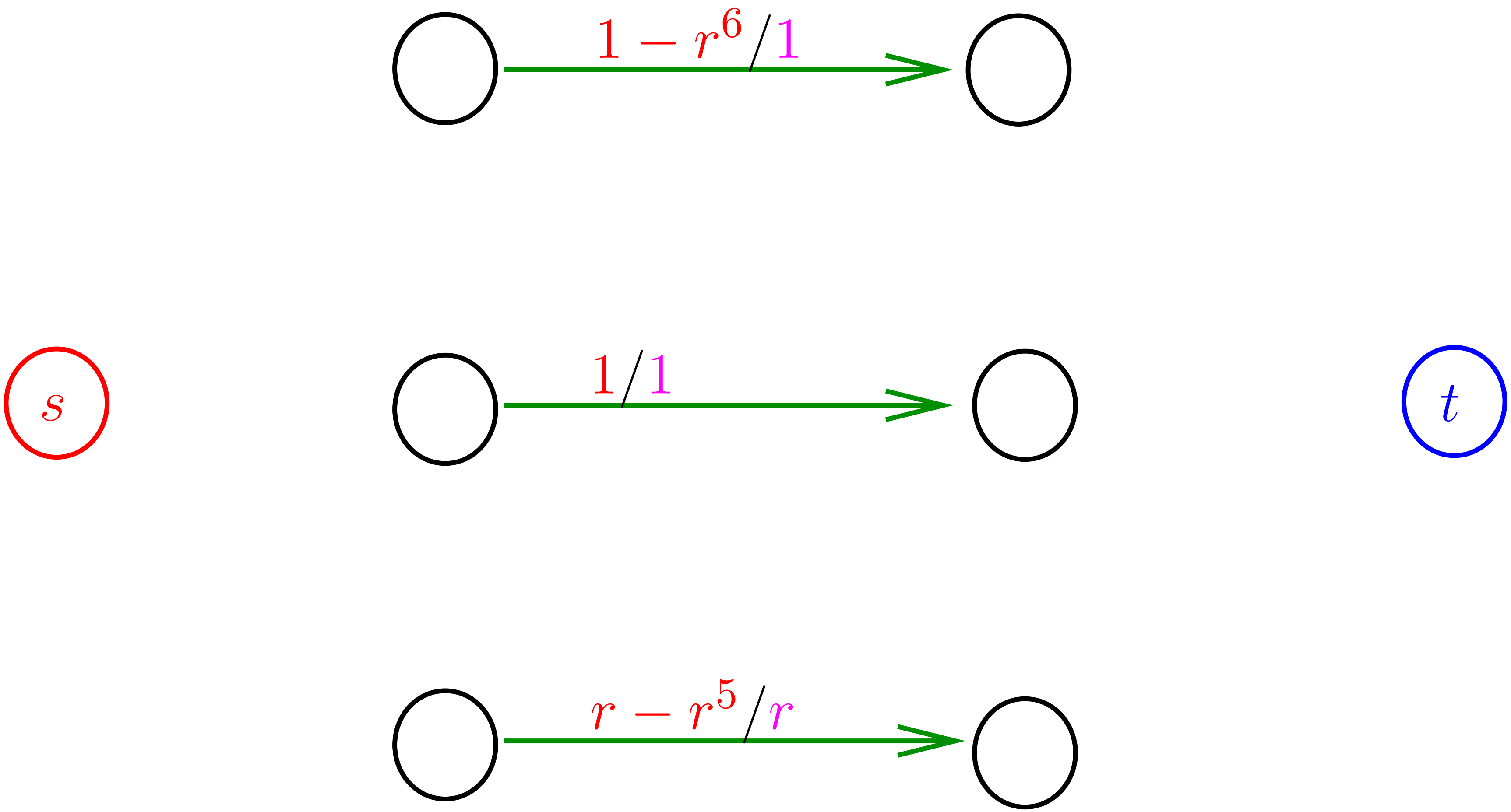
Método dos caminhos de incremento

$\text{val}(x) = 1 + r + r^2 + r^3 + r^4$



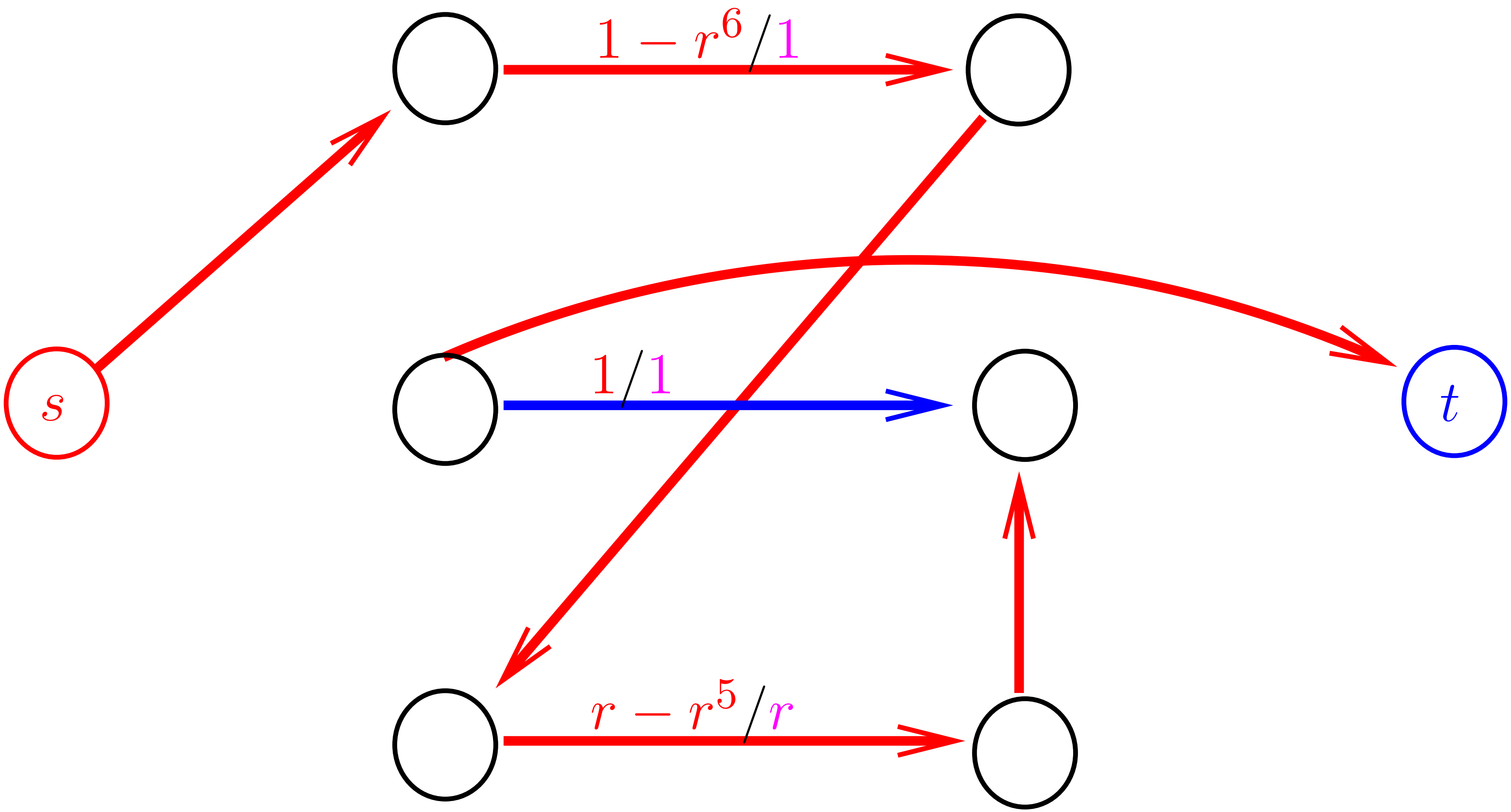
Método dos caminhos de incremento

$\mathsf{val}(x) = 1 + r + r^2 + r^3 + r^4 + r^5$



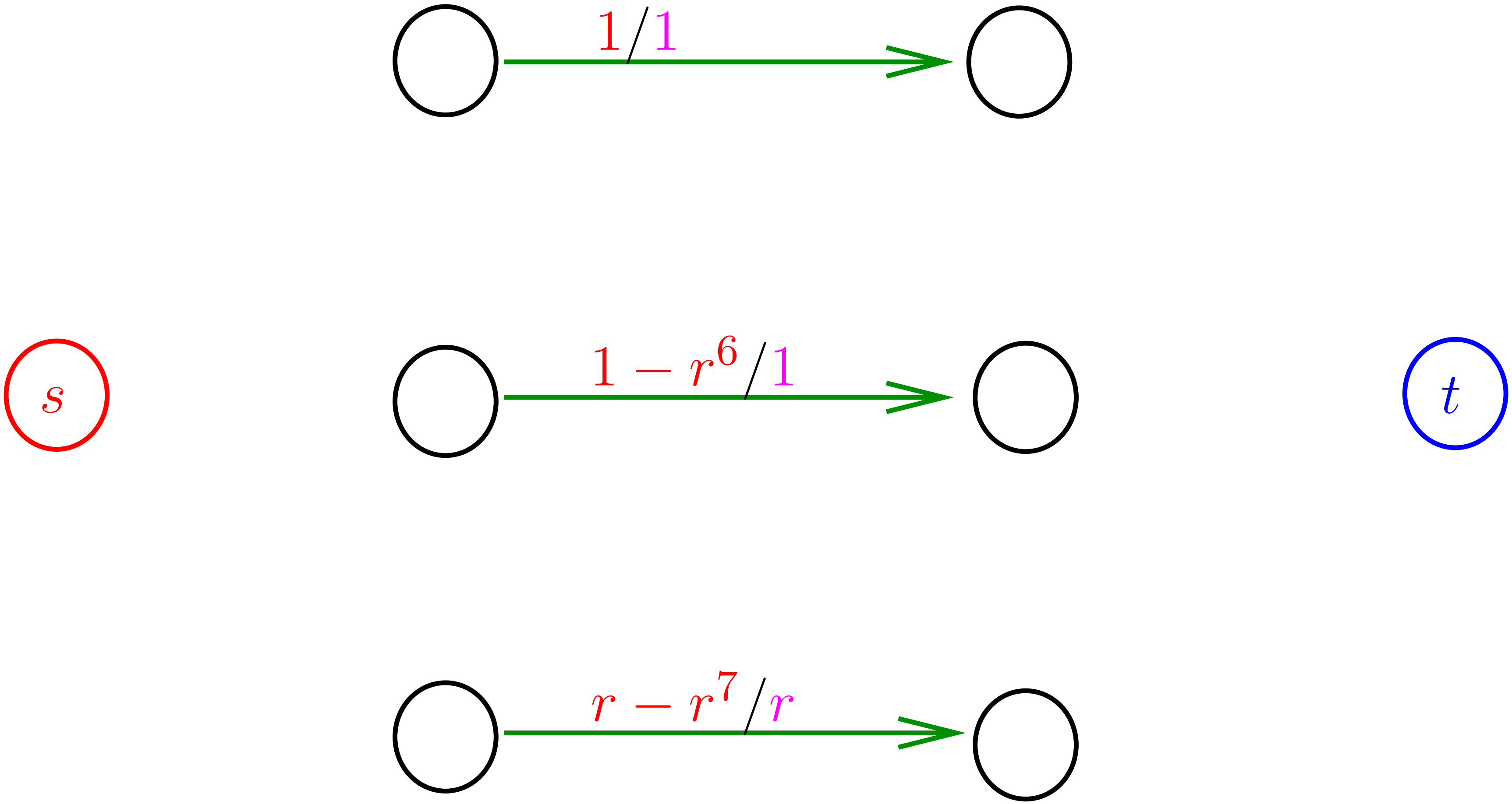
Método dos caminhos de incremento

val$(x) = 1 + r + r^2 + r^3 + r^4 + r^5$



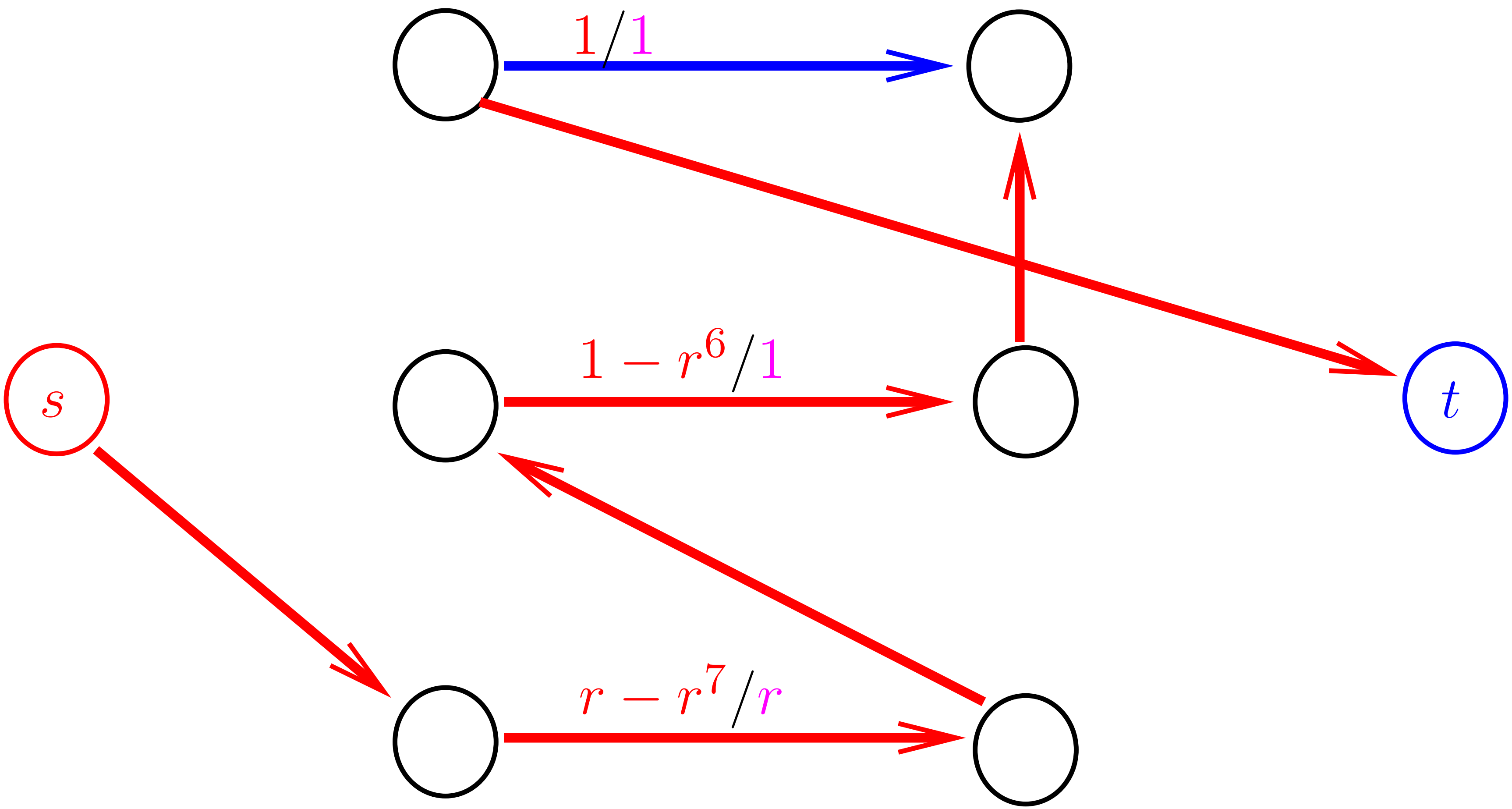
Método dos caminhos de incremento

$\mathsf{val}(x) = 1 + r + r^2 + r^3 + r^4 + r^5 + r^6$



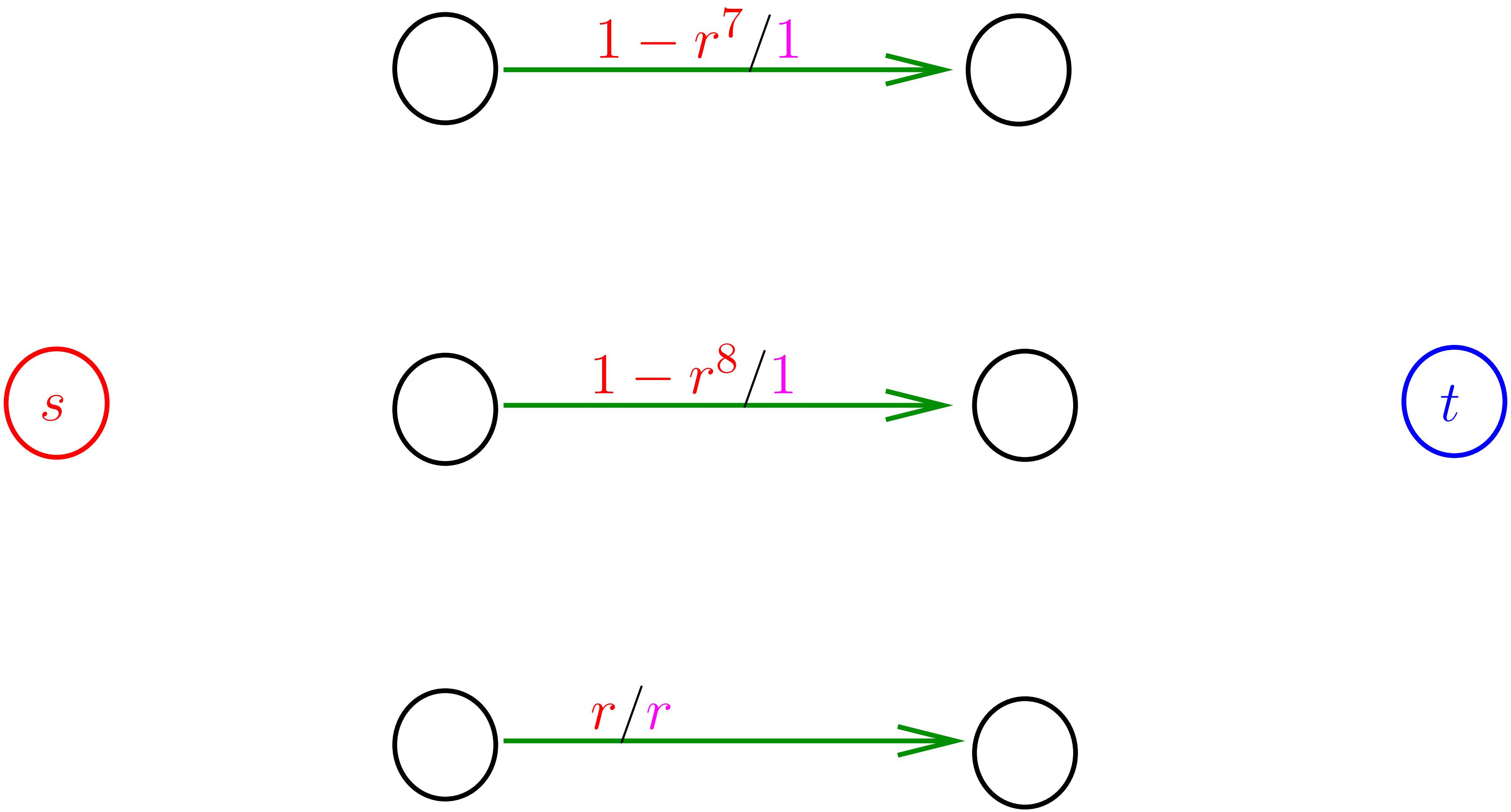
Método dos caminhos de incremento

$\textsf{val}(x) = 1 + r + r^2 + r^3 + r^4 + r^5 + r^6$



Método dos caminhos de incremento

$\textsf{val}(x) = 1 + r + r^2 + r^3 + r^4 + r^5 + r^6 + r^7$



Método dos caminhos de incremento

Incrementa, incrementa, incrementa . . . para sempre.

Resumo

Depois de k passos de incremento tem-se que:

- $\text{val}(x) = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^k$
- $\{u(ij) - x(ij) : ij \in A'\} = \{0, r^{k-1}, r^k\}$
- $x(ij) \leq 1 + r + r^2 + \cdots + r^{k-1}$ para cada arco ij

O valor do fluxo converge para $1 + r + r^2 + r^3 + \cdots < q$.

O valor de um fluxo máximo é $7q$.

Conclusão

O algoritmo FORD-FULKERSON aplicado a redes com função-capacidade que tem valores reais pode não parar.

O algoritmo FORD-FULKERSON aplicado a redes com função-capacidade que tem valores reais pode obter uma seqüência de fluxos cujo valor converge para um valor menor que o de um fluxo máximo.