# Melhores momentos

AULA PASSADA

# Edmonds e Karp

## Método dos incrementos máximos

PASSO DE INCREMENTO: encontre na rede residual (do fluxo corrente) um caminho de

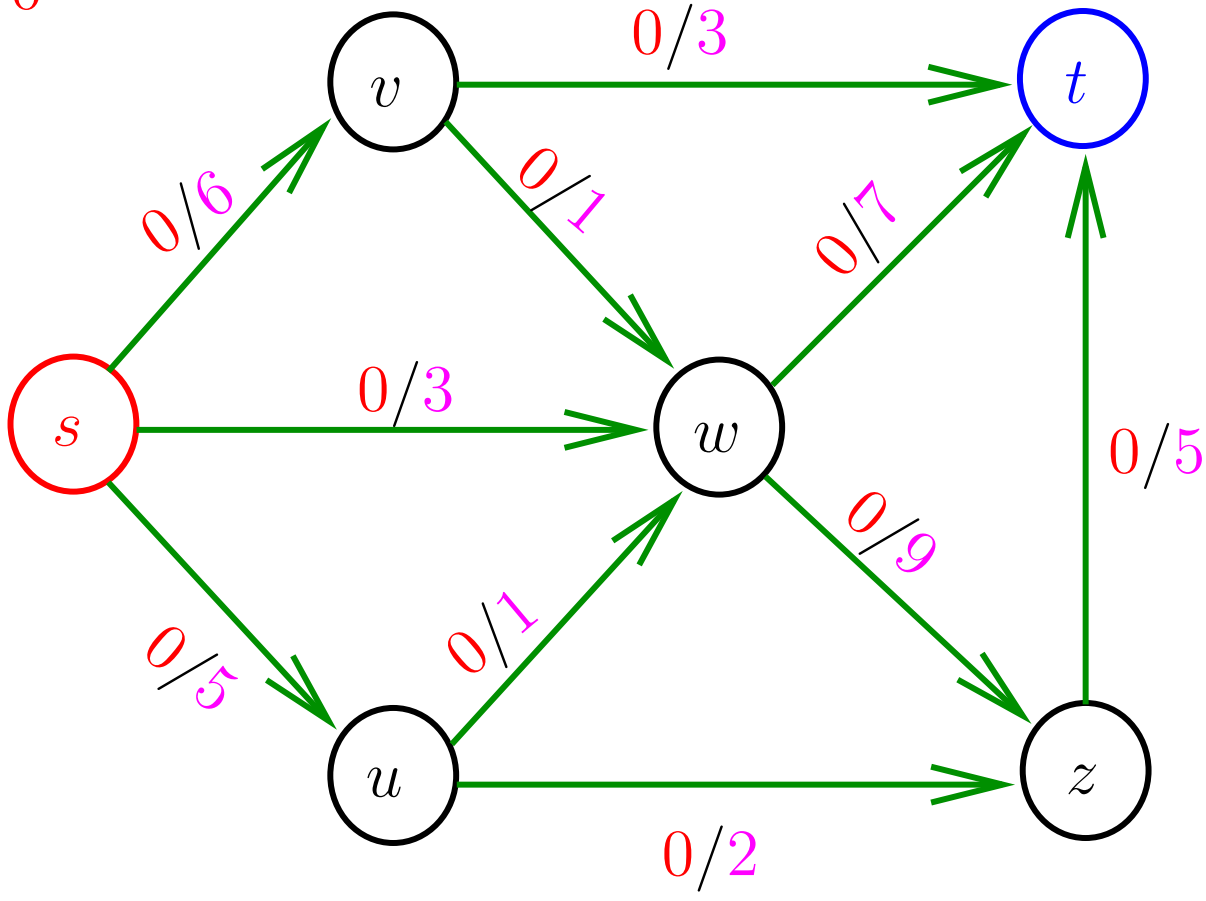
capacidade residual máxima.

Incremente o valor do fluxo “enviando a maior número de unidades de fluxo possível através desse caminho”.

# Método dos incrementos máximos

$\mathsf{val}(x) = 0$

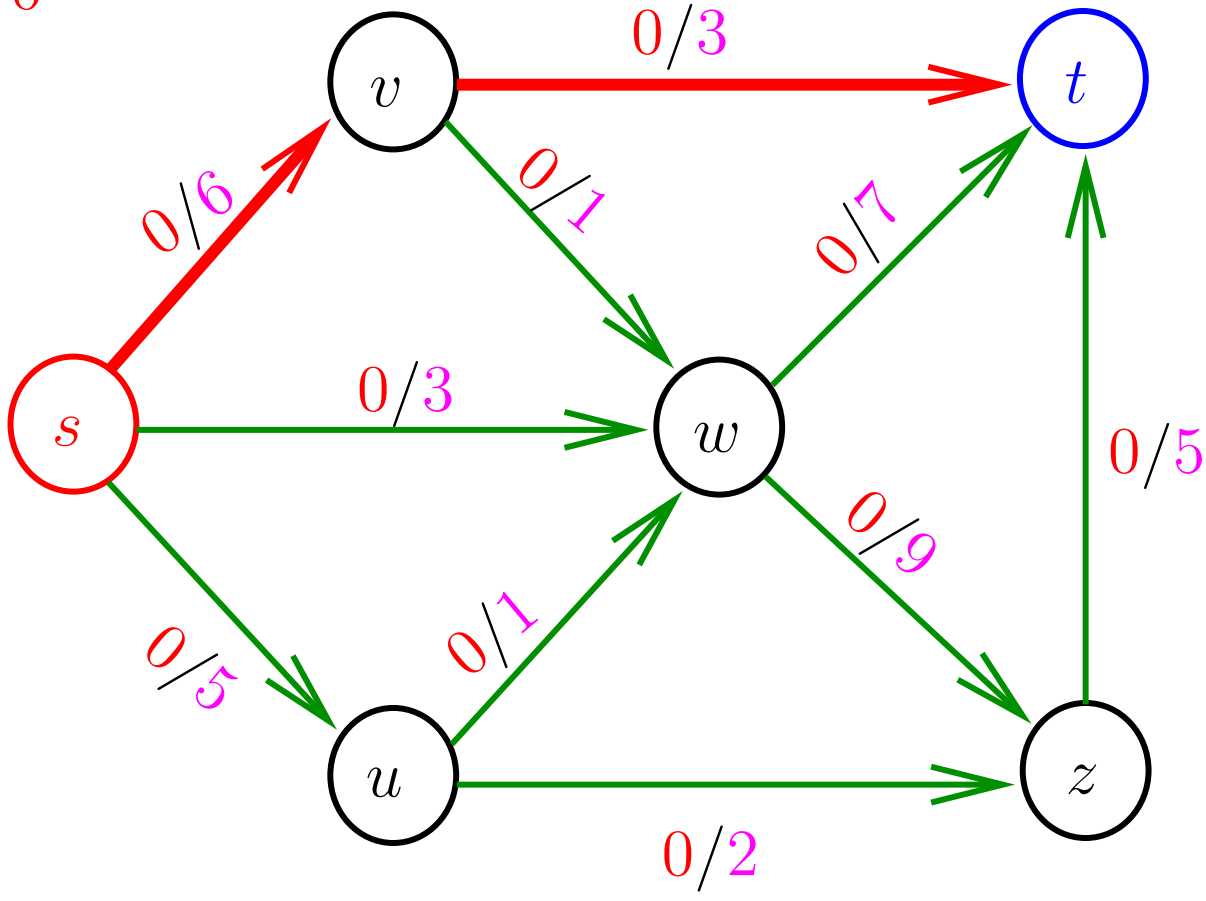
$x(ij)/u(ij)$



# Método dos incrementos máximos

$\mathsf{val}(x) = 0$

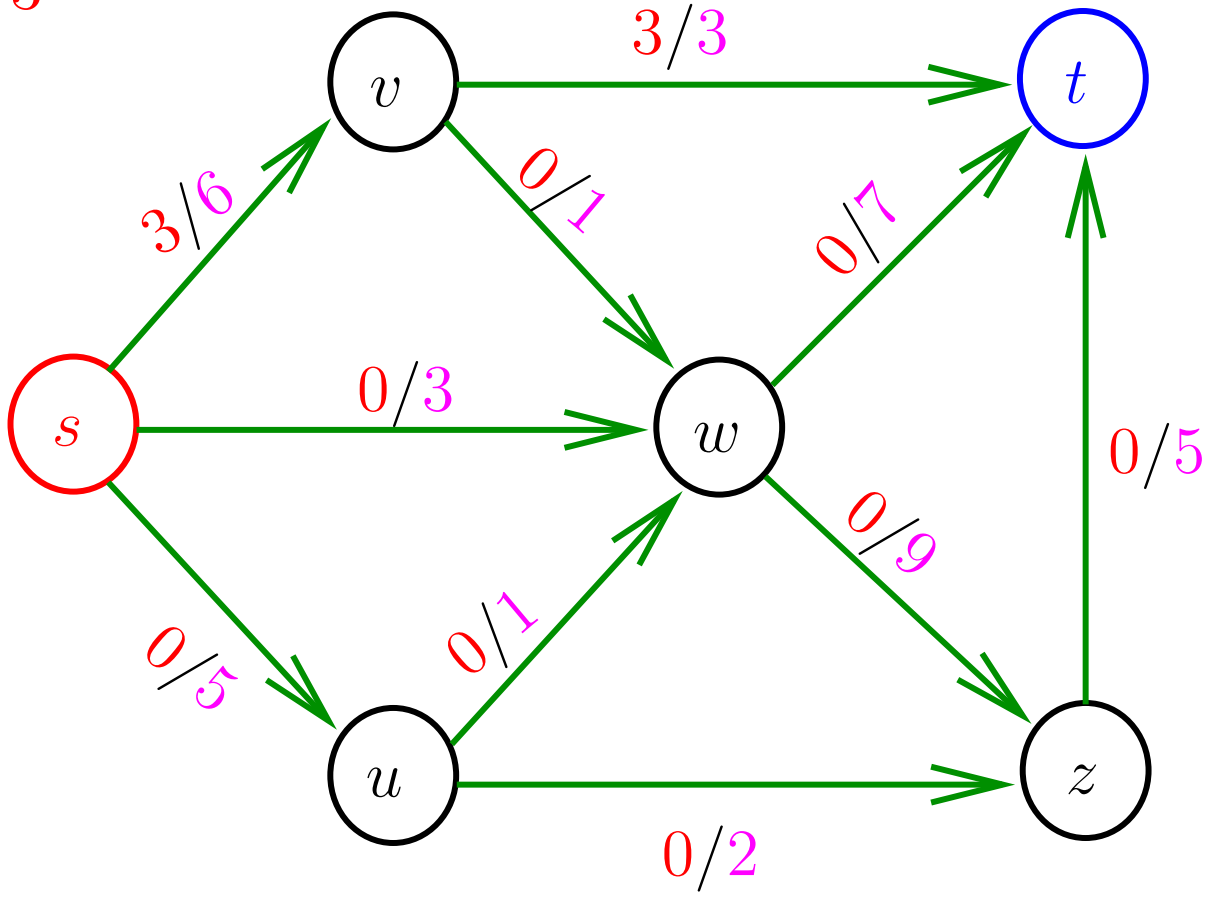
$x(ij)/u(ij)$



# Método dos incrementos máximos

$\mathsf{val}(x) = 3$

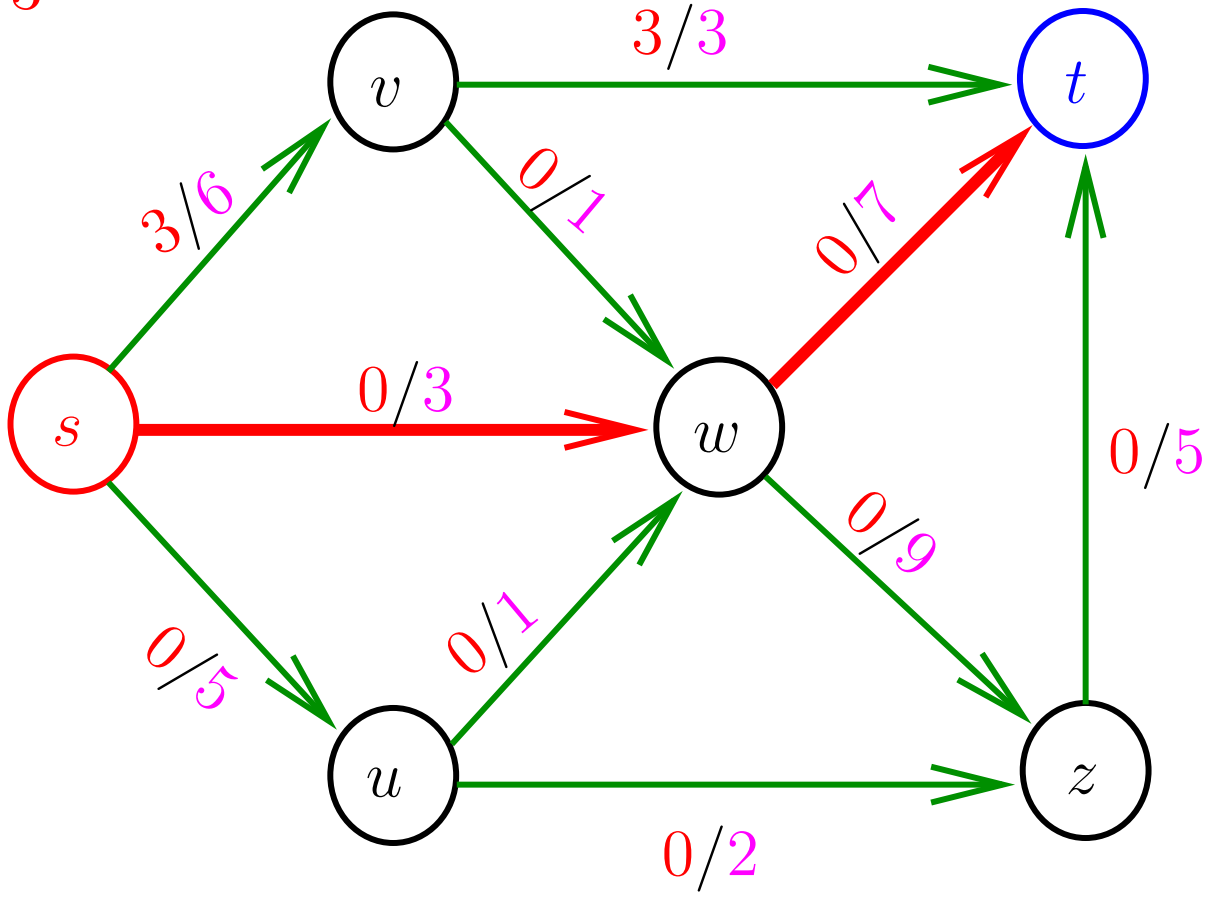
$x(ij)/u(ij)$



# Método dos incrementos máximos

$\text{val}(x) = 3$

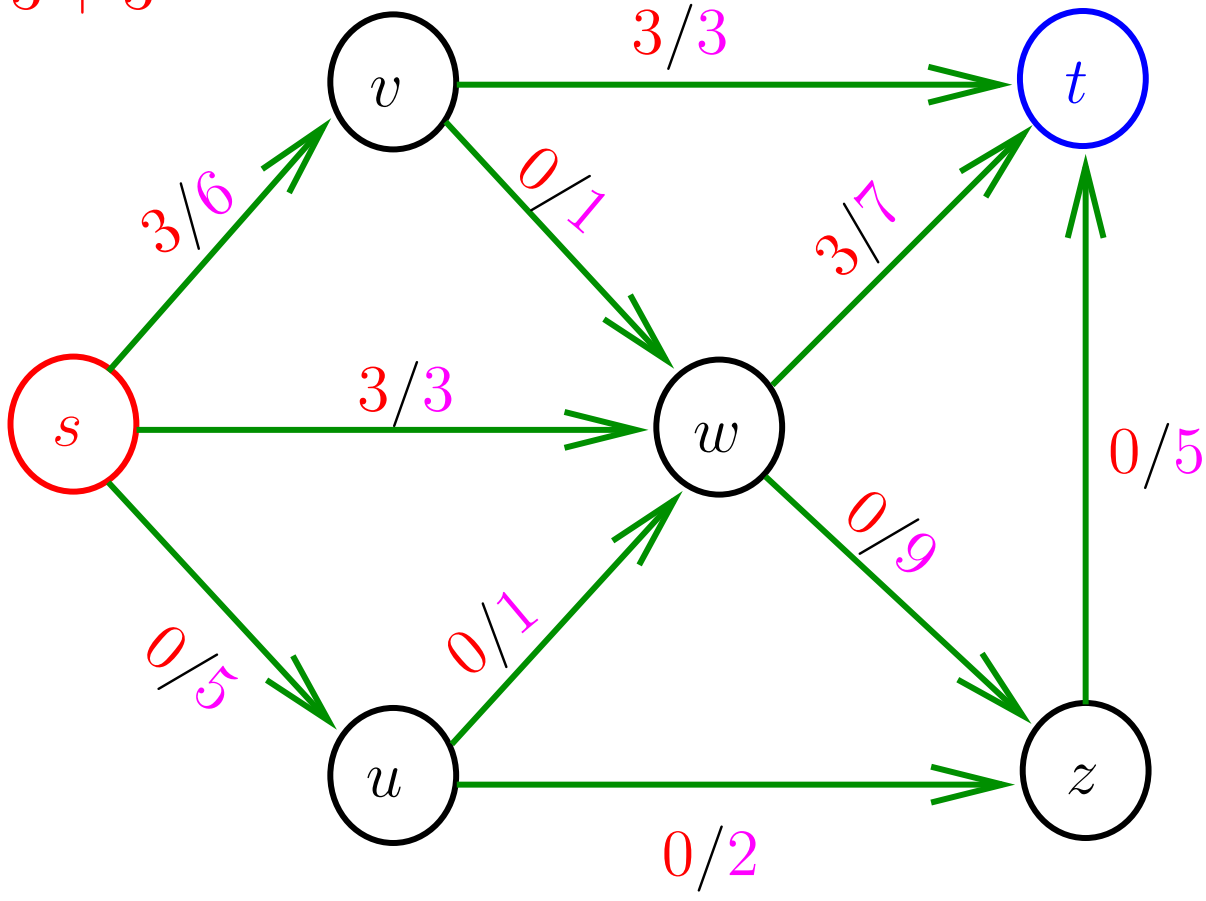
$x(ij)/u(ij)$



# Método dos incrementos máximos

$\mathsf{val}(x) = 3 + 3$

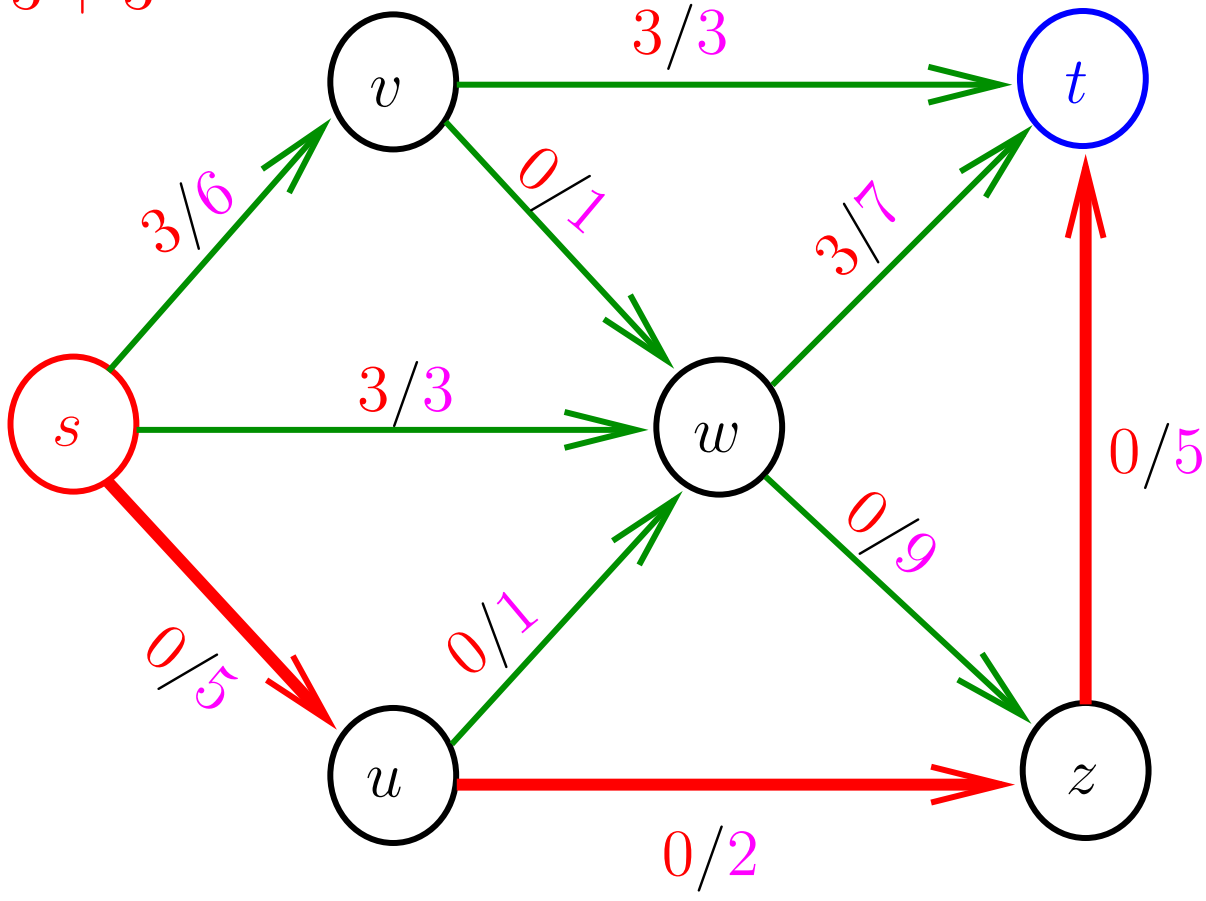
$x(ij)/u(ij)$



# Método dos incrementos máximos

$\mathsf{val}(x) = 3 + 3$

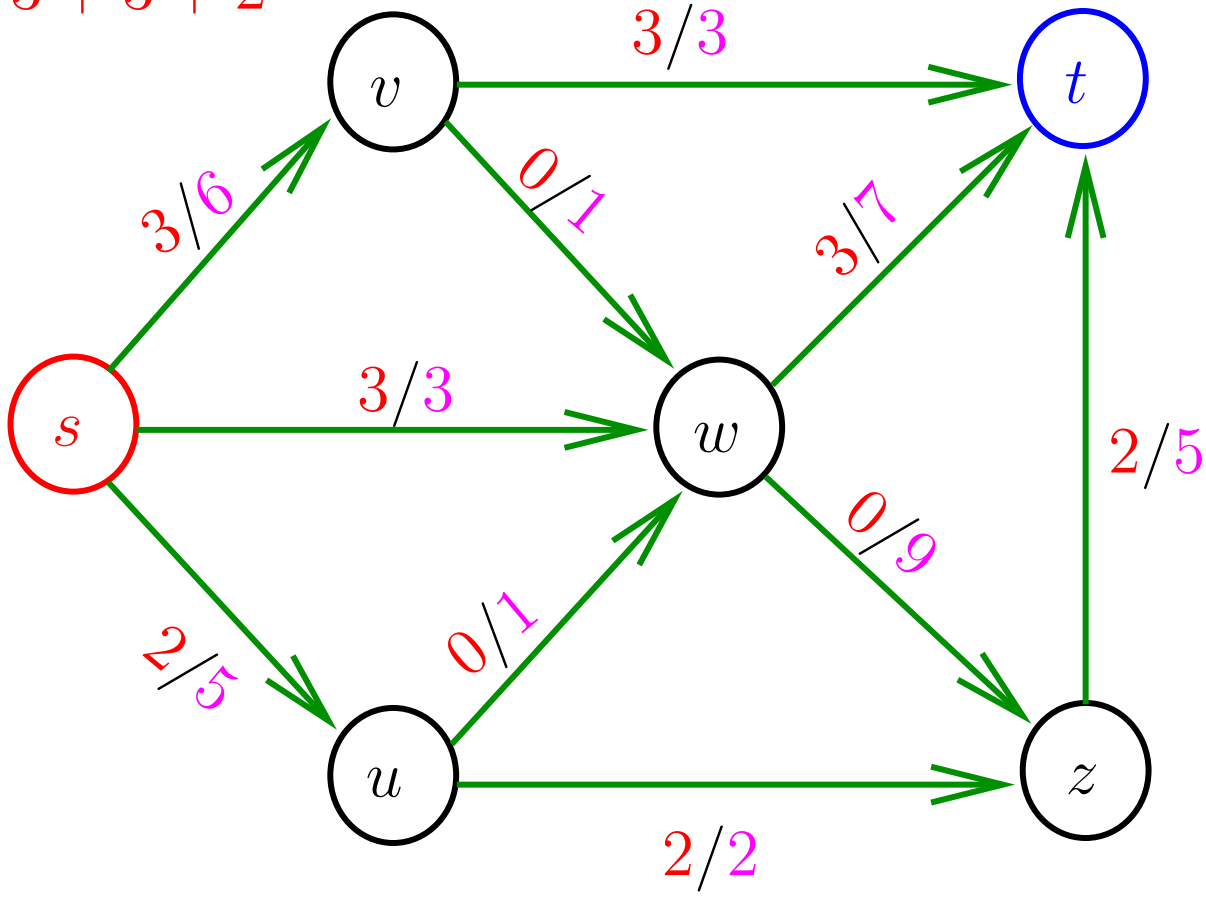
$x(ij)/u(ij)$



# Método dos incrementos máximos

$\mathsf{val}(x) = 3 + 3 + 2$

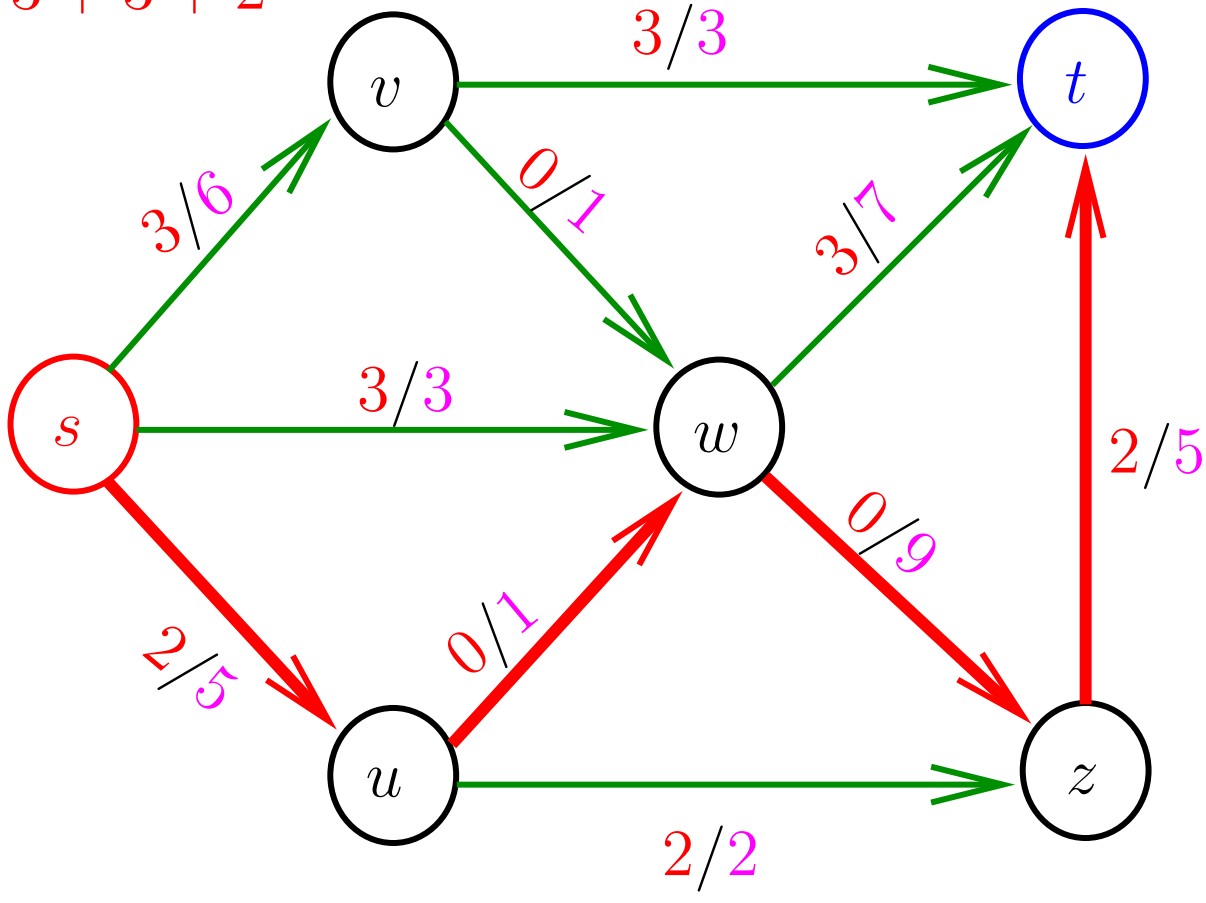
$x(ij)/u(ij)$



# Método dos incrementos máximos

$\text{val}(x) = 3 + 3 + 2$

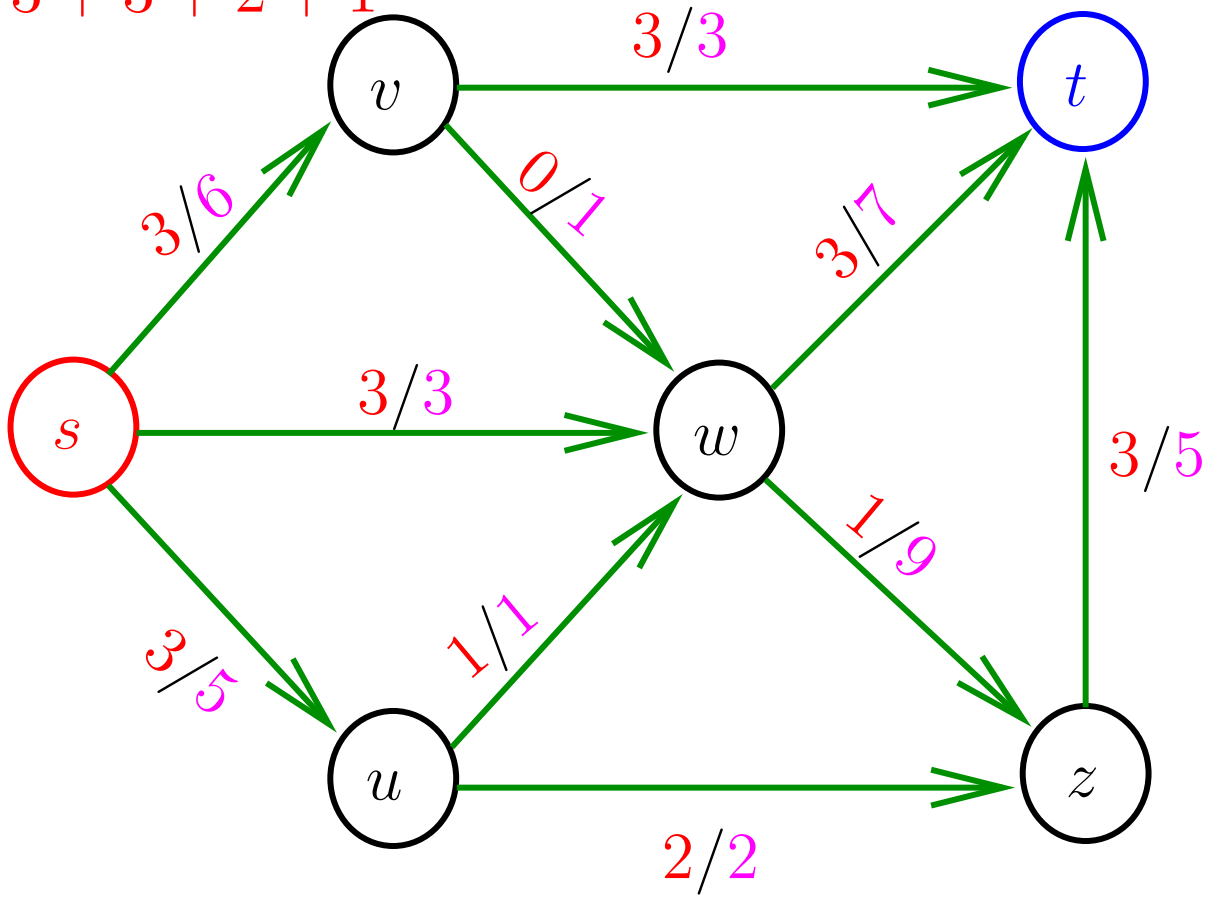
$x(ij)/u(ij)$



# Método dos incrementos máximos

$\text{val}(x) = 3 + 3 + 2 + 1$

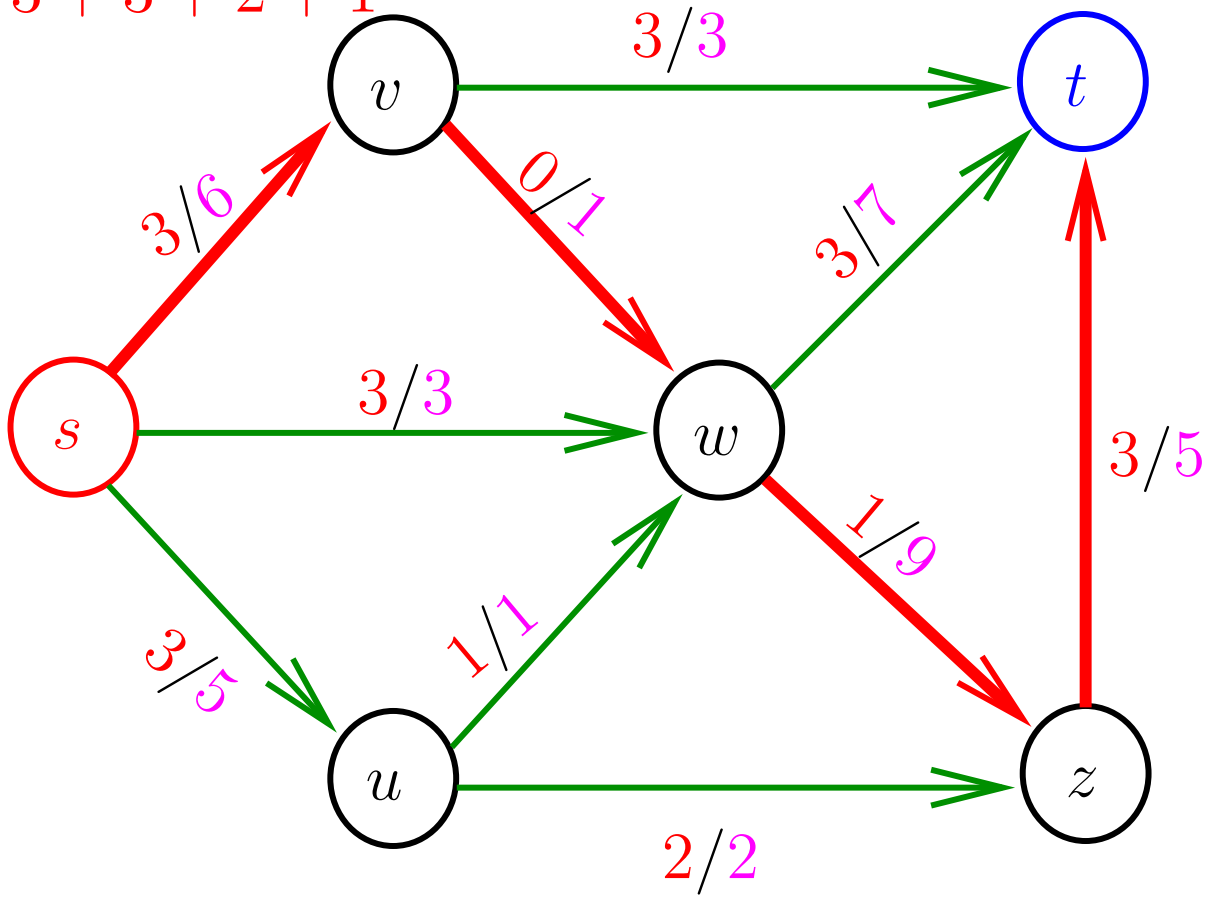
$x(ij)/u(ij)$



# Método dos incrementos máximos

$\text{val}(x) = 3 + 3 + 2 + 1$

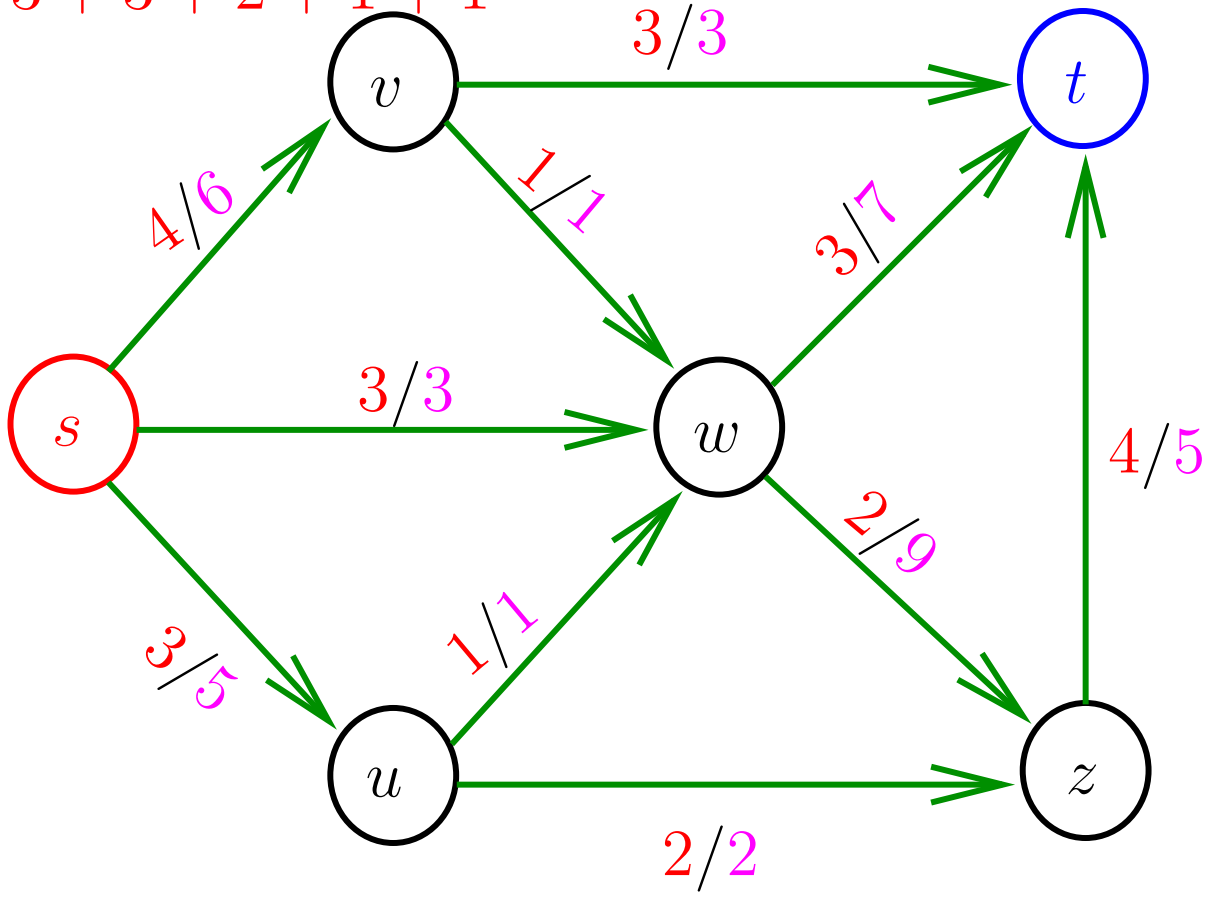
$x(ij)/u(ij)$



# Método dos incrementos máximos

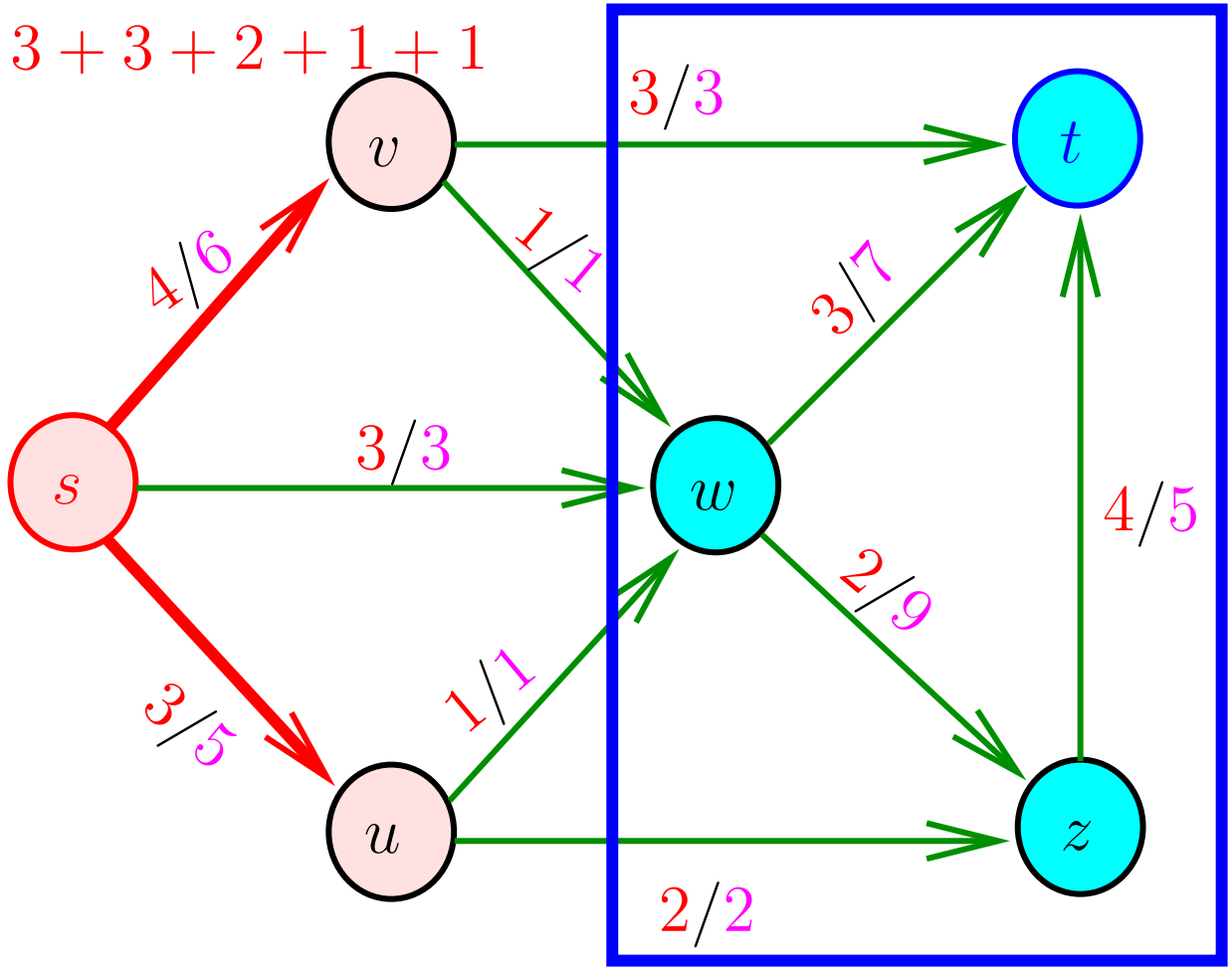
$\mathsf{val}(x) = 3 + 3 + 2 + 1 + 1$

$x(ij)/u(ij)$



# Método dos incrementos máximos

$\mathsf{val}(x) = 3 + 3 + 2 + 1 + 1$



# Caminho de capacidade máxima

Uma pequena variante do algoritmo DIJKSTRA encontra caminhos de capacidade máxima.

CAMINHO-MAX-CAPACITY $(N, A, u, s)$ $\quad \triangleright\ u \geq 0$

```
 1  para cada i em N faça
 2        y(i) ← 0    π(i) ← NIL
 3  y(s) ← ∞
 4  Q ← N     ▷ Q func. como uma fila com prioridades
 5  enquanto Q ≠ ⟨⟩ faça
 6        retire de Q um nó i com y(i) máximo
 7        para cada ij em A(i) faça
 8              se y(j) < min{y(i), u(ij)}
 9                    então y(j) ← min{y(i), u(ij)}
10                          π(j) ← i
11  devolva π e y
```

# Conclusão

O consumo de tempo do algoritmo CAMINHO-MAX-CAPACITY é $\mathrm{O}(n^2)$.

# AULA 12

# Incrementos de capacidade máxima

Continuação

# Algoritmo Max-Capacity

MAX-CAPACITY $(N, A, u, s, t)$

```
 1   x̌ ← 0
 2   repita
 3       A_x̌ ← {ij ∈ A : x̌(ij) < u(ij)}
 4       para cada arco ij em A_x̌ faça
 5           u′(ij) ← u(ij) − x̌(ij)
 6       ⟨y, π⟩ ← CAMINHO-MAX-CAPACITY (N, A_x̌, u′, s)
 7       se y(t) > 0
 8           então P ← CAMINHO (π, s, t)
 9                 x̌ ← INCREMENTE-FLUXO (x̌, P)
10   até que y(t) = 0
11   x ← FLUXO (x̌)
12   T ← {j ∈ N : y(j) = 0}
13   devolva x e T
```

# Número de iterações

Seja $\Delta$ a maior capacidade de um $st$-caminho em $(N, A, u')$.

Logo, existe um $st$-corte $\nabla(\overline{T}, T)$ tal que

$$u(i, j) \leq \check{x}(ij) + \Delta,$$

para cada $ij$ em $\nabla(\overline{T}, T)$. Portanto,

$$u(\overline{T}, T) \leq \check{x}(\overline{T}, T) + |\nabla(\overline{T}, T)|\,\Delta \leq \check{x}(\overline{T}, T) + m\,\Delta.$$

Considere um seqüência $\langle \check{x} = \check{x}_0, \check{x}_1, \ldots, \check{x}_k \rangle$ de pseudofluxo obtidos durante um bloco de execuções das linhas 3–9.

Se $\mathsf{val}(\check{x}_{q+1}) \geq \mathsf{val}(\check{x}_q) + \Delta/2$ para $q = 0, \ldots, k-1$, então $k \leq 2m$.

Conclusão: Depois de $\leq 2m$ iterações a maior capacidade de um $st$-caminho de incremento é $< \Delta/2$.

# Número de iterações

Como no início do algoritmo a maior capacidade de um caminho de incremento é $\leq U$, o número de iterações das linhas 3–9 é não superior a

$$2m(1 + \lfloor \lg U \rfloor) = \mathrm{O}(m \lg U).$$

# Consumo de tempo

O número de iterações das linhas 3–9 é $\mathrm{O}(m \lg U)$.

| linha | consumo de todas as execuções da linha |
|---|---|
| 1 | $\mathrm{O}(m)$ |
| 3–5 | $\mathrm{O}(m \lg U) \times \mathrm{O}(m) = \mathrm{O}(m^2 \lg U)$ |
| 6 | $\mathrm{O}(m \lg U) \times \mathrm{O}(n^2) = \mathrm{O}(n^2 m \lg U)$ |
| 7-9 | $\mathrm{O}(m \lg U) \times \mathrm{O}(n) = \mathrm{O}(nm \lg U)$ |
| 10 | $m\,\mathrm{O}(1) = \mathrm{O}(m)$ |
| 11 | $\mathrm{O}(m)$ |
| 12 | $\mathrm{O}(n)$ |
| 13 | $\mathrm{O}(n+m)$ |
| total | $= \mathrm{O}(n^2 m \lg U)$ |

# Conclusão

O algoritmo MAX-CAPACITY faz não mais que $2m(1 + \lfloor \lg U \rfloor)$ passos de incremento de capacidade máxima.

O consumo de tempo do algoritmo MAX-CAPACITY é $\mathrm{O}(n^2 m \lg U)$ .

# Capacity-scaling

PF 14.1, 14.2

# Capacity-scaling

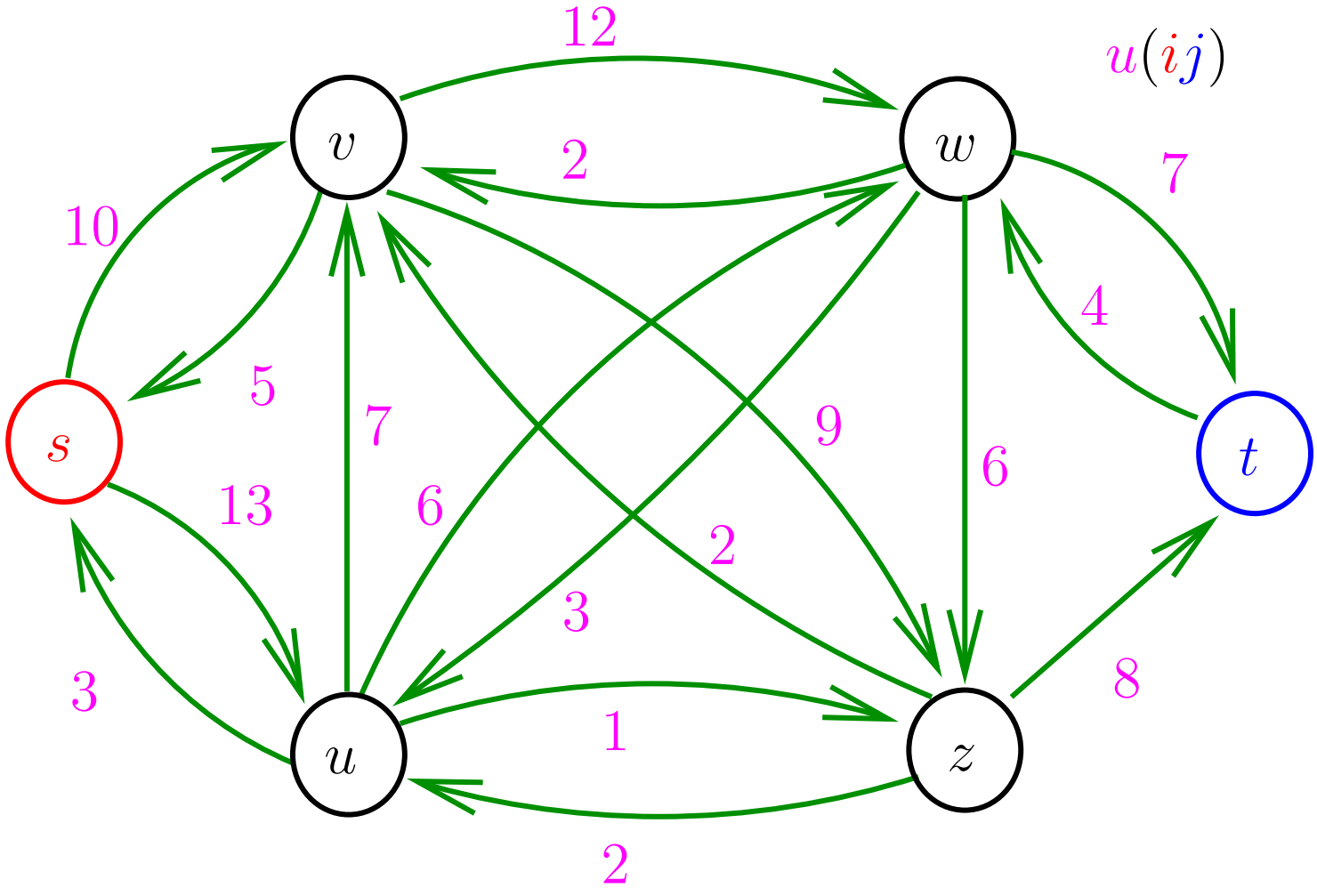
O algoritmo CAPACITY-SCALING é uma variação do MAX-CAPACITY.

Idéia: em cada iteração encontrar um caminho de incremento de capacidade residual "grande".

Em cada iteração do algoritmo temos um pararâmetro $\Delta$ e encontramos uma caminho de incremento de capacidade residual $\geq \Delta$.

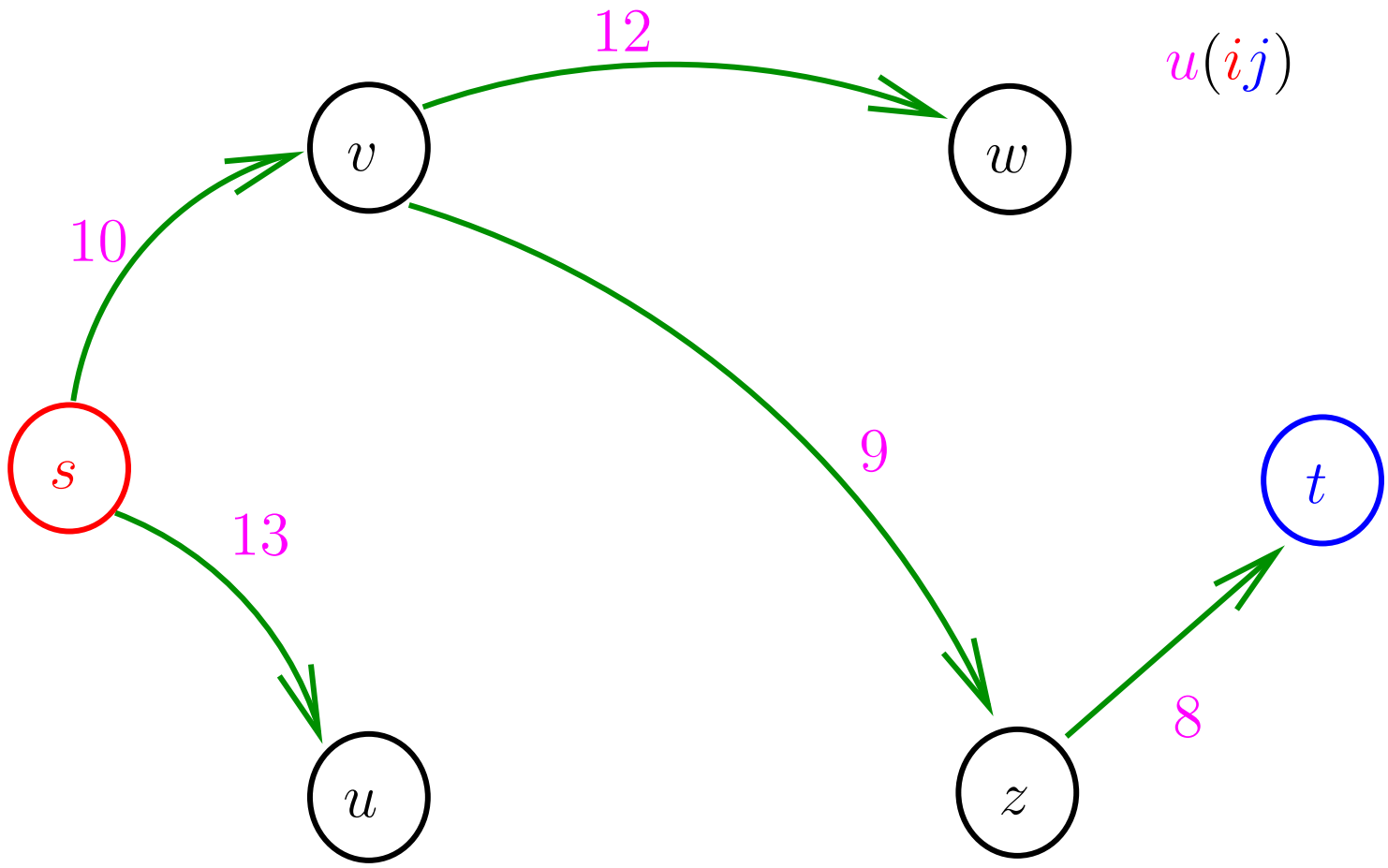
Vantagem: é mais fácil de implementar e mais eficiente.

# Uma rede

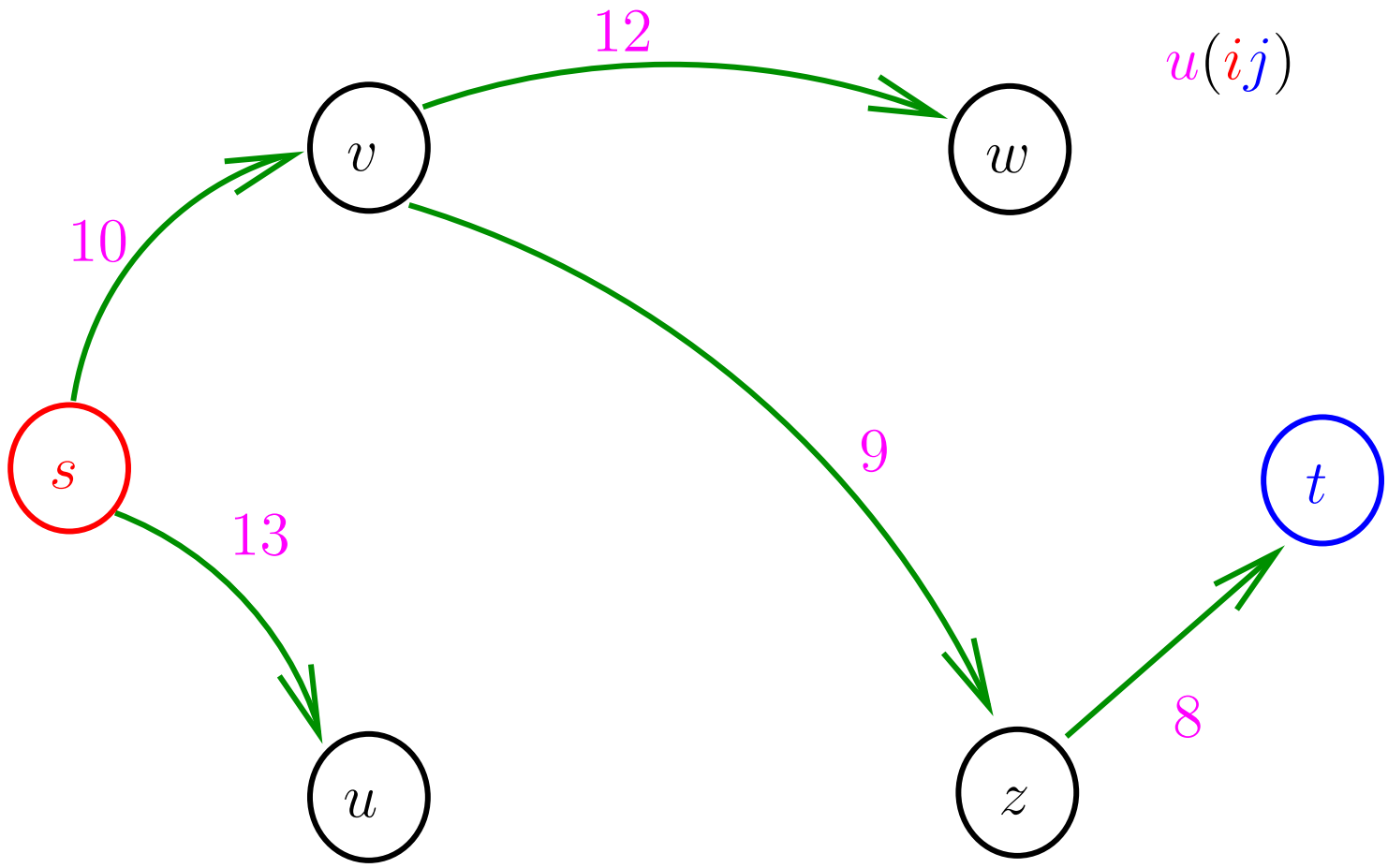



Arcos ausentes têm capacidade nula.

# Rede residual para $\triangle = 8$



# Caminho de incremento $\geq \Delta$



# Algoritmo Capacity-Scaling

CAPACITY-SCALING $(N, A, u, s, t)$

1 $U \leftarrow \max\{u(ij) : ij \in A\}$
2 $\check{x} \leftarrow 0$
3 $\Delta \leftarrow 2^{\lfloor \lg U \rfloor}$
4 **enquanto** $\Delta \geq 1$ **faça**
5 $\quad A_{\check{x}} \leftarrow \{ij \in A : \check{x}(ij) + \Delta \leq u(ij)\}$
6 $\quad \langle y, P \rangle \leftarrow$ BUSCA $(N, A_{\check{x}}, s, t)$
7 $\quad$ **se** $y(t) - y(s) \leq 0$
8 $\quad\quad$ **então** $\check{x} \leftarrow$ INCREMENTE-FLUXO $(\check{x}, P)$
9 $\quad\quad$ **senão** $\Delta \leftarrow \Delta/2$
10 $x \leftarrow$ FLUXO $(\check{x})$
11 $T \leftarrow \{j \in N : y(j) - y(s) > 0\}$
12 **devolva** $x$ e $T$

# Número de fases

O valor de $\Delta$ permanece constante durante a execução do bloco de linhas 5–8.

Diremos que cada seqüência de execuções desse bloco de linhas é uma fase (= *scaling phase*).

O fim de cada fase é marcado pela execução da linha 9, onde $\Delta' := \Delta/2$ assume o papel de $\Delta$ na próxima fase.

Conclusão: o número de fases é

$$\leq 1 + \lfloor \lg U \rfloor.$$

# Número de iterações por fase

No início de uma fase não existe um caminho de incremento de capacidade $\geq 2\,\Delta$.

Logo, existe um $st$-corte $\nabla(\overline{T}, T)$ tal que

$$u(i, j) \leq \check{x}(ij) + 2\,\Delta,$$

para cada $ij$ em $\nabla(\overline{T}, T)$. De fato, basta tomar $T := N - S$, onde $S$ é o conjunto nós quesão términos de caminhos de incremento com origem em $s$ e capacididade $\geq 2\,\Delta$.

Portanto,

$$u(\overline{T}, T) \leq \check{x}(\overline{T}, T) + |\nabla(\overline{T}, T)|\,2\,\Delta \leq \check{x}(\overline{T}, T) + 2\,m\,\Delta.$$

Como cada execução das linhas 5–8 "envia" $\geq \Delta$ unidades de fluxo de $s$ a $t$, então em cada fase têm $\leq 2m$ execuções das linhas 5–8.

# Consumo de tempo

O número de iterações das linhas 4–9 é $\mathrm{O}(m \lg U)$.

| linha | consumo de todas as execuções da linha |
|---|---|
| 1–3 | $\mathrm{O}(m)$ |
| 4 | $\mathrm{O}(m \lg U) \times \mathrm{O}(1) = \mathrm{O}(m \lg U)$ |
| 5 | $\mathrm{O}(m \lg U) \times \mathrm{O}(m) = \mathrm{O}(m^2 \lg U)$ |
| 6 | $\mathrm{O}(m \lg U) \times \mathrm{O}(n+m) = \mathrm{O}((nm + m^2) \lg U)$ |
| 7 | $\mathrm{O}(m \lg U) \times \mathrm{O}(1) = \mathrm{O}(m \lg U)$ |
| 8 | $\mathrm{O}(m \lg U) \times \mathrm{O}(n) = \mathrm{O}(nm \lg U)$ |
| 9 | $\mathrm{O}(\lg U) \times \mathrm{O}(1) = \mathrm{O}(\lg U)$ |
| 11-13 | $\mathrm{O}(n+m)$ |
| total | = $\mathrm{O}(m^2 \lg U)$ (para redes conexas $n \leq m$) |

# Conclusão

O algoritmo CAPACITY-SCALING faz não mais que $2m(1 + \lfloor \lg U \rfloor)$ passos de incremento.

O consumo de tempo do algoritmo CAPACITY-SCALING é $\mathrm{O}(m^2 \lg U)$ .