Melhores momentos

CAPÍTULOS ANTERIORES

Ford e Fulkerson

Método dos caminhos de incremento

> PASSO DE INCREMENTO: encontre um caminho de incremento para o fluxo corrente. Incremente o valor do fluxo "enviando a maior quantidade possível de fluxo através do caminho".

Note que o método não especifica como encontrar o pseudo-caminho de incremento.

Edmonds e Karp

Método dos incrementos através de caminhos “curtos”

PASSO DE INCREMENTO: encontre na rede residual (do fluxo corrente) um caminho de

comprimento mínimo.

Incremente o valor do fluxo “enviando a maior quantidade possível de fluxo possível através desse caminho”.

Resumo

Invariante: no início de cada iteração temos um st-pseudofluxo $\check{x}$ que respeita as capacidades.

Algoritmo	número de passos de incremento	consumo de tempo
FORD-FULKERSON	$O(nU)$	$O(nmU)$
MAX-CAPACITY	$\leq 2m(1 + \lfloor \lg U \rfloor)$ $O(m \lg U)$	$O(n^2 m \lg U)$
CAPACITY-SCALING	$\leq 2m(1 + \lfloor \lg U \rfloor)$ $O(m \lg U)$	$O(m^2 \lg U)$
EDMONDS-KARP	nm	$O(nm^2)$

Estamos supondo que $n = O(m)$ (grafo conexo)

Dinits

EDMONDS-KARP envia fluxos através de caminhos curtos, mas calcula um 1-potencial $(s, *)$-ótimo em cada iteração.

EDMONDS-KARP descarta os resultados da busca em largura.

Idéia: reutilizar o resultado de cada busca em largura o máximo possível.

Em cada iteração o algoritmo usa "rede em camadas" ($=$ *layered network*) formadas pelos arcos que estão em algum caminho mínimo com origem em s (ou com destino t, dependo do gosto do freguês).

Dinits

	consumo de tempo passo bloqueador	consumo de tempo
DINITS	$\mathrm{O}(nm)$	$\mathrm{O}(n^2m)$
Karzanov	$\mathrm{O}(n^2)$	$\mathrm{O}(n^3)$
Sleator-Tarjan	$m \log n$	$\mathrm{O}(nm \log n)$

Karzanov utilizou "pré-fluxos".

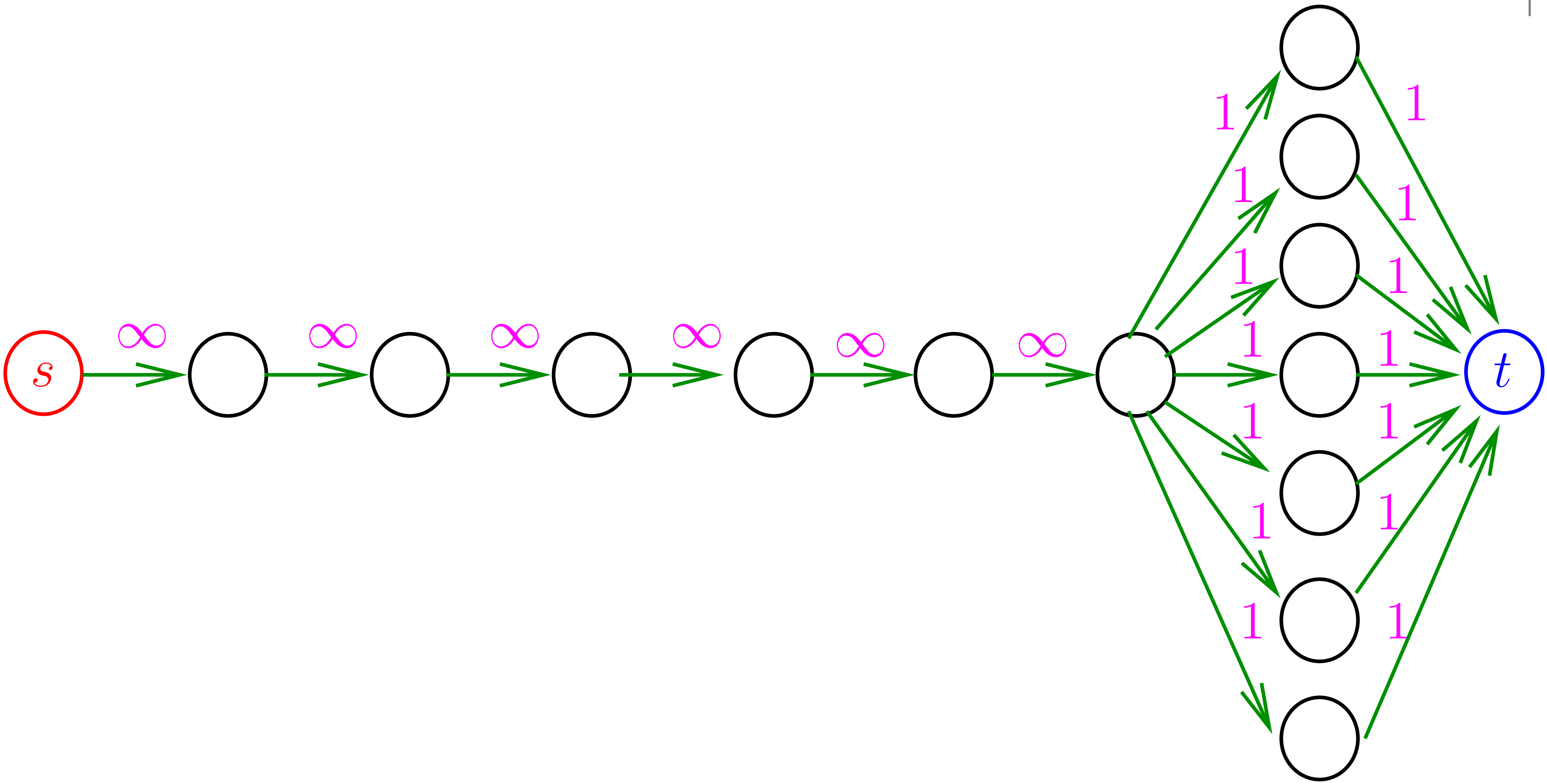
Sleator-Tarjan utilizaram "*dynamic-tree data structure*".

AULA 15

Preflow-push básico

PF 17.1, 17.2, 17.3, 17.4

Motivação

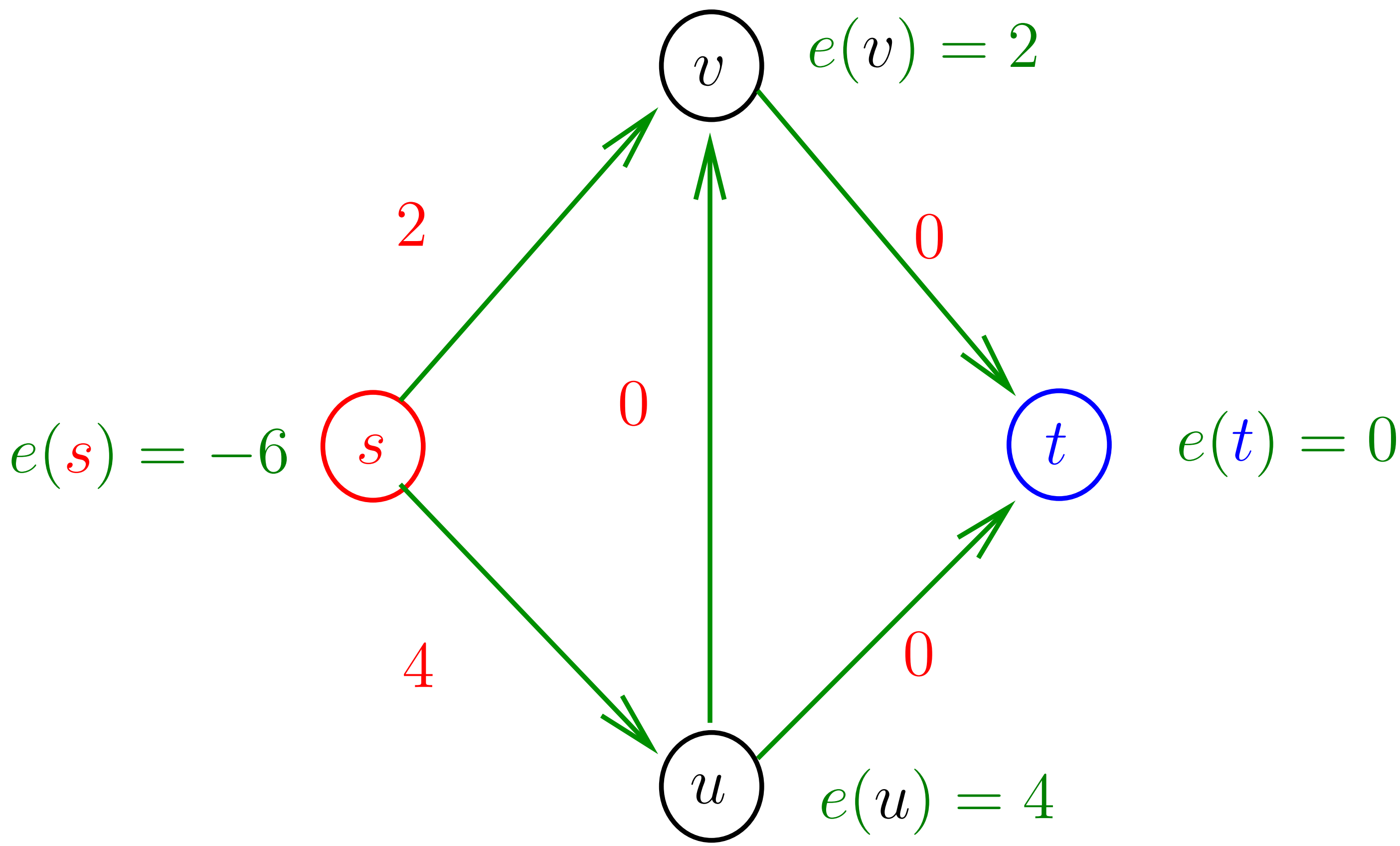


Consumo de tempo de INCREMENTE-FLUXO é “grande”.

Pré-fluxo

Um fluxo x é um pré-fluxo com fonte s se tem excesso não-negativo em cada nó i distinto de s:

$$e(i) = x(\bar{i}, i) - x(i, \bar{i}) \geq 0$$

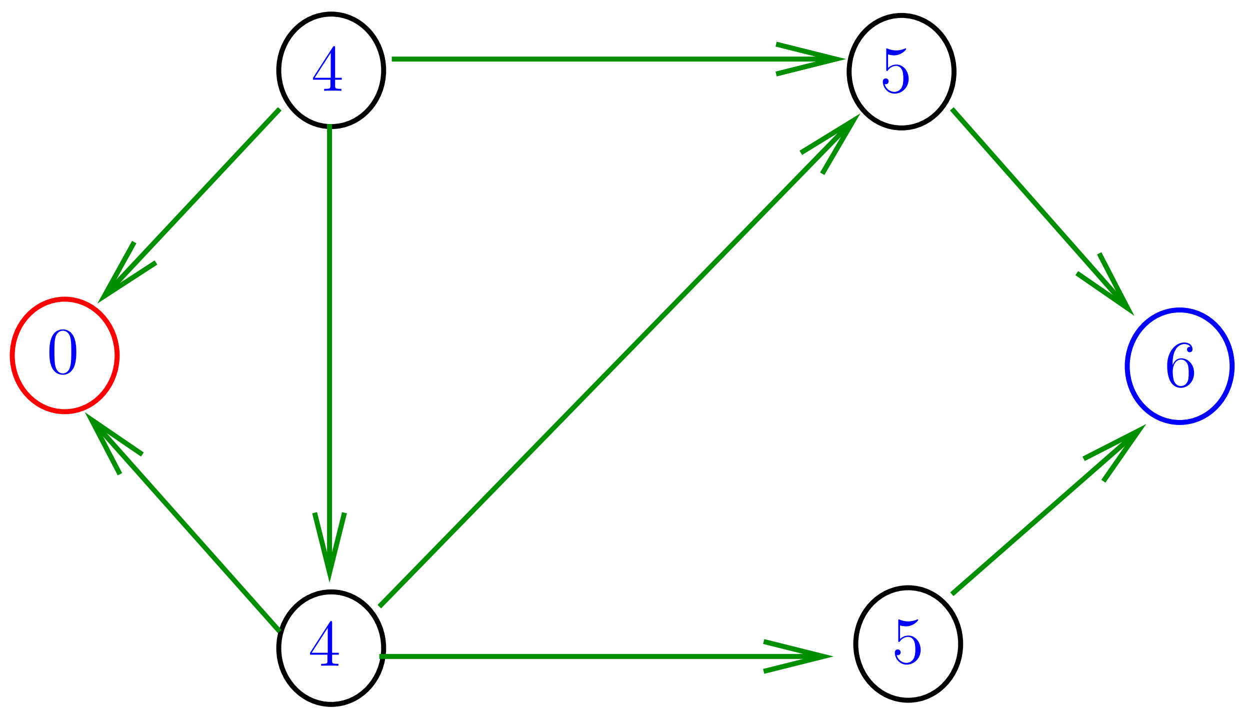


Potencial ótimo

Dado um nó t, um 1-potencial y é $(*, t)$-ótimo se:

- existe um caminho P de i a t tal que $|P| = y(t) - y(i)$ ou
- não existe um caminho de i a t e $y(t) - y(i) \geq n$.

Um arco ij é justo se $y(j) - y(i) = 1$.



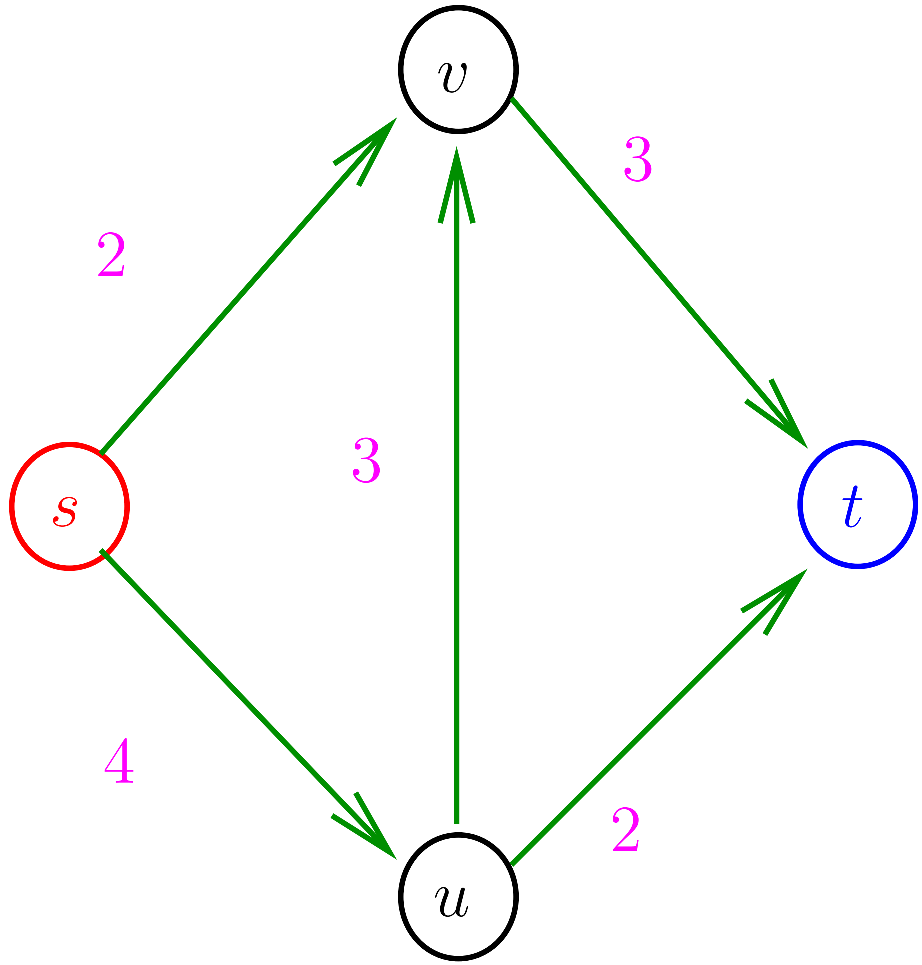
Potencial ótimo término

POTENCIAL-ÓTIMO-TÉRMINO (N, A, t)

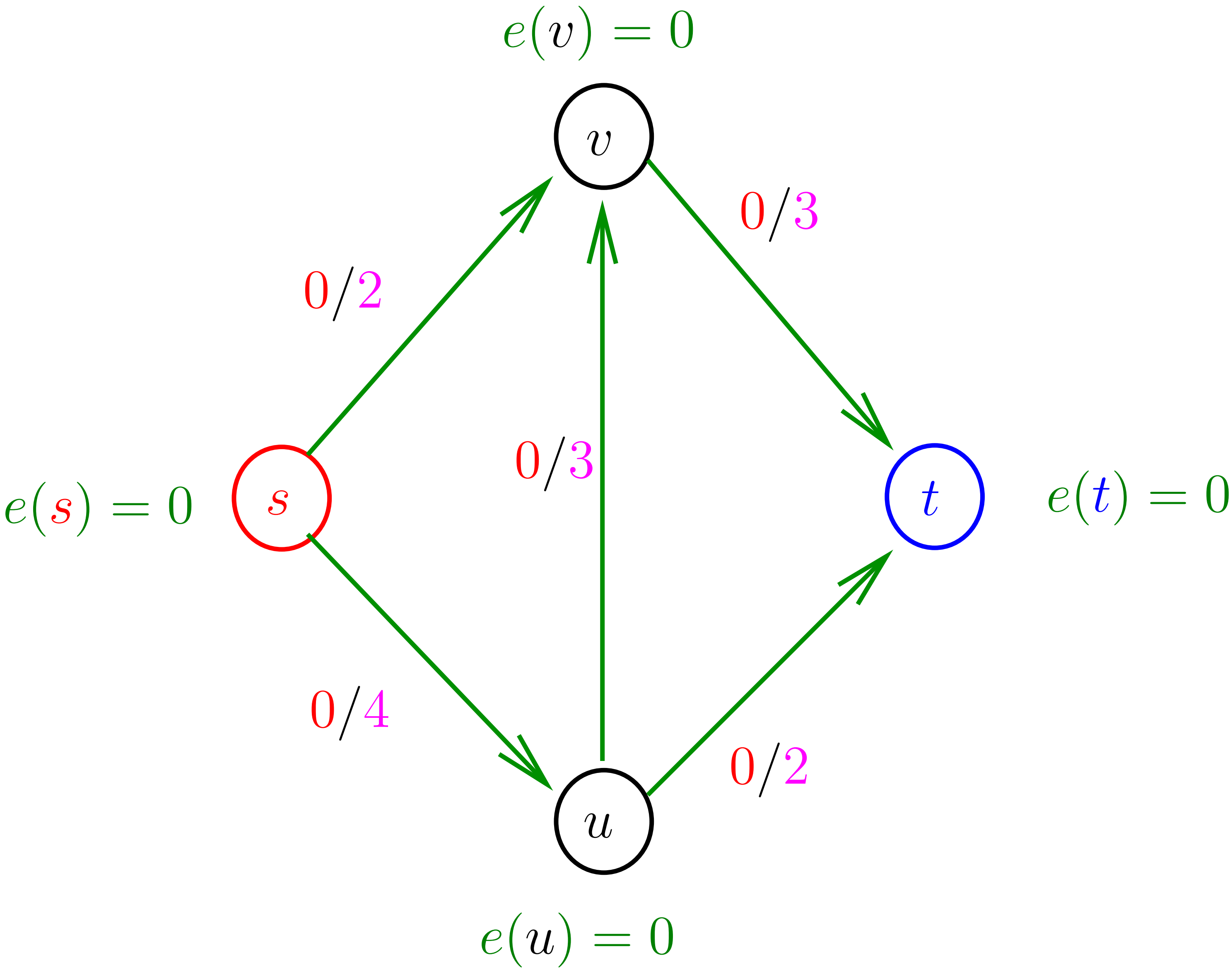
para cada i em N **faça**
    $y(i) \leftarrow 0$
$y(t) \leftarrow n$
$L \leftarrow \langle t \rangle$ $\triangleright$ L funciona como uma fila
enquanto $L \neq \langle\rangle$ **faça**
    retire o primeiro elemento, digamos j, de L
    para cada arco ij em $\tilde{A}(j)$ **faça** $\triangleright$ ij entra em j
        se $y(i) < y(j) - 1$ $\triangleright$ $y(i) = 0$
            então $y(i) \leftarrow y(j) - 1$
                acrescente i ao final de L
devolva y

Consumo de tempo: $\mathrm{O}(n + m)$

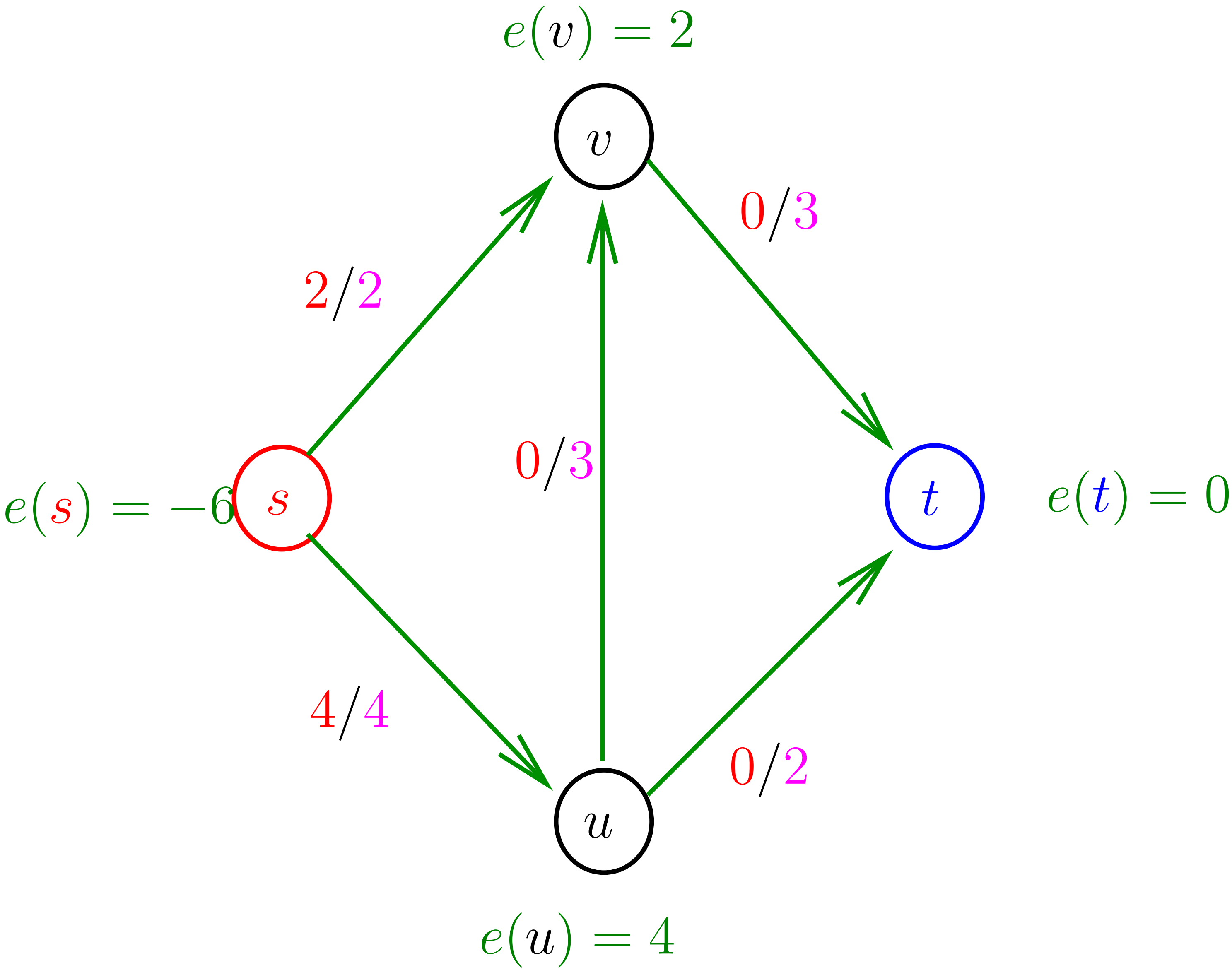
Rede



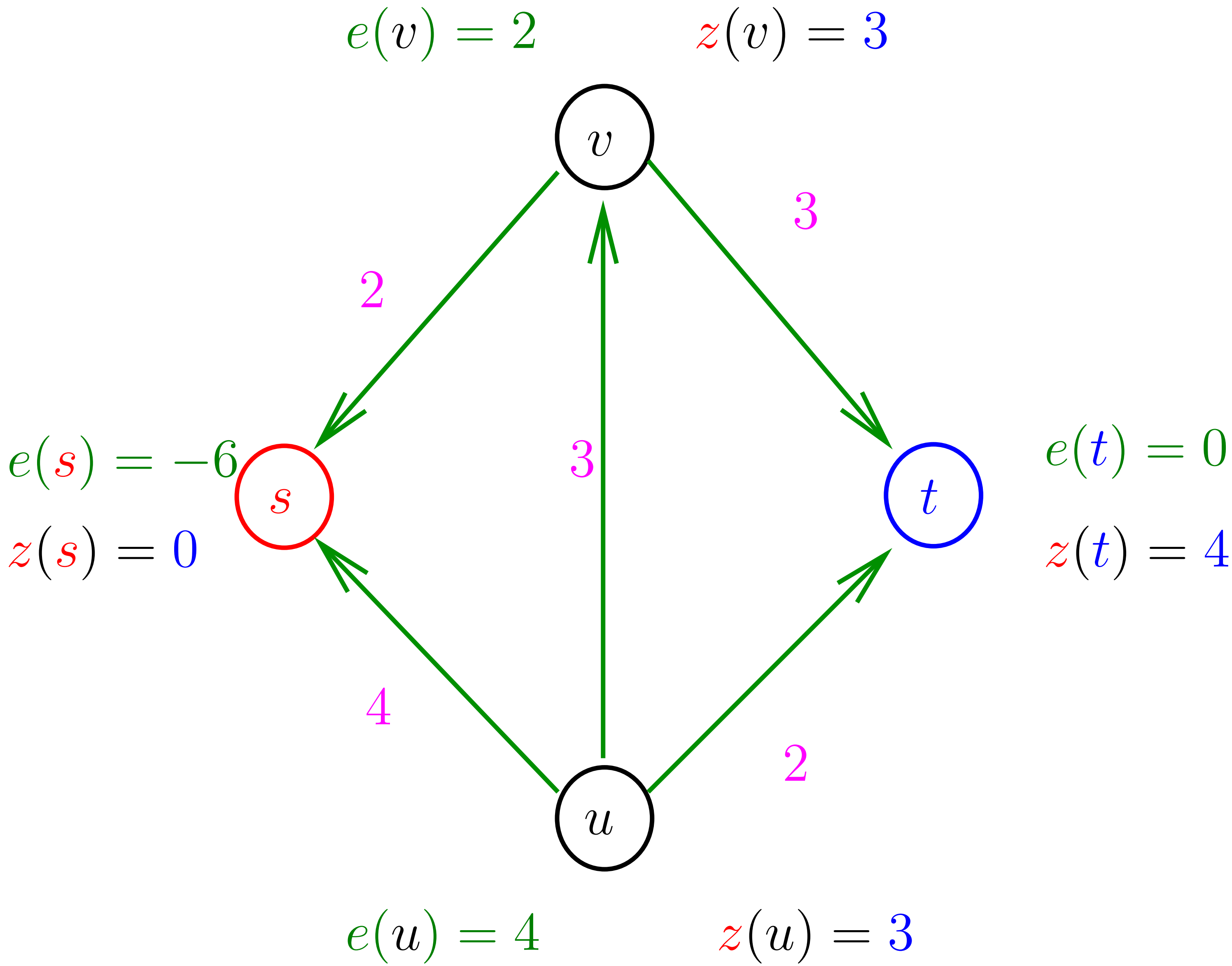
Fluxo e excessos



Pré-processamento

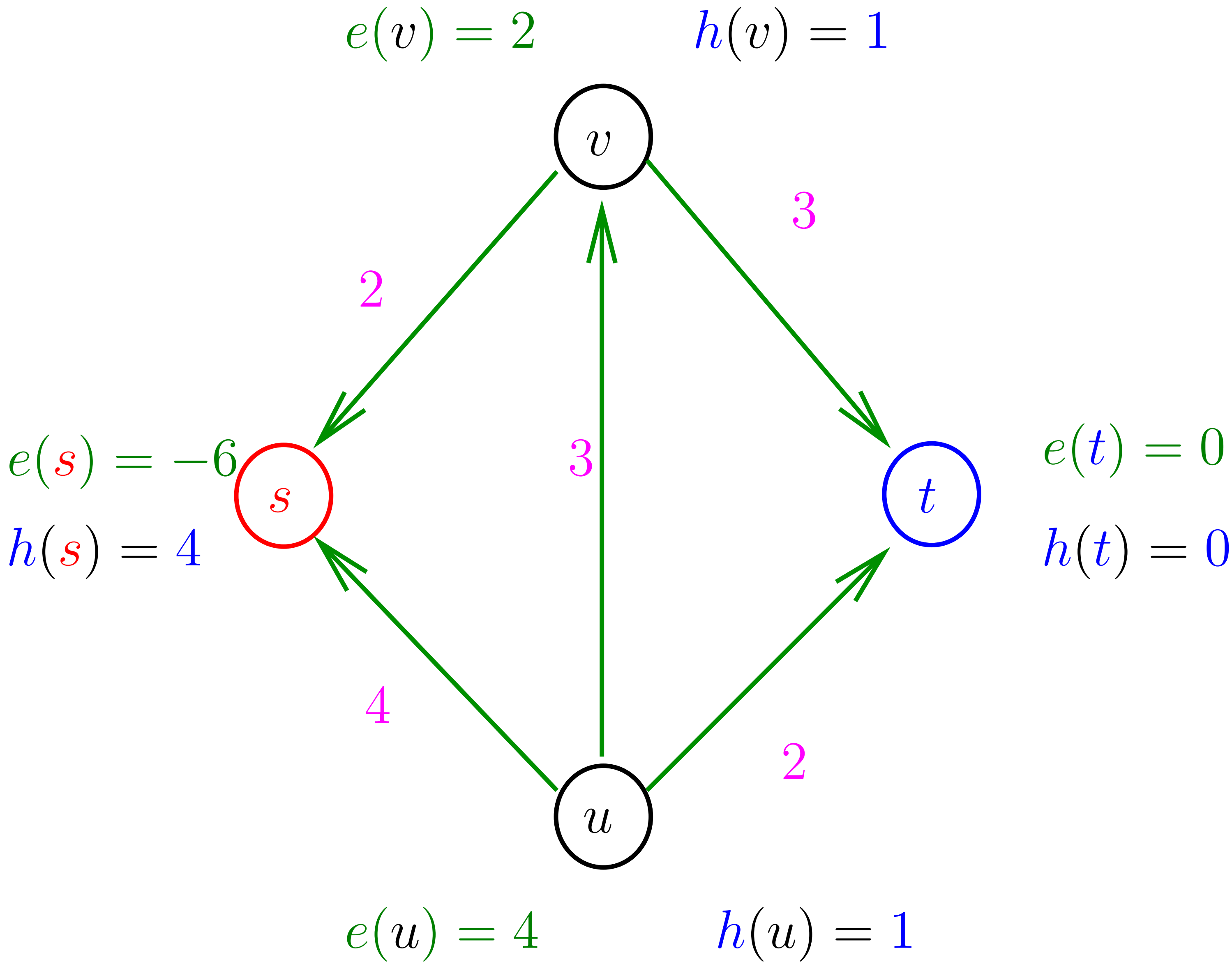


Rede residual 1



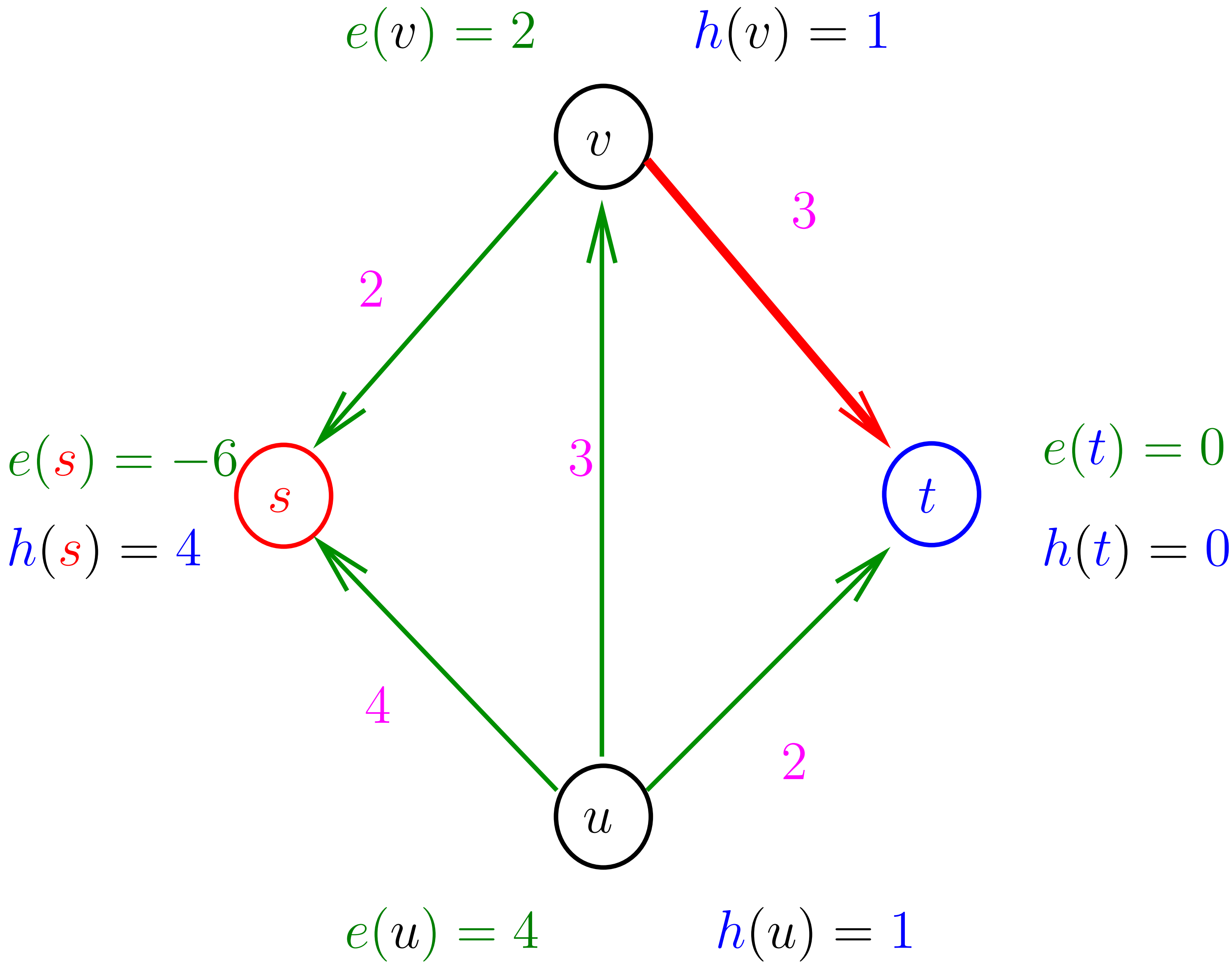
z é um 1-potencial $(*, t)$-ótimo

Rede residual 1

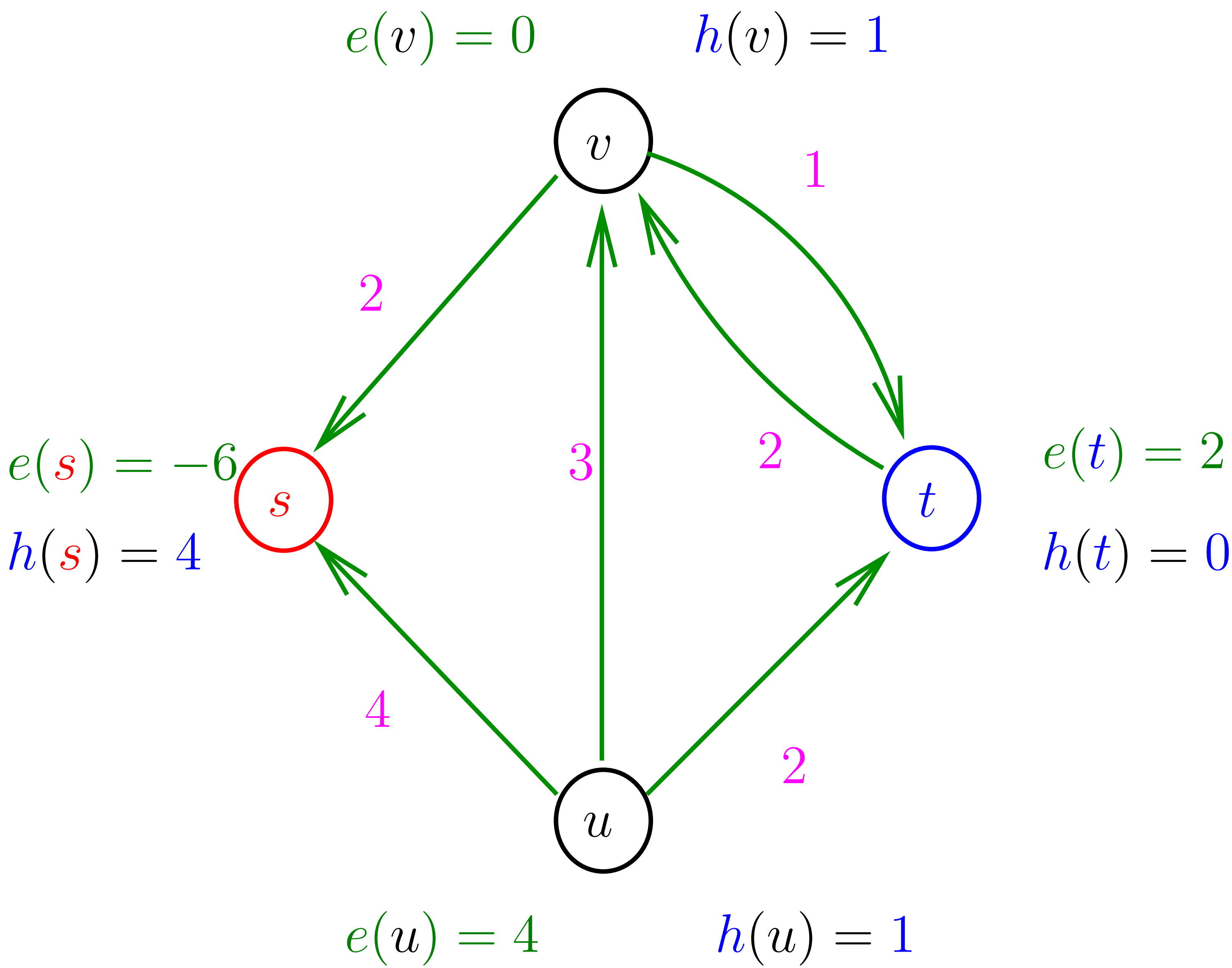


$h(i) := n - z(i)$ é a "altura" de $i \Rightarrow h(j) - h(i) \geq -1, ij \in A_{\check{x}}$

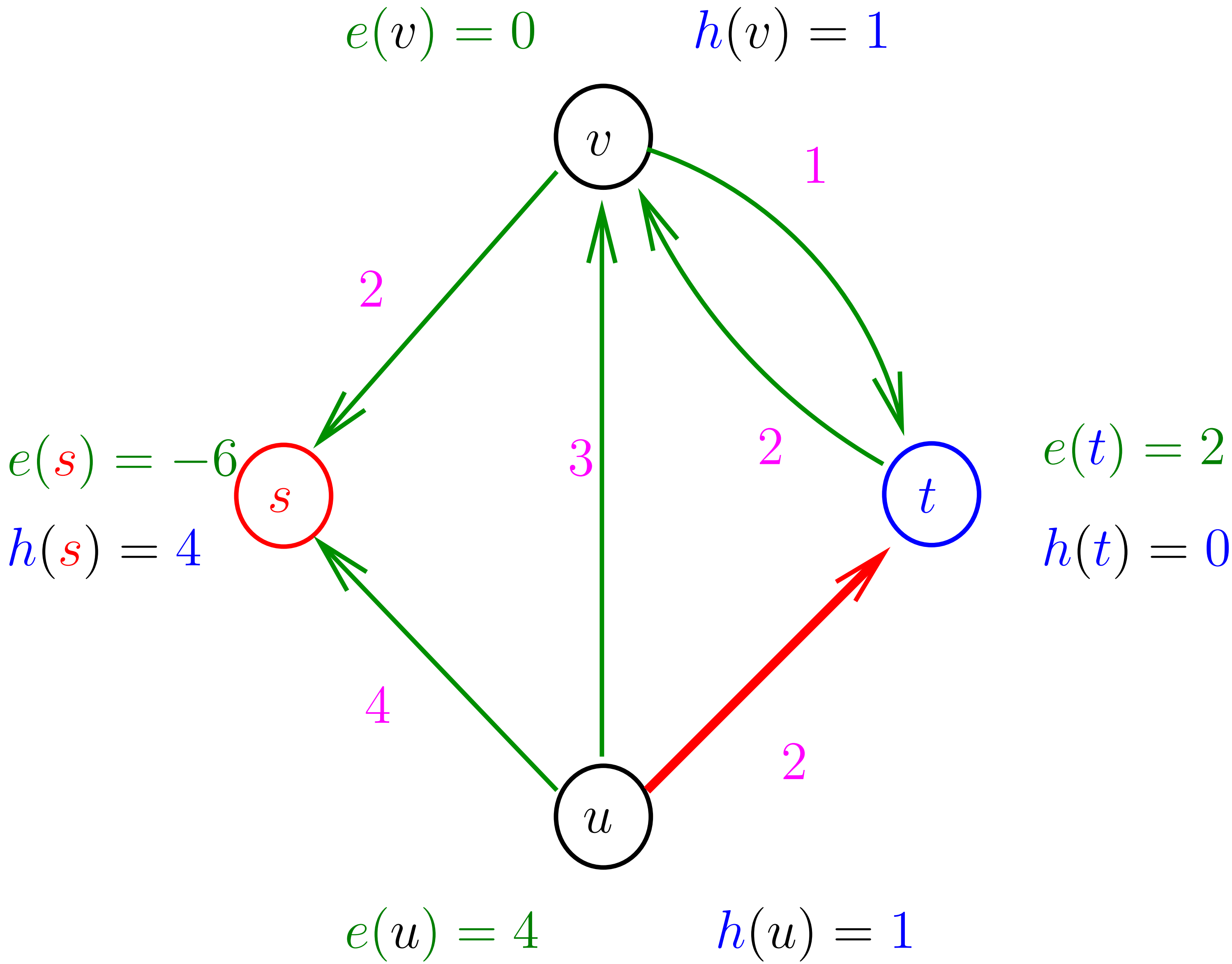
Push (vt)



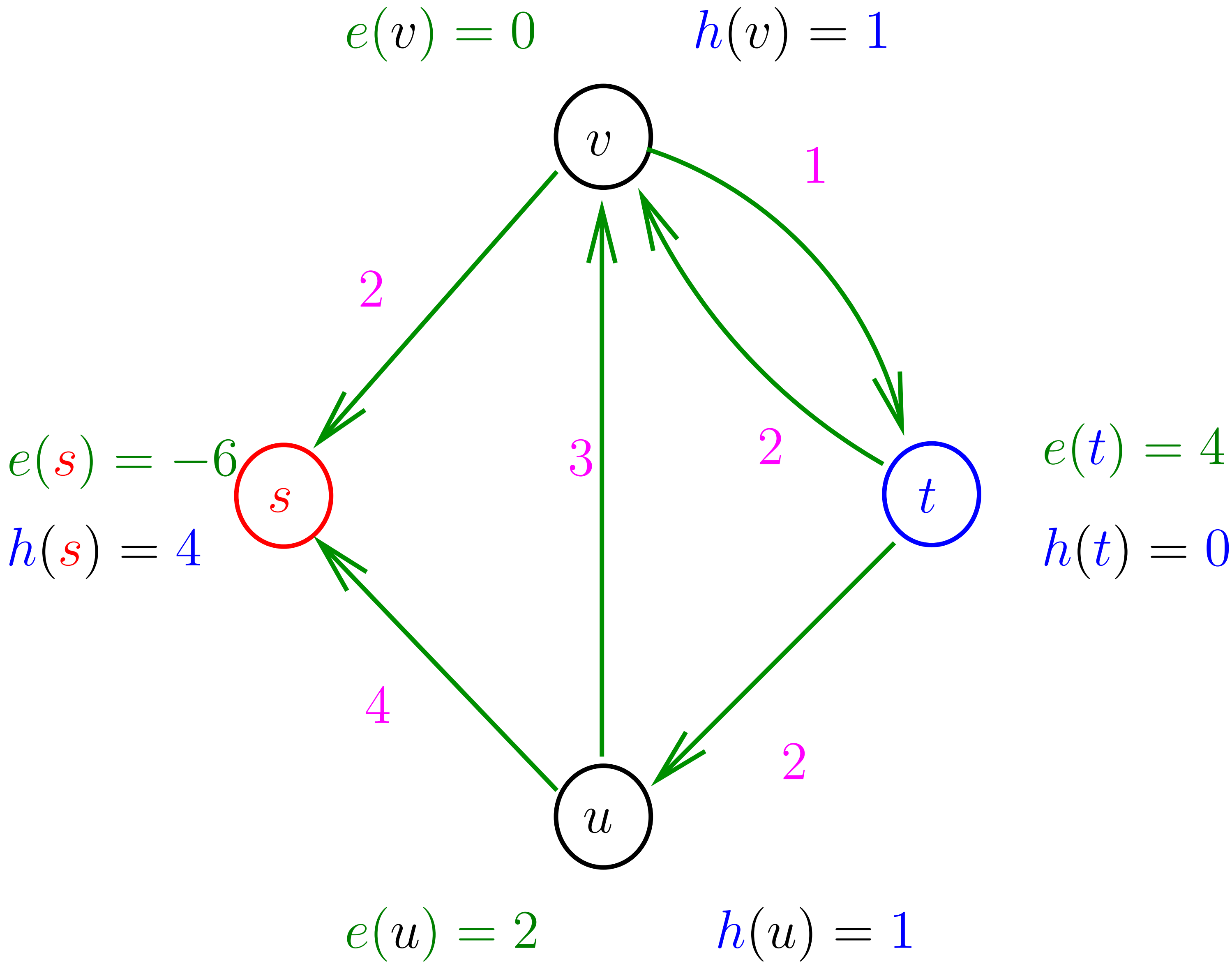
Rede residual 2



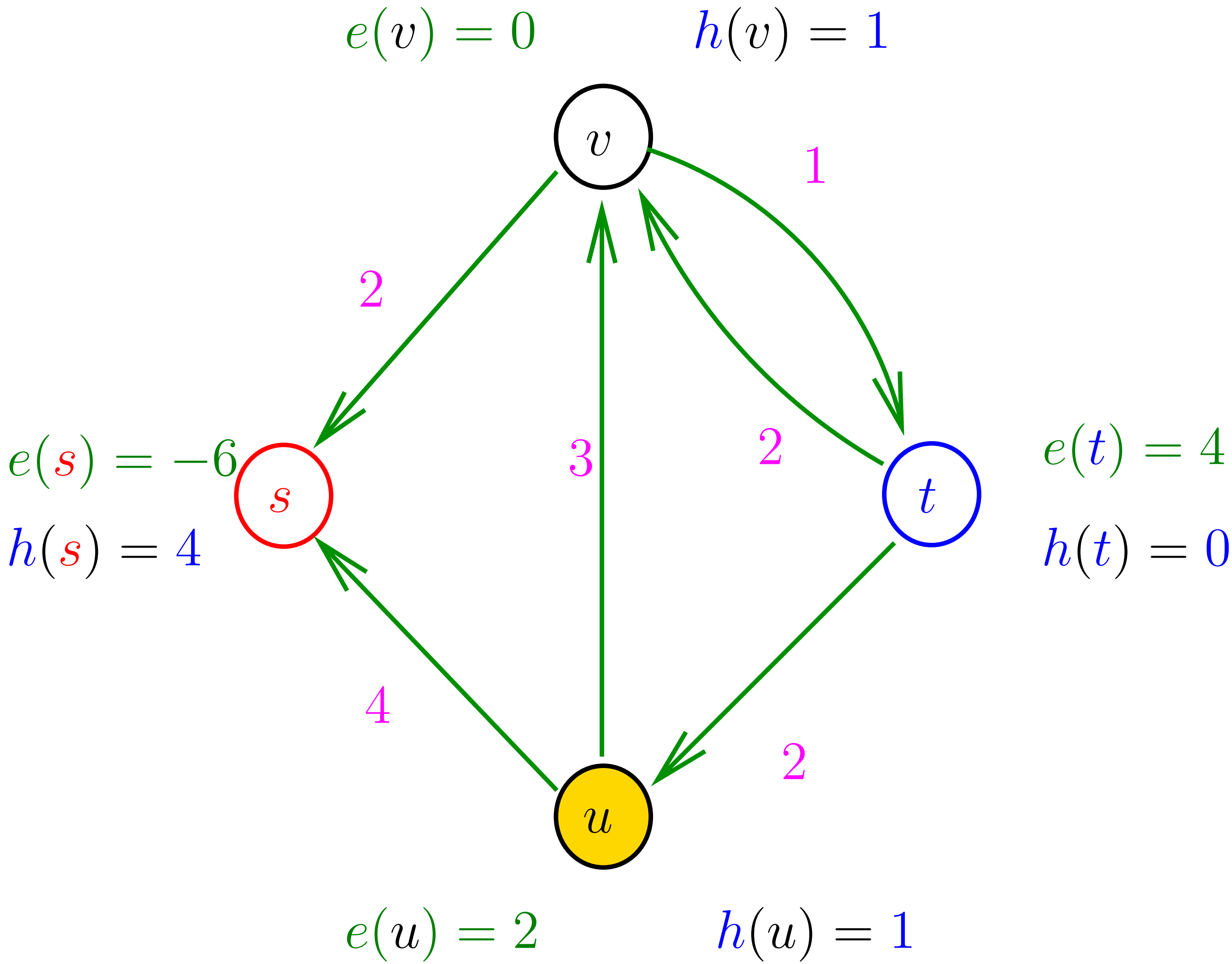
Push (ut)



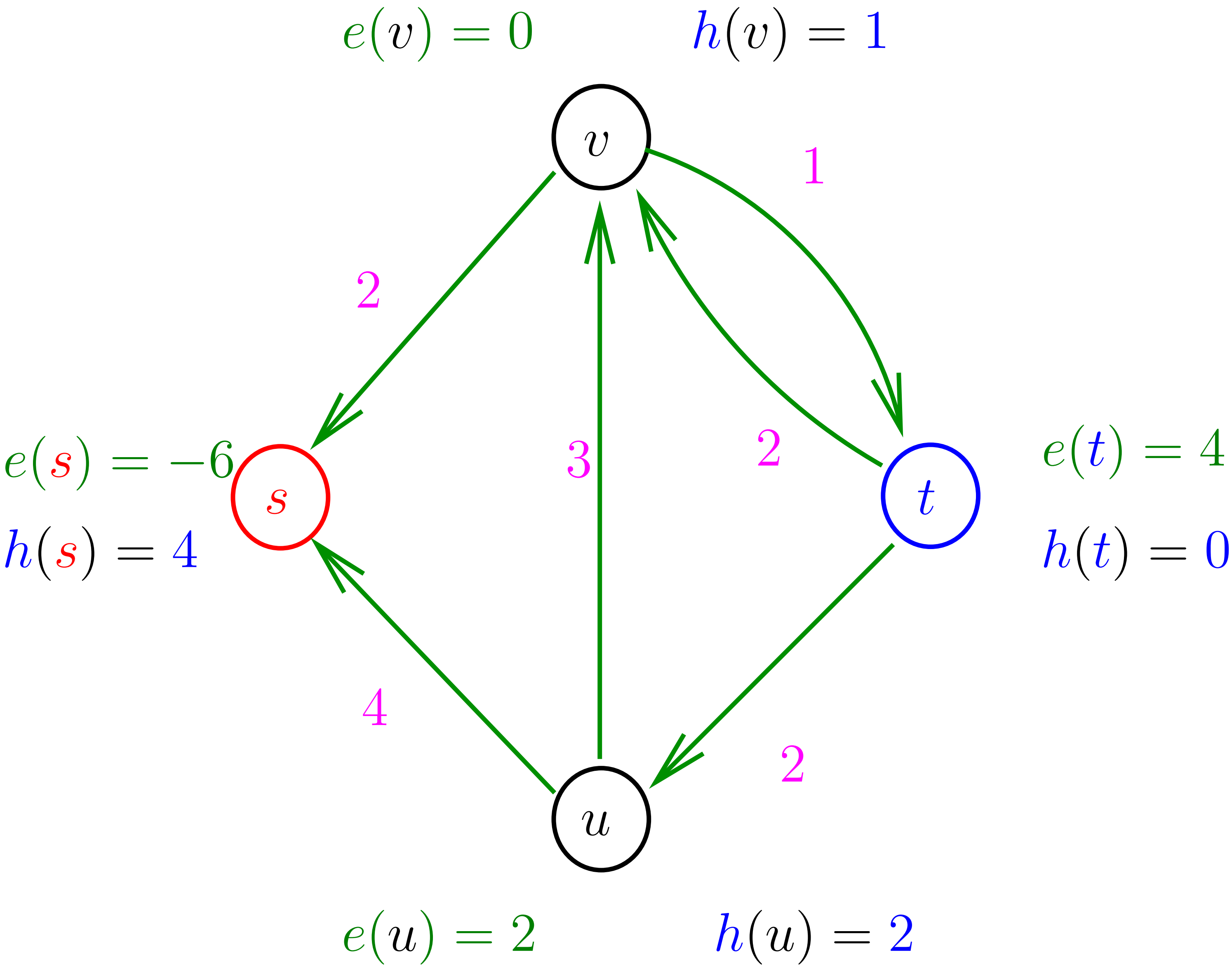
Rede residual 3



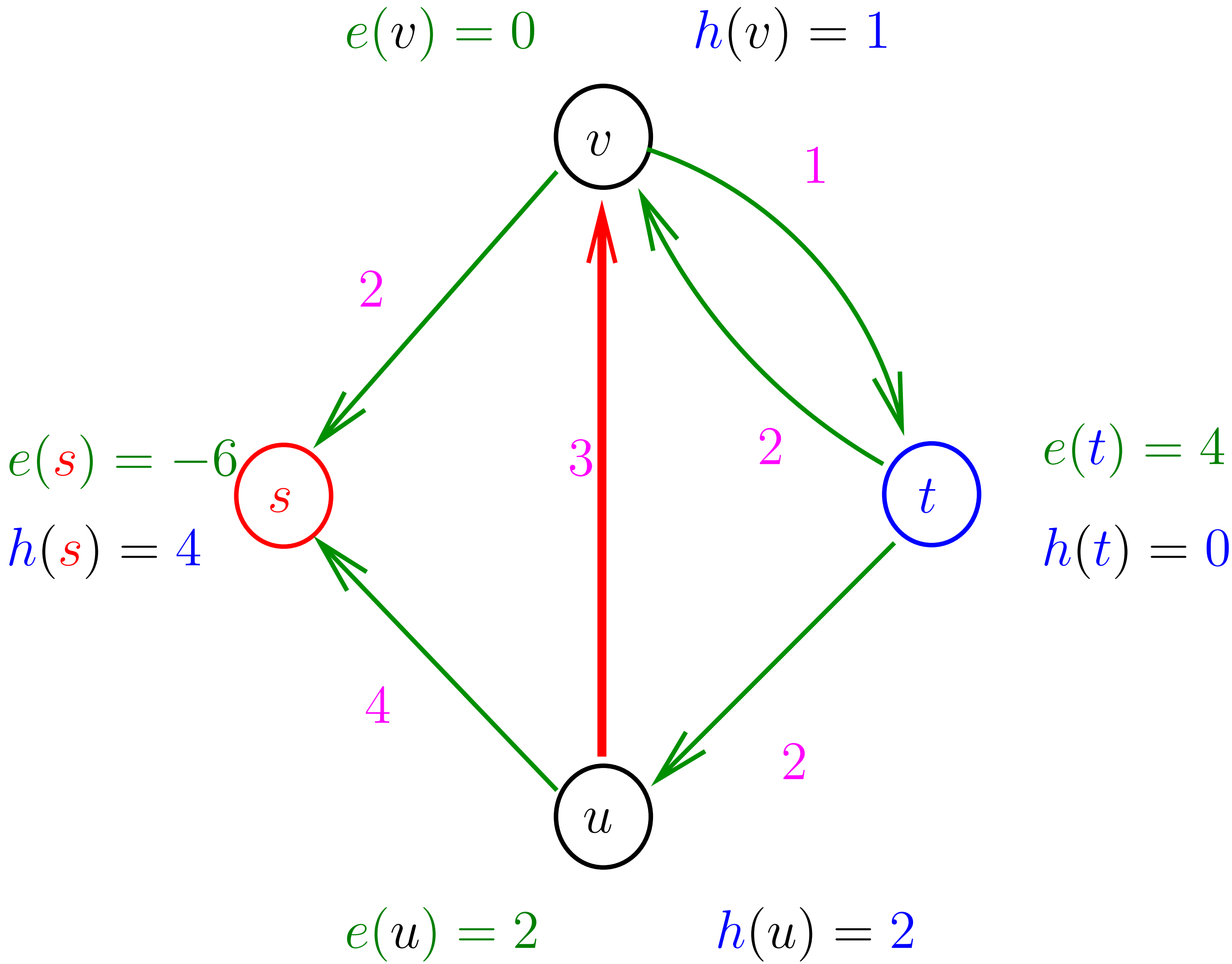
Relabel (u)



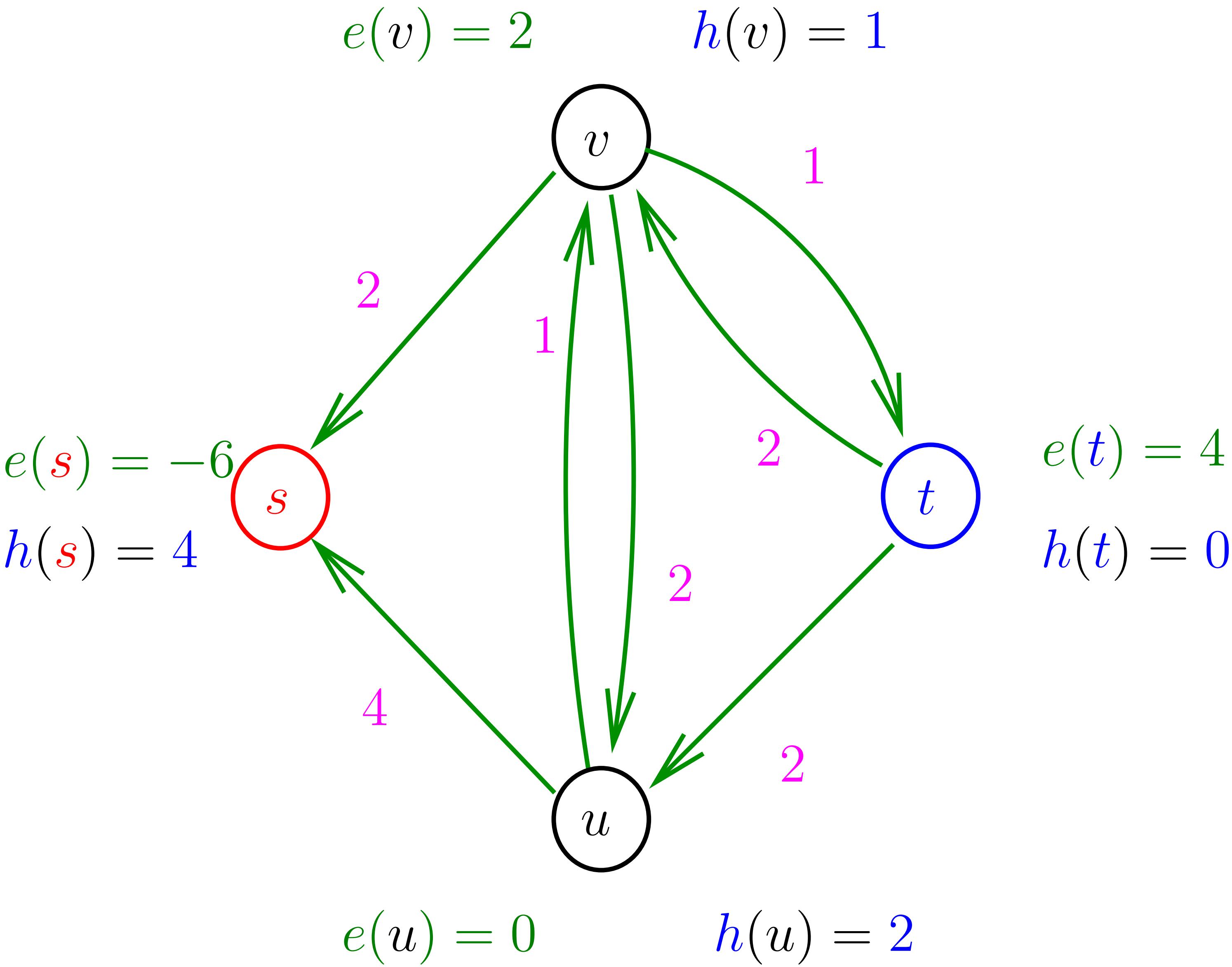
Rede residual 4



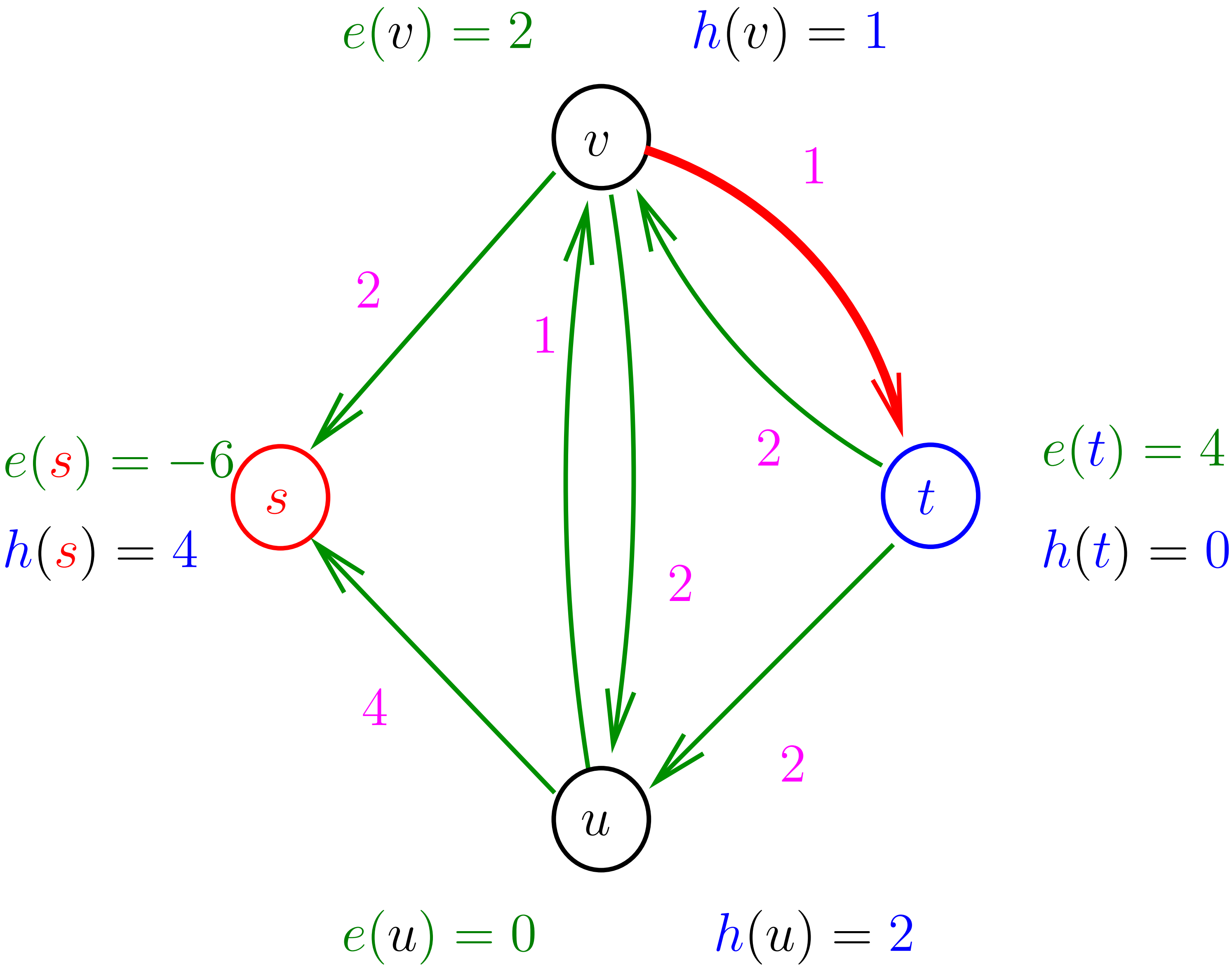
Push (uv)



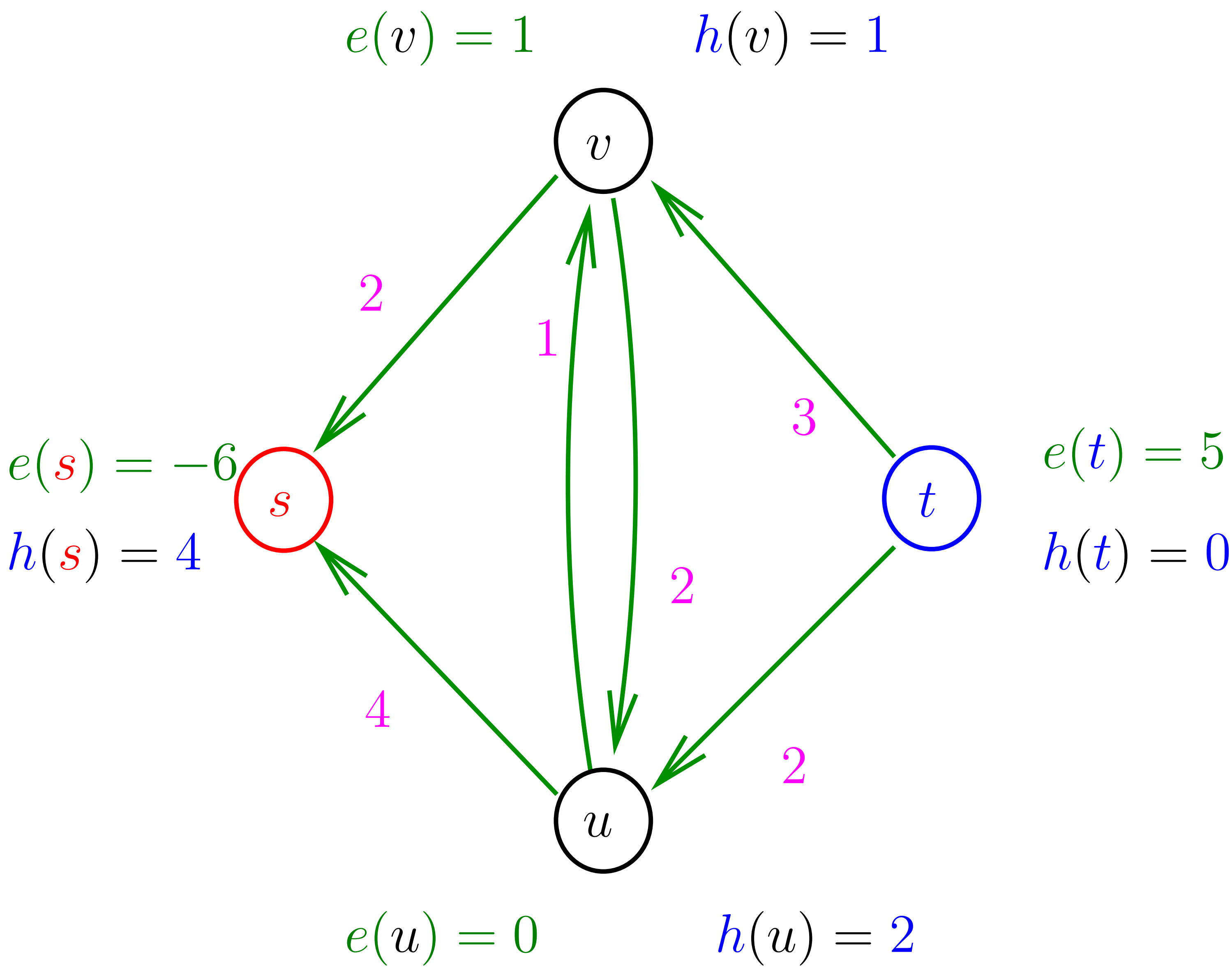
Rede residual 5



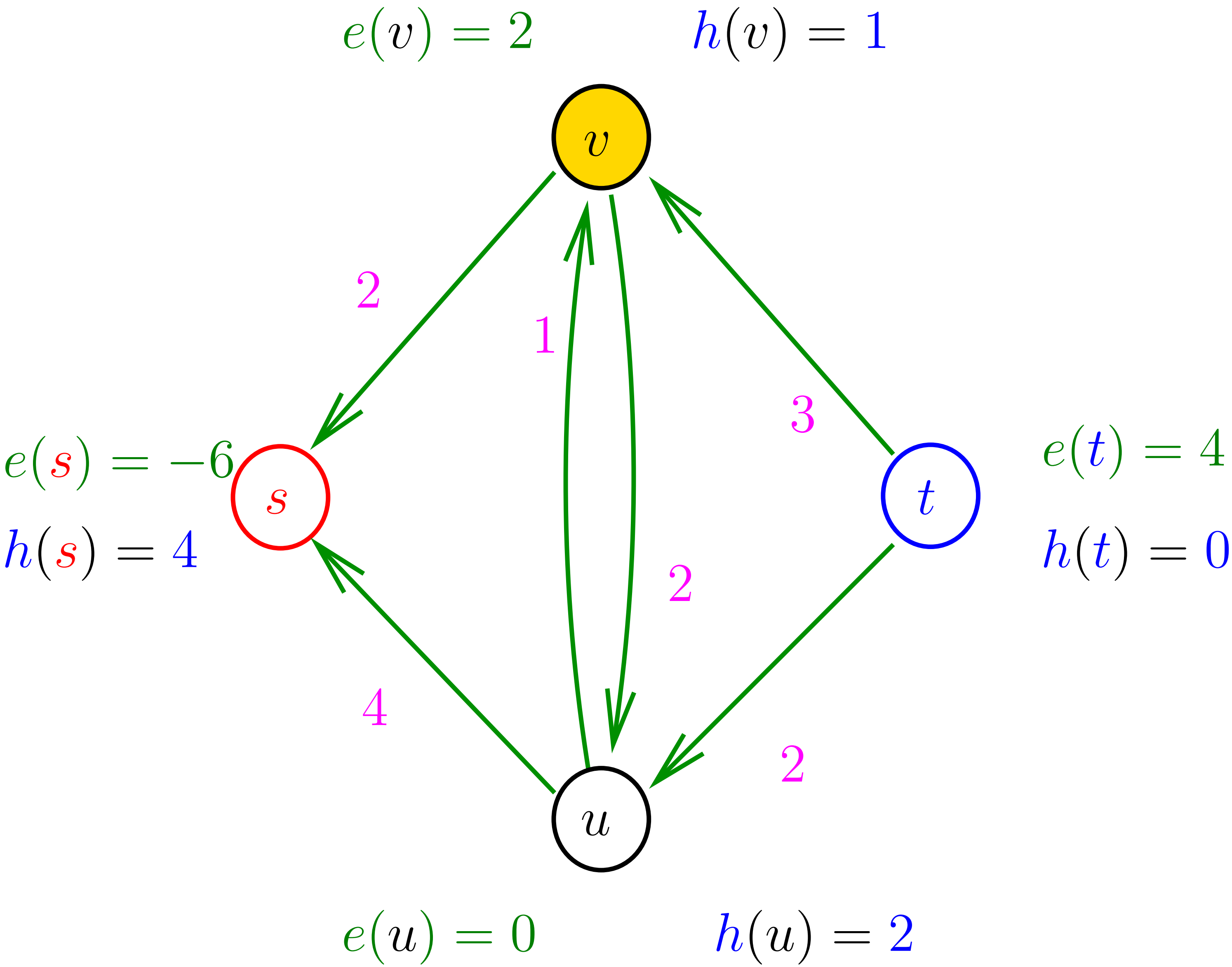
Push (vt)



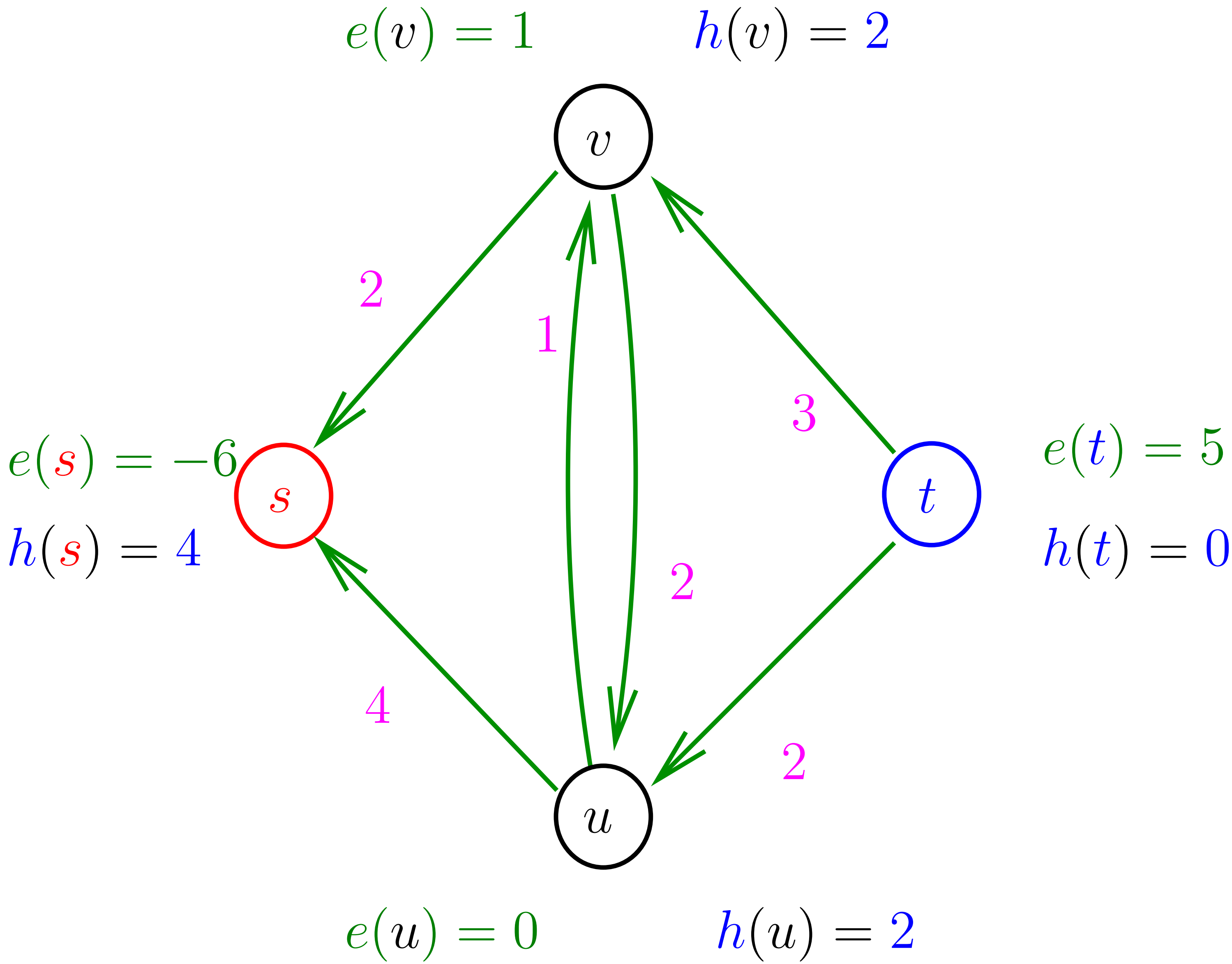
Rede residual 6



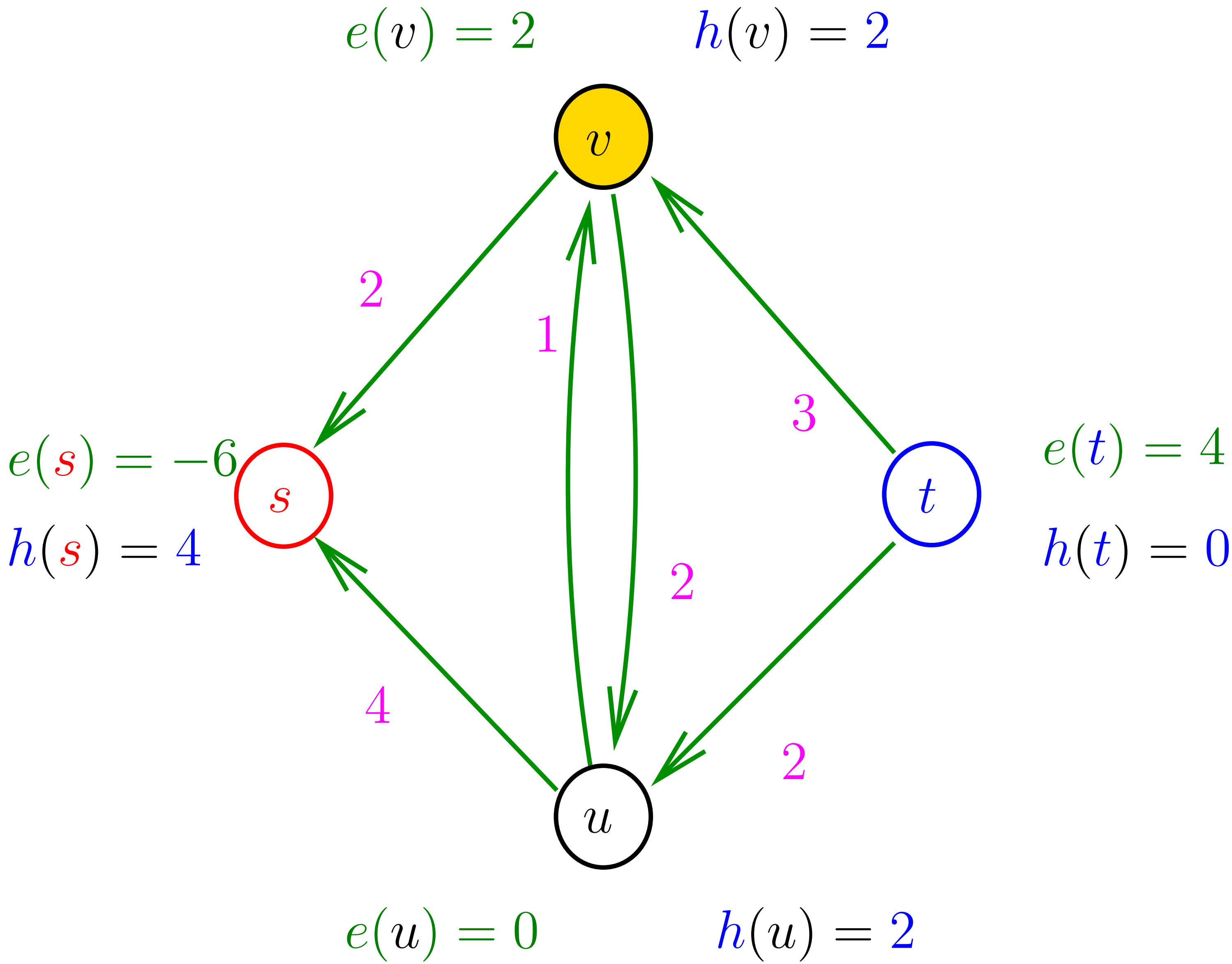
Relabel (v)



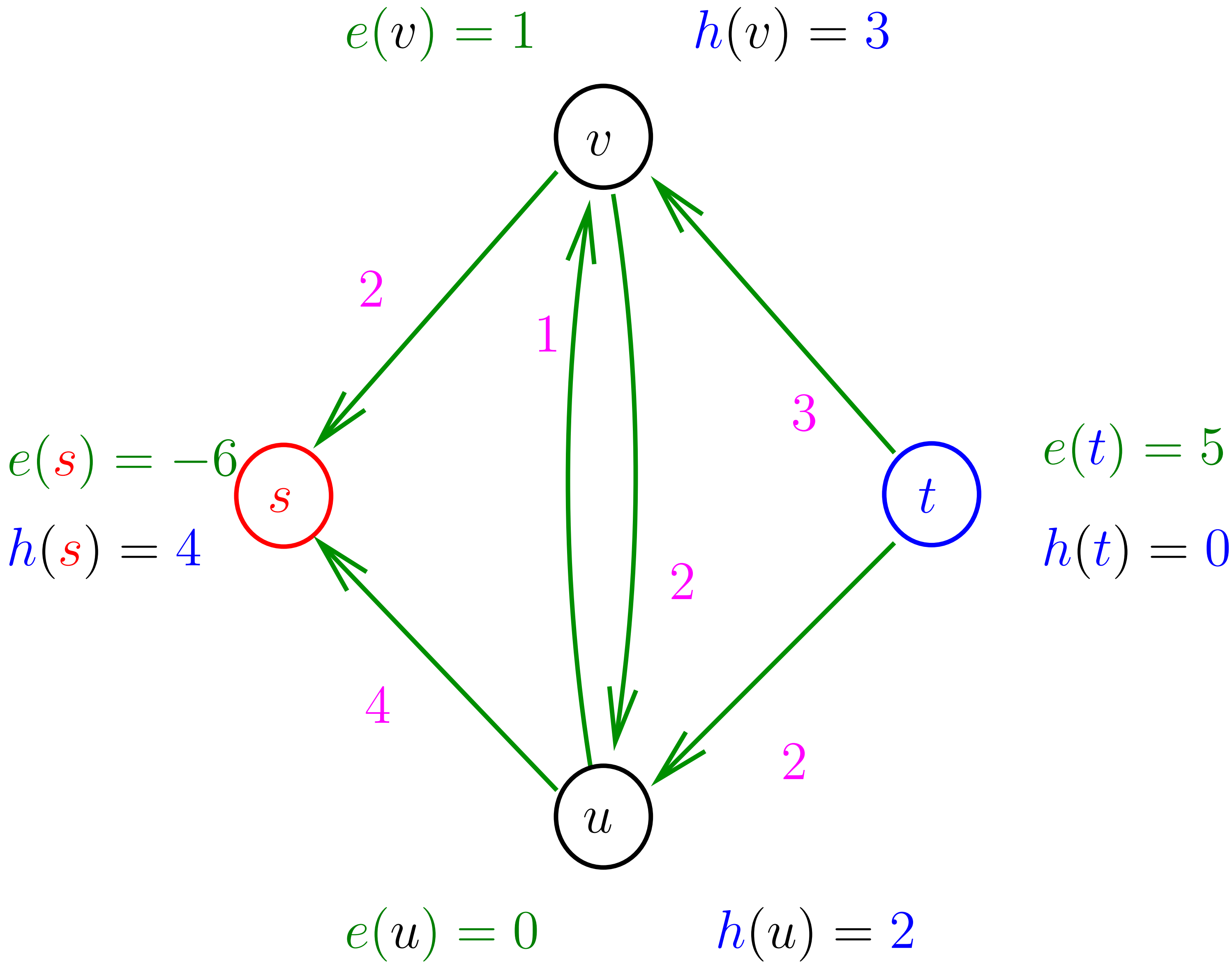
Rede residual 7



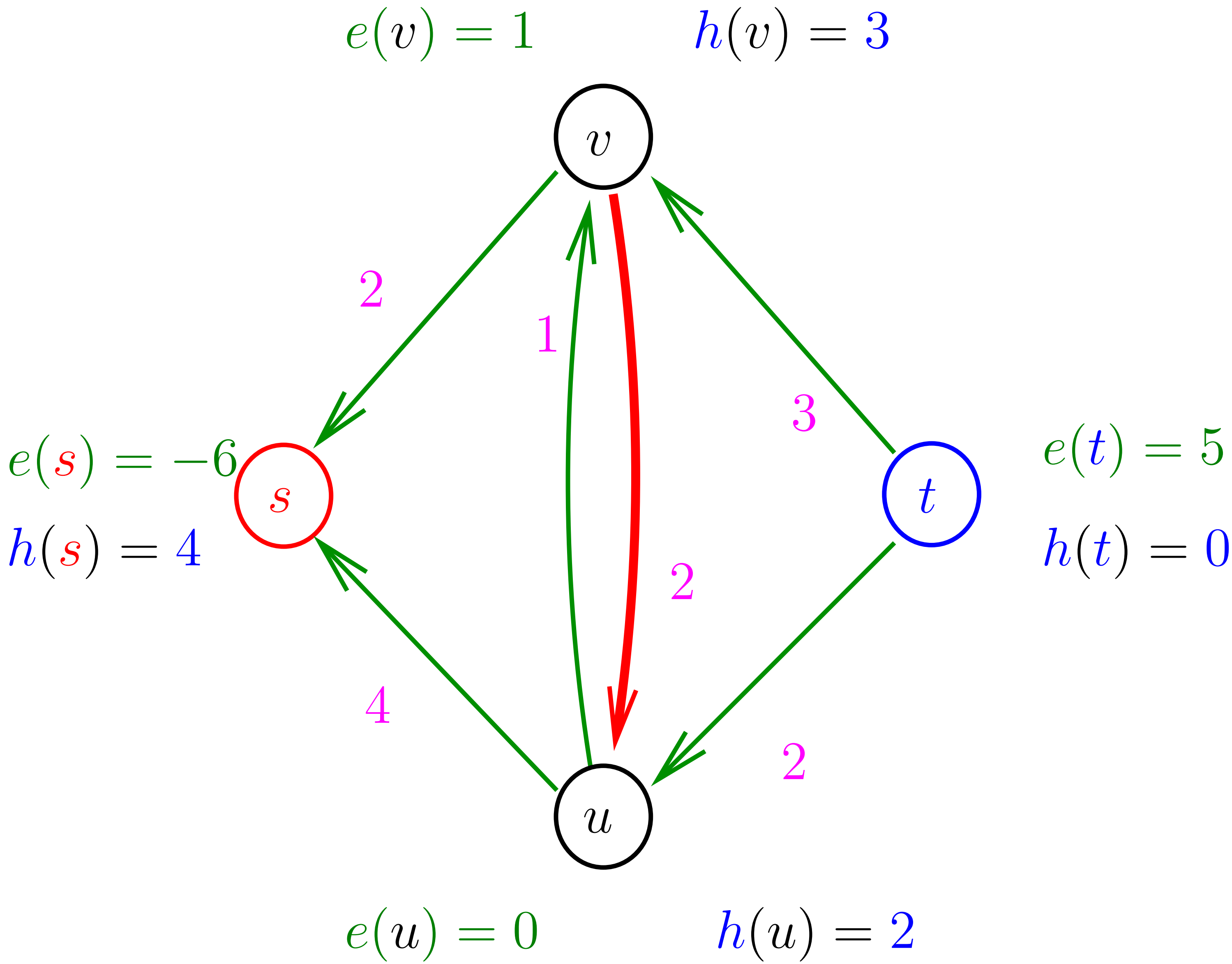
Relabel (v)



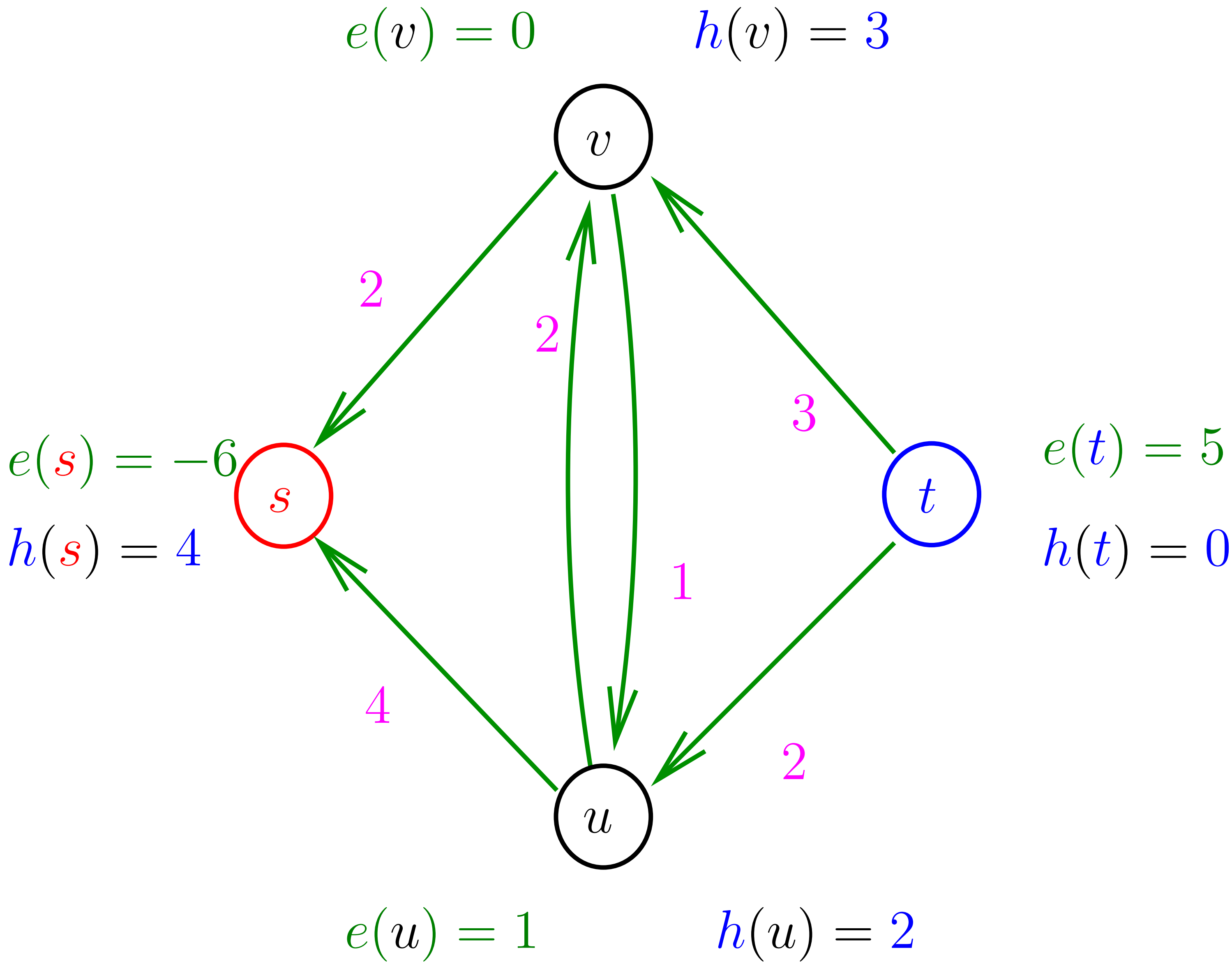
Rede residual 8



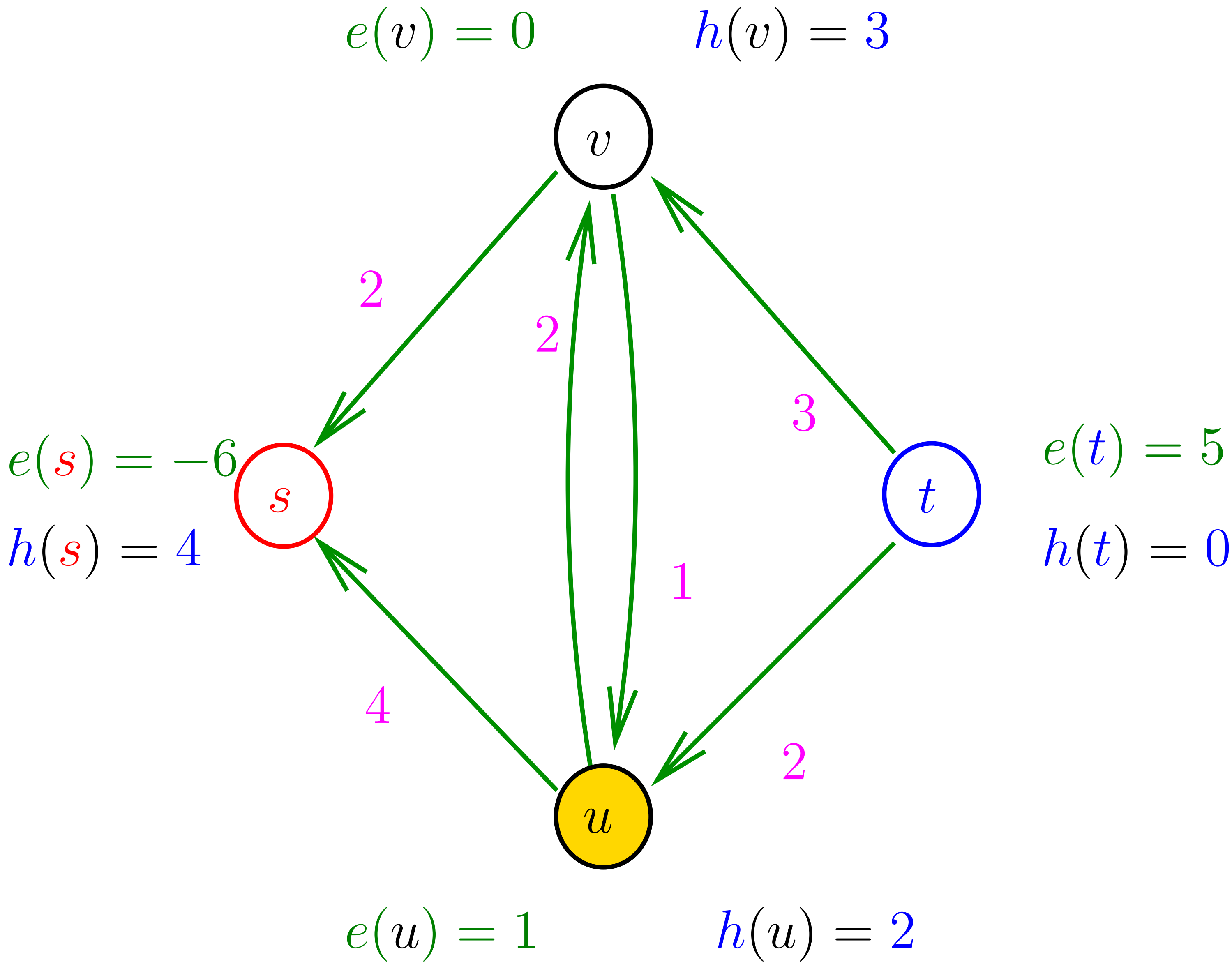
Push (vu)



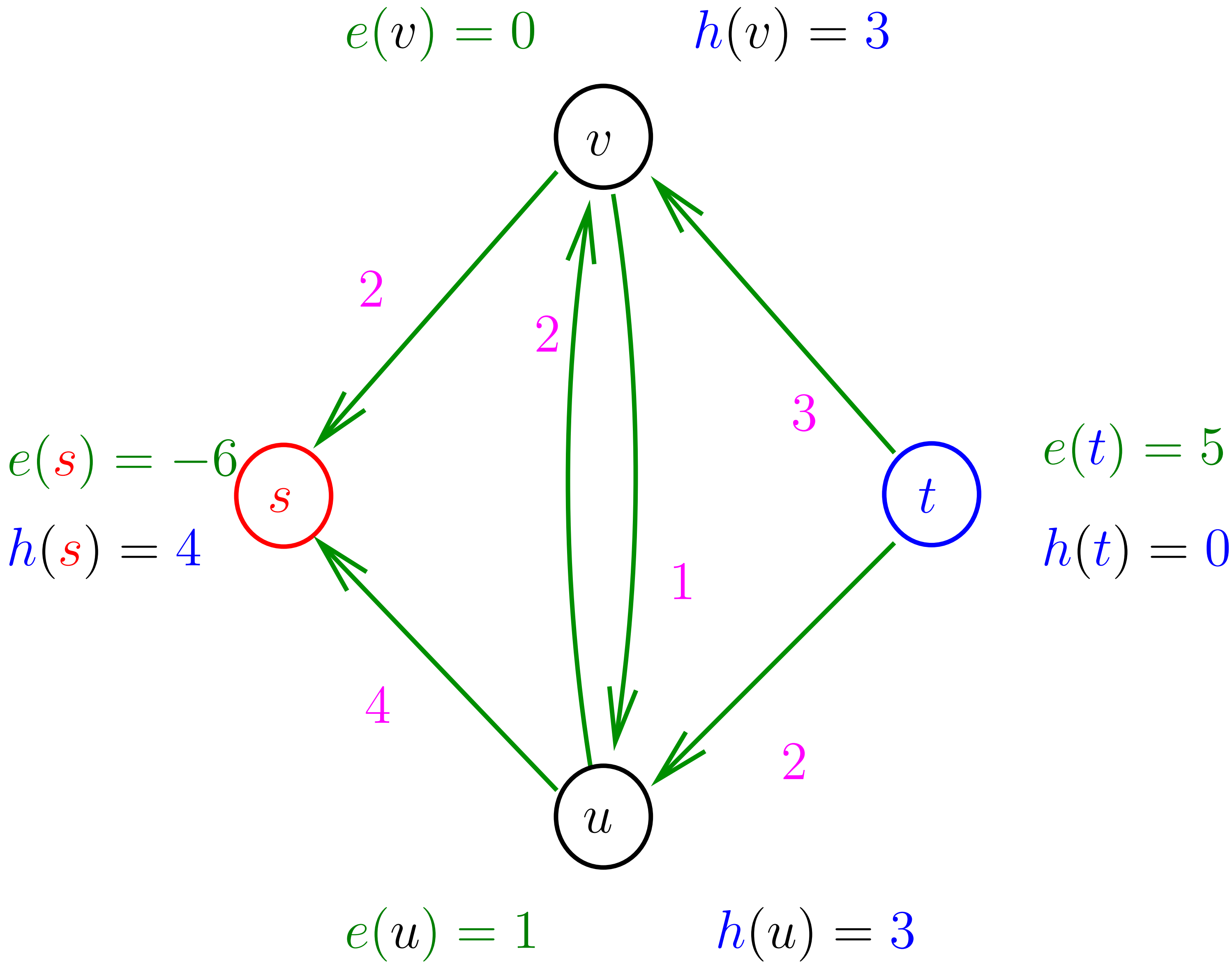
Rede residual 9



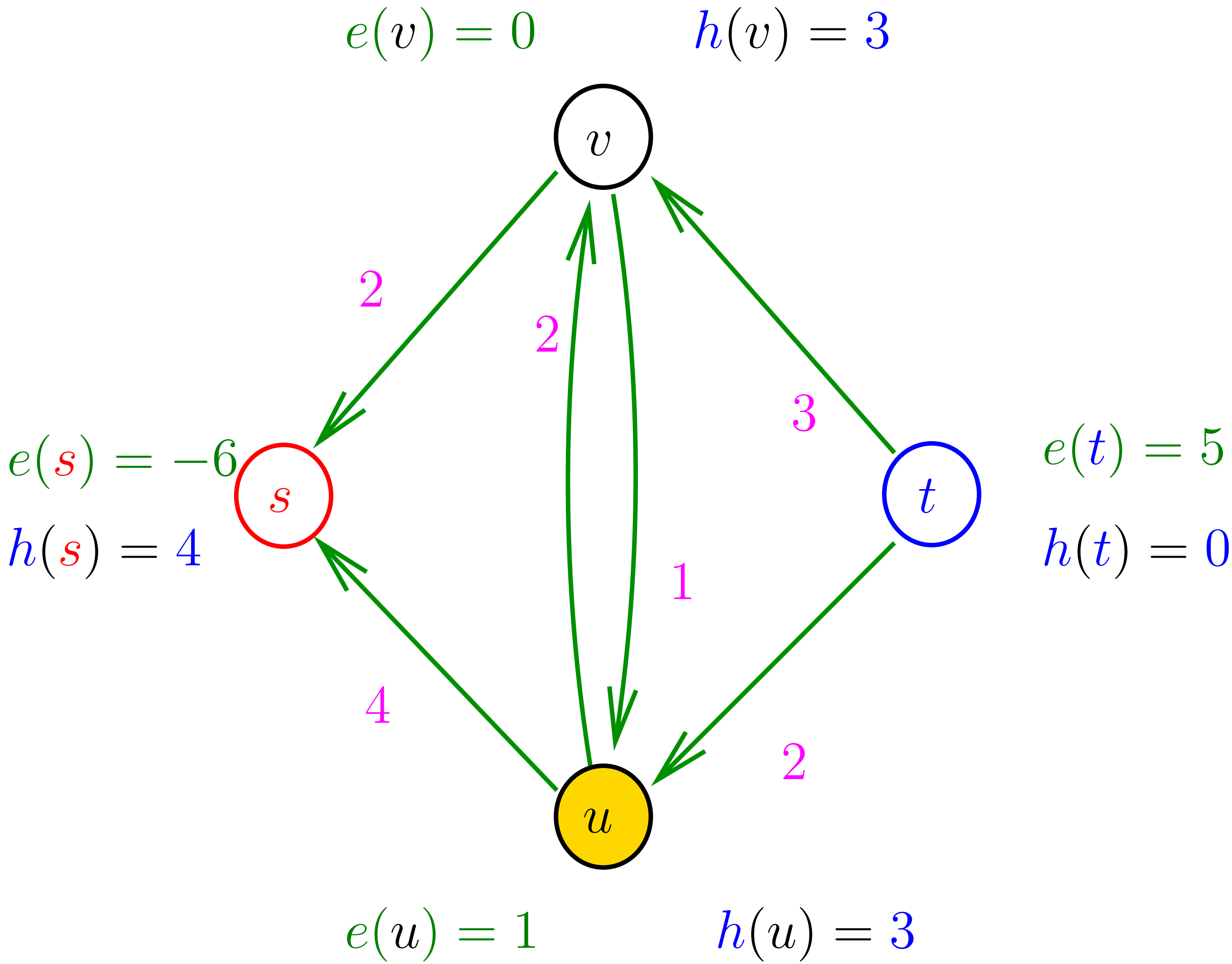
Relabel (u)



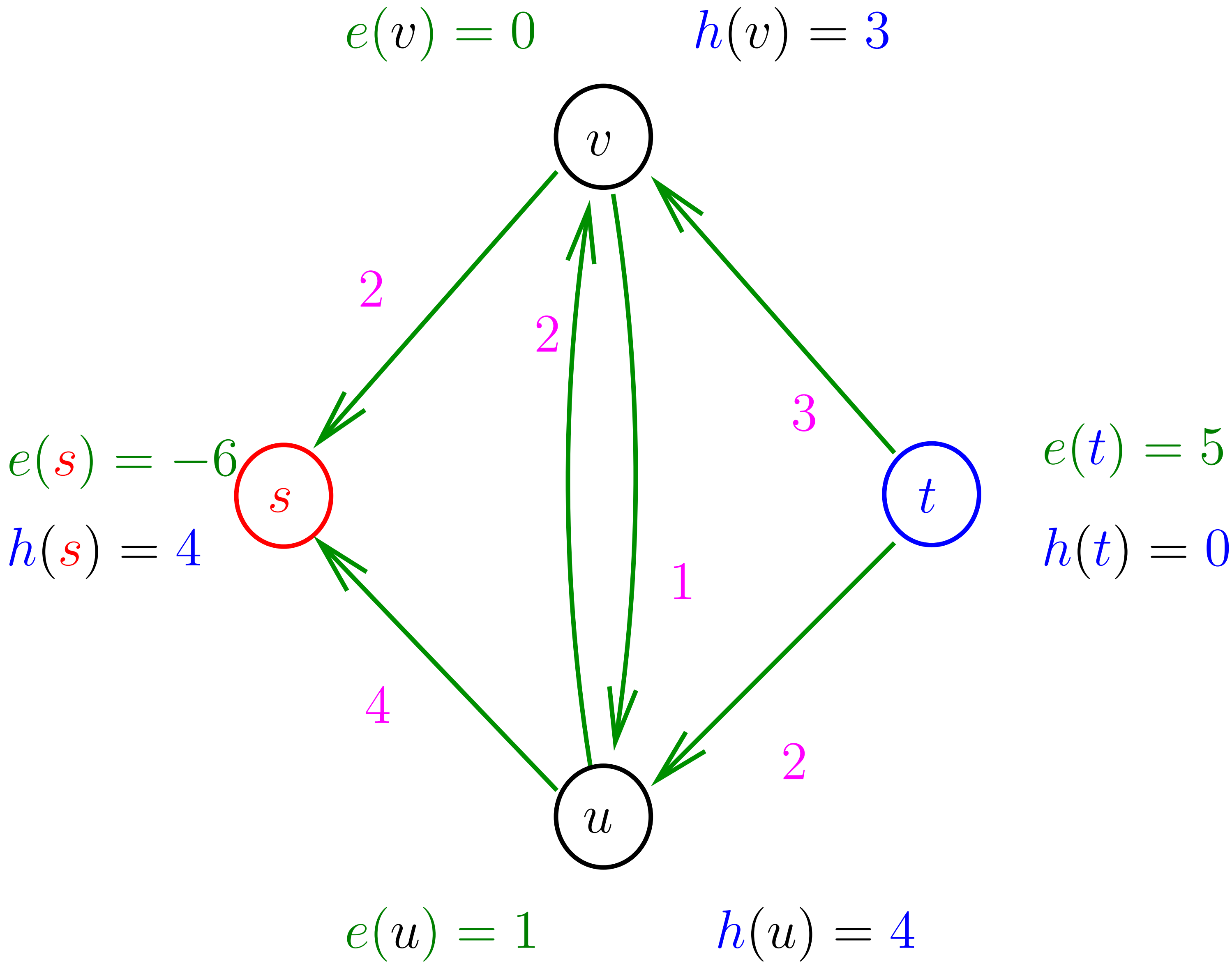
Rede residual 10



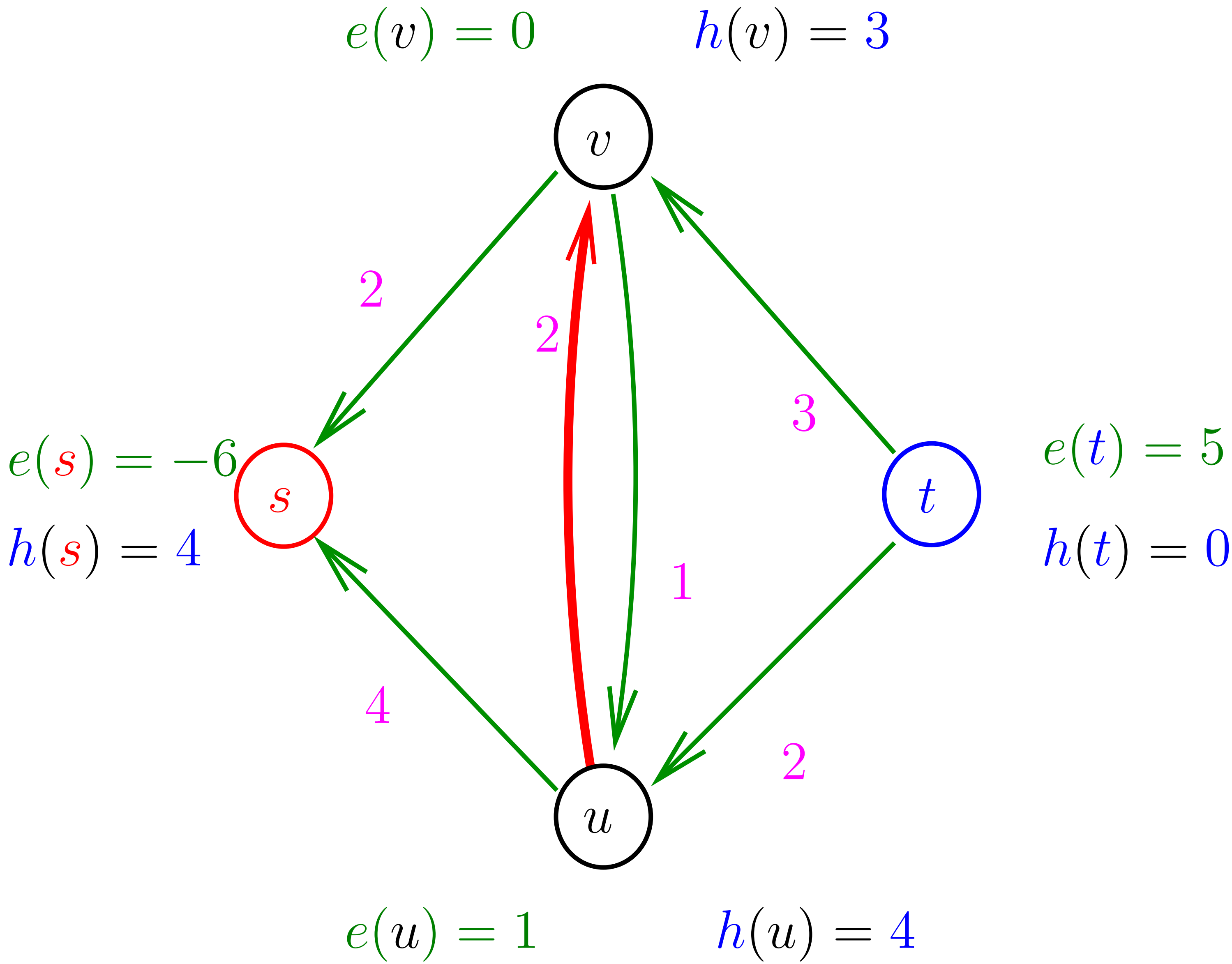
Relabel (u)



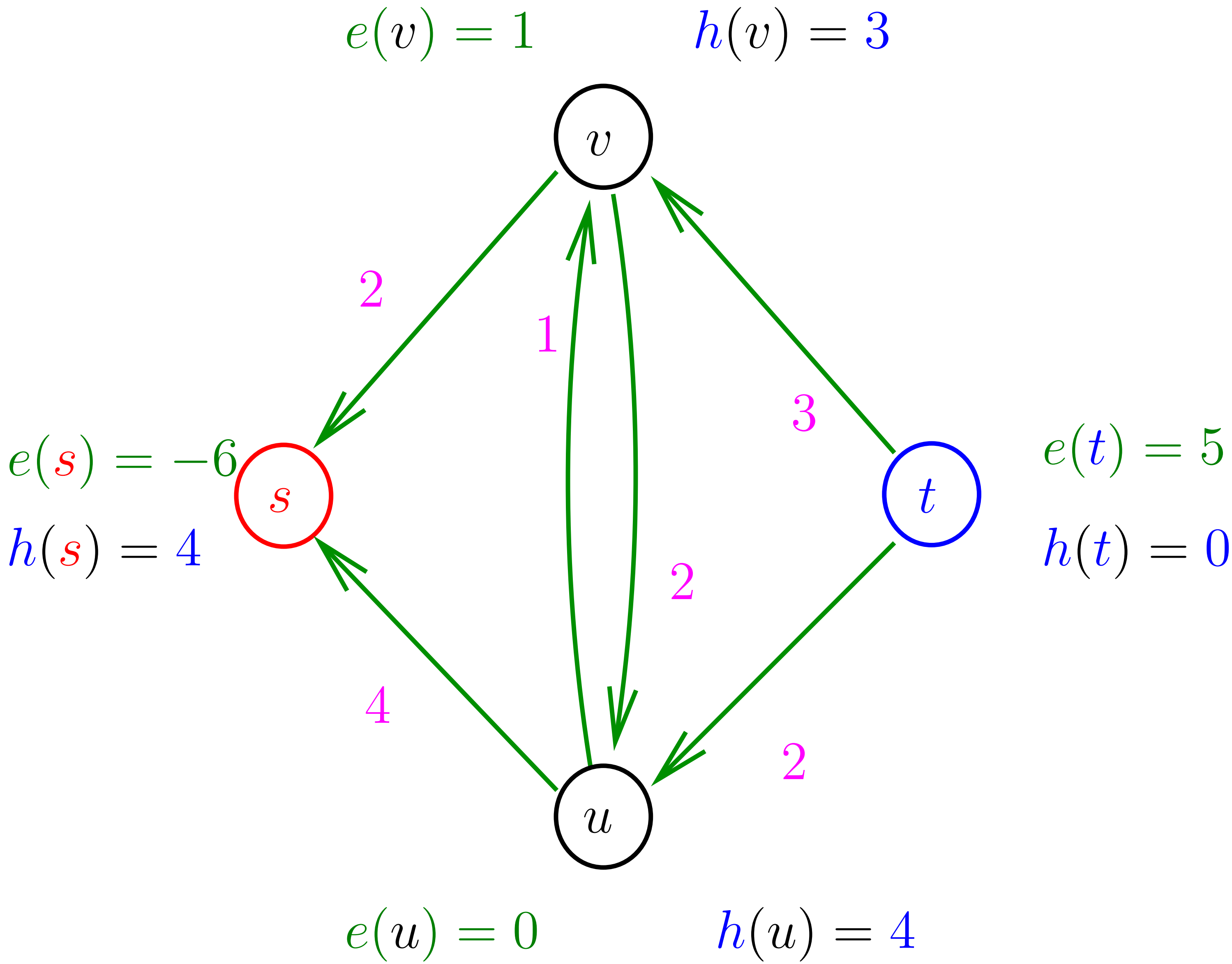
Rede residual 11



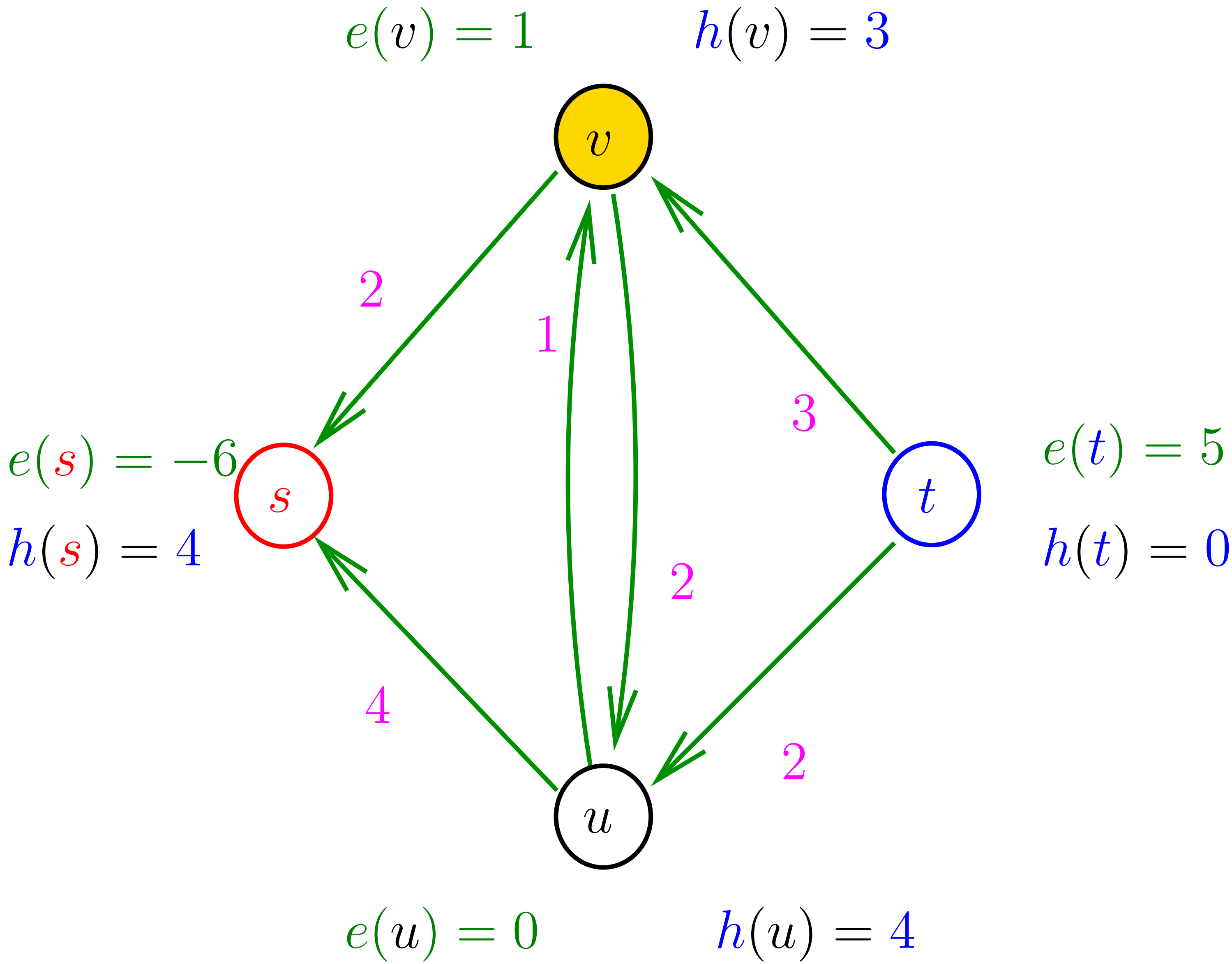
Push (uv)



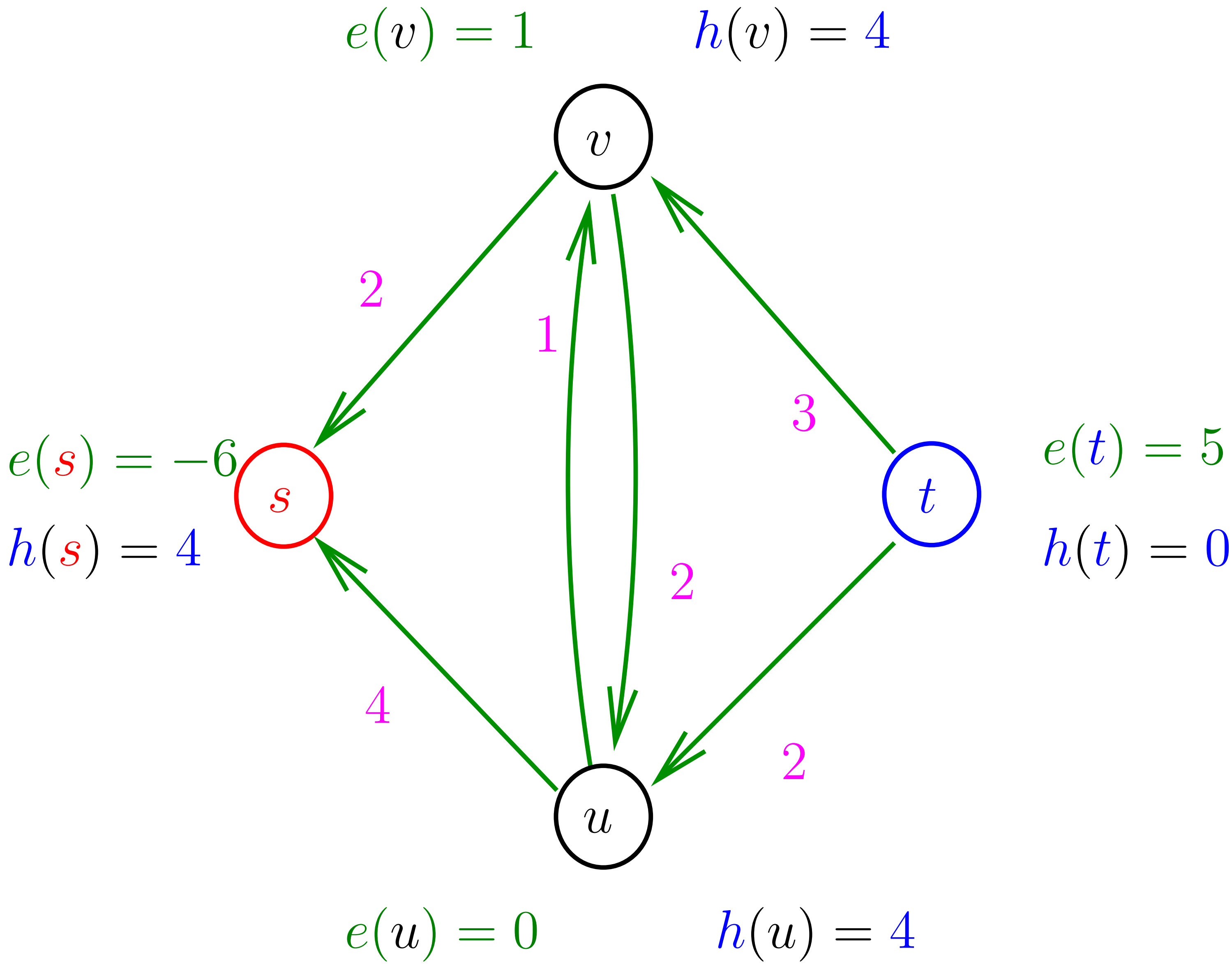
Rede residual 12



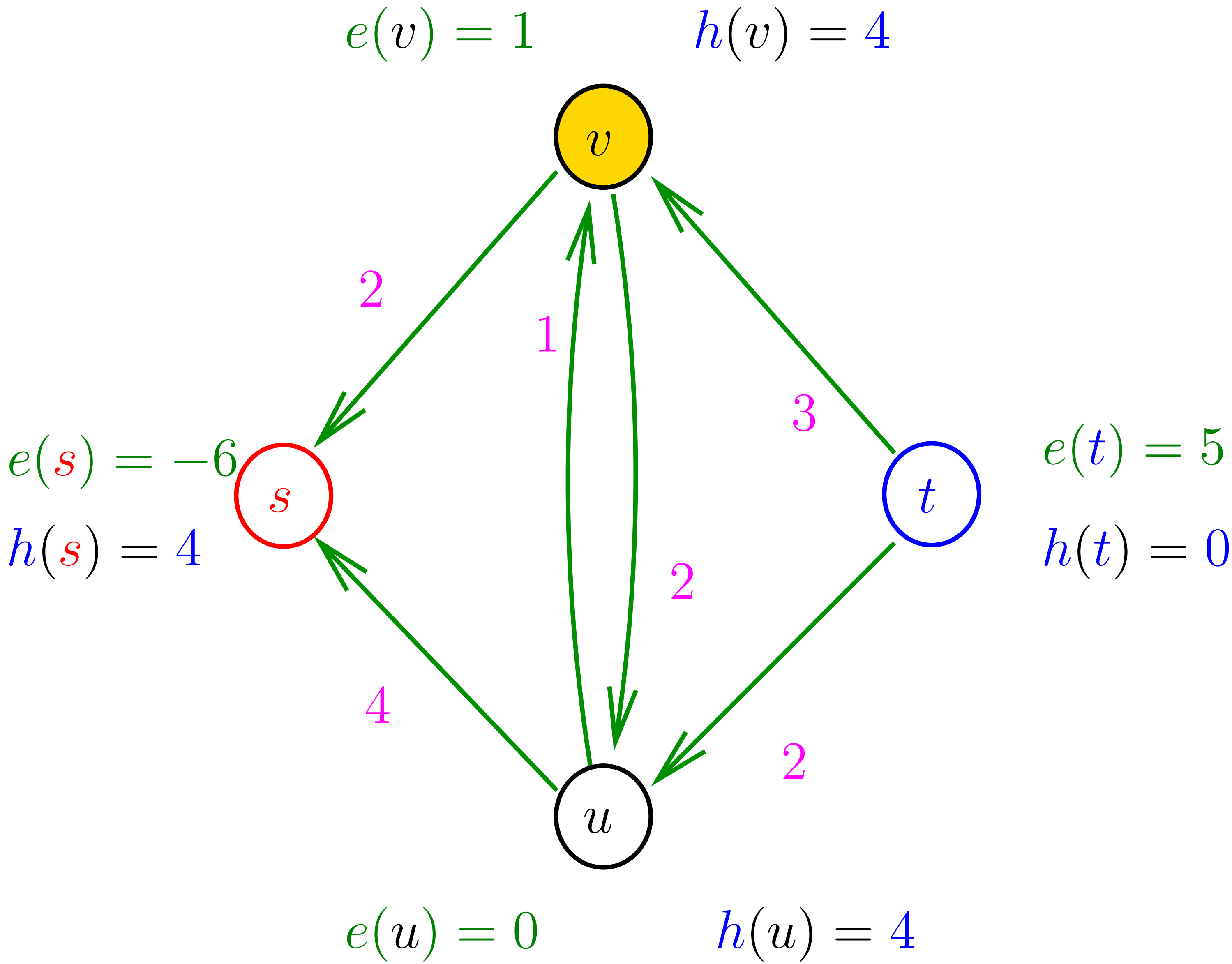
Relabel (v)



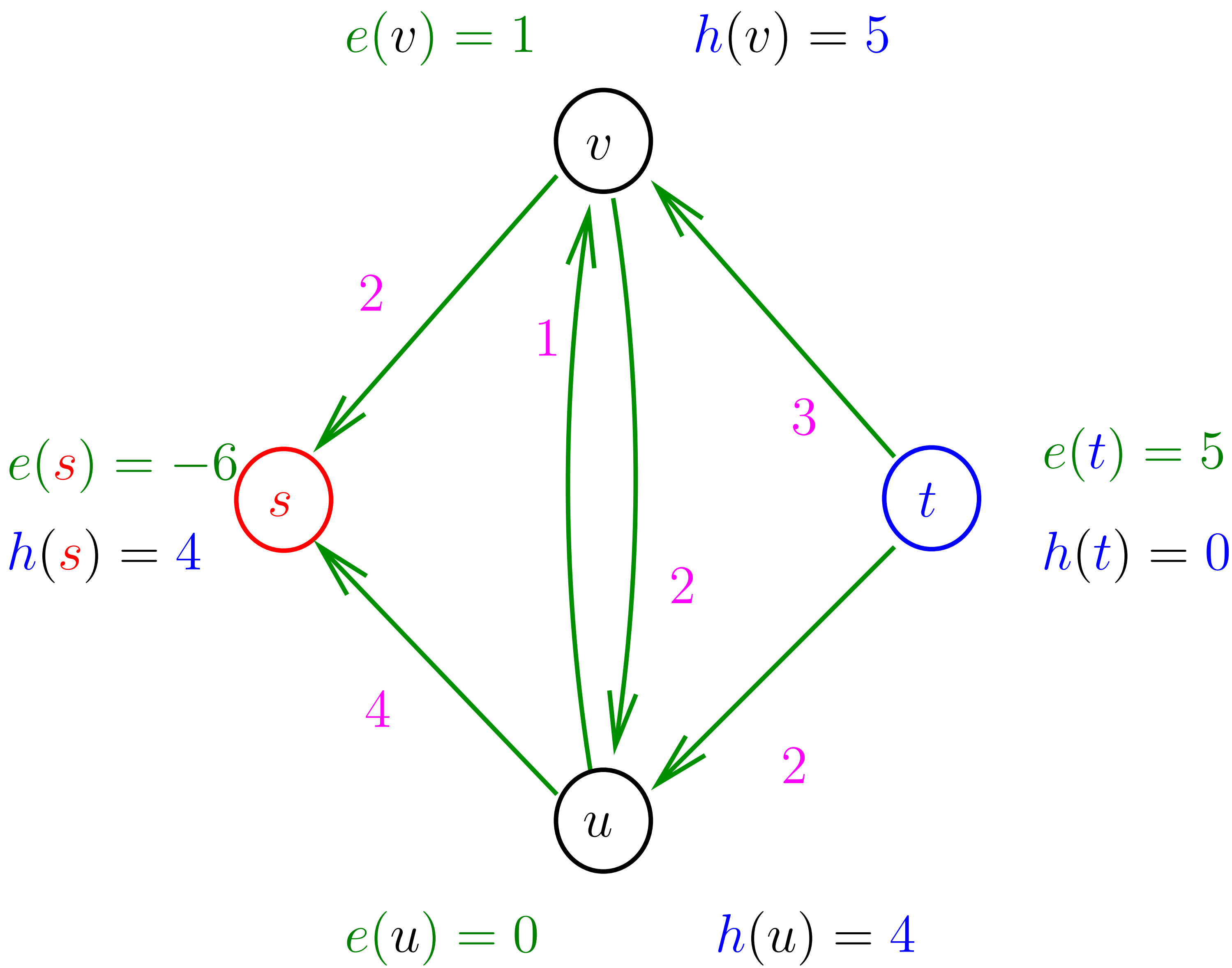
Rede residual 13



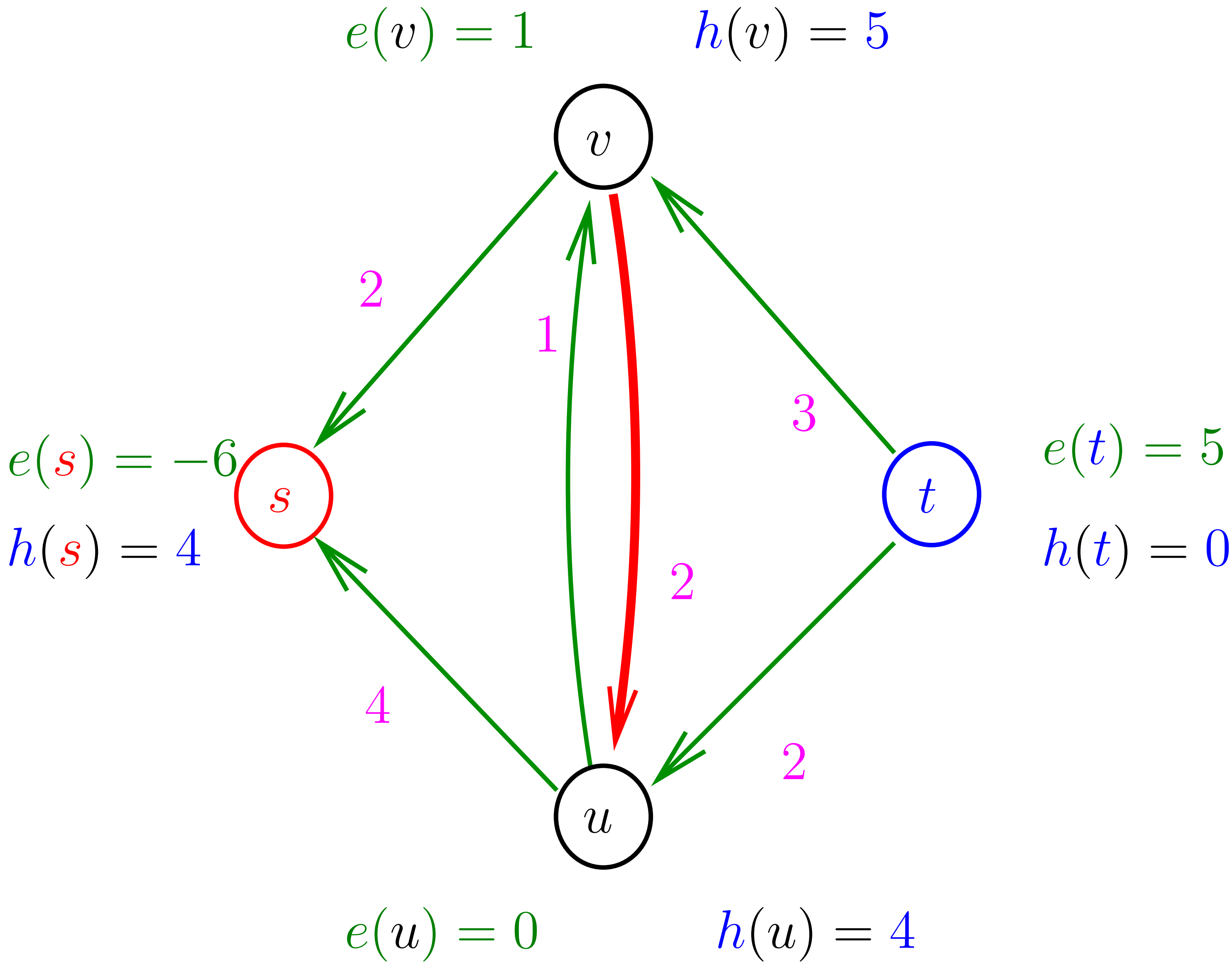
Relabel (v)



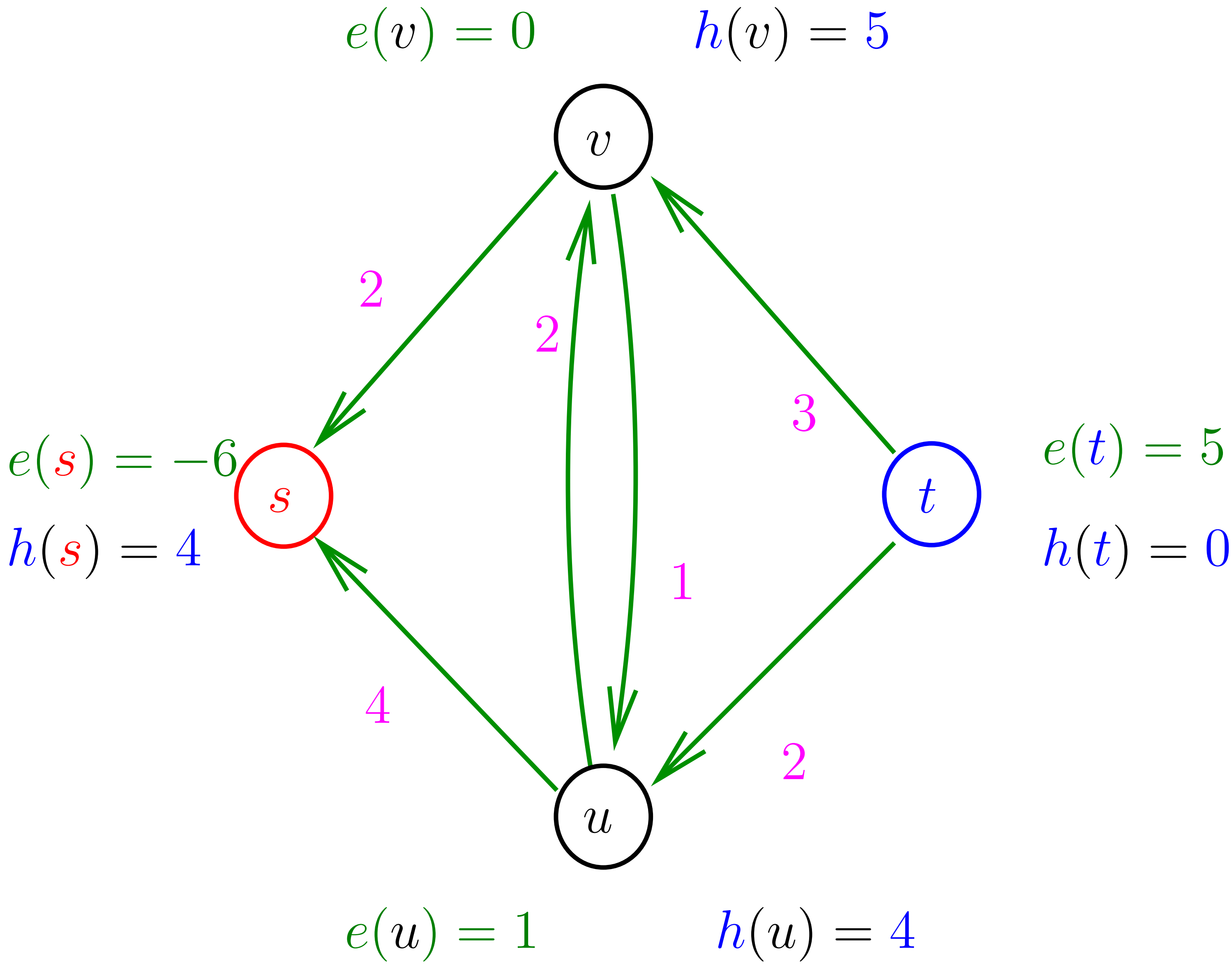
Rede residual 14



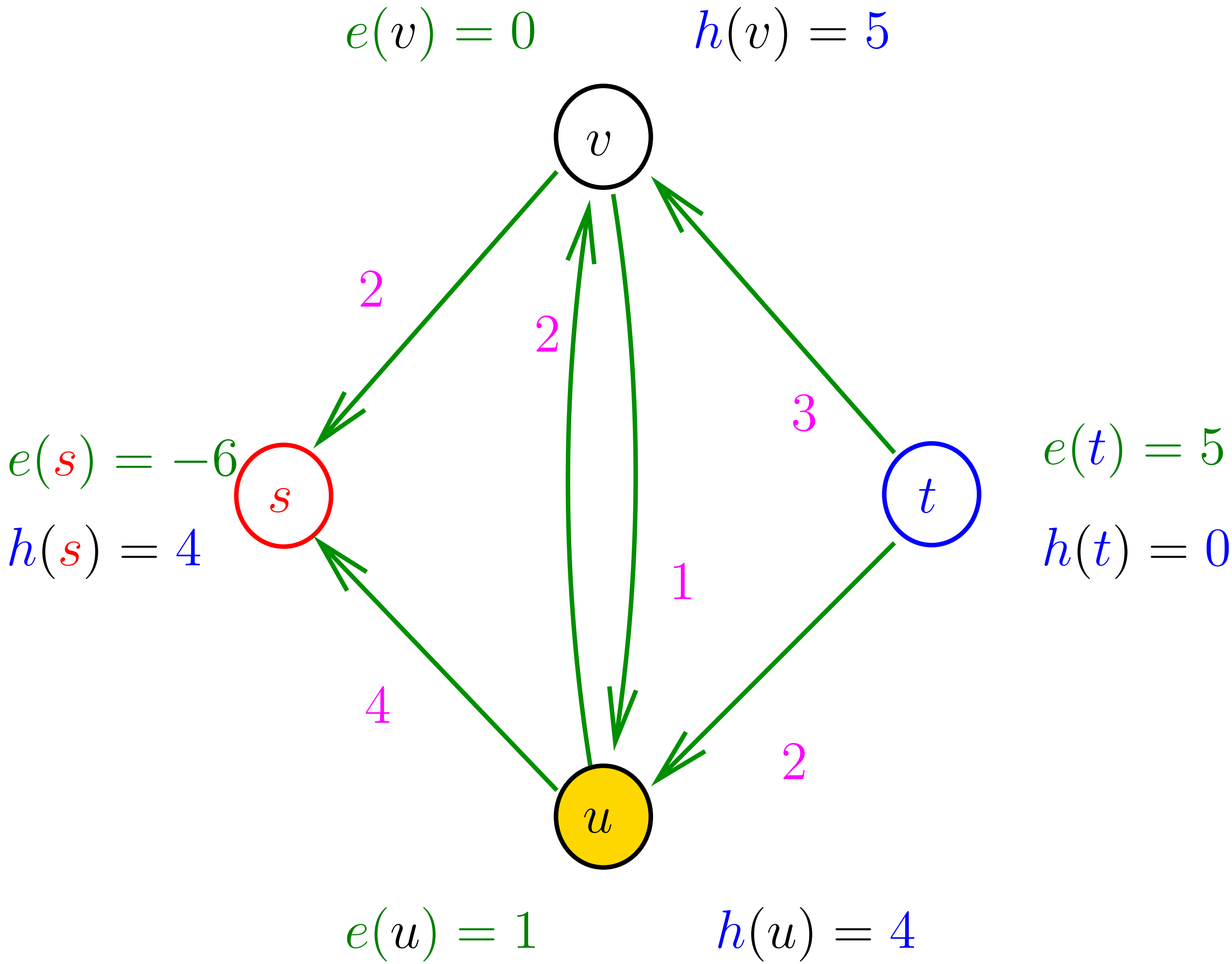
Push (vu)



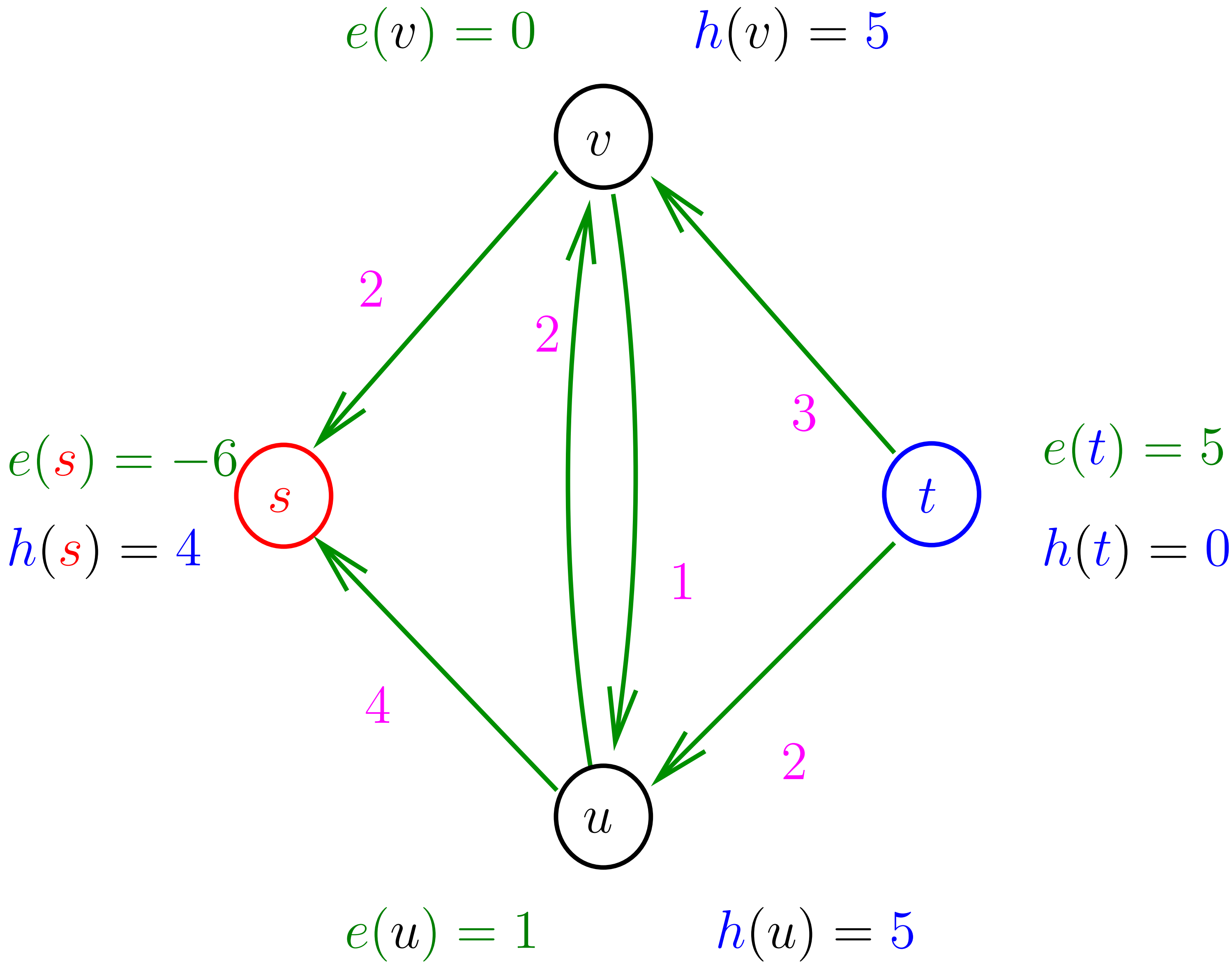
Rede residual 15



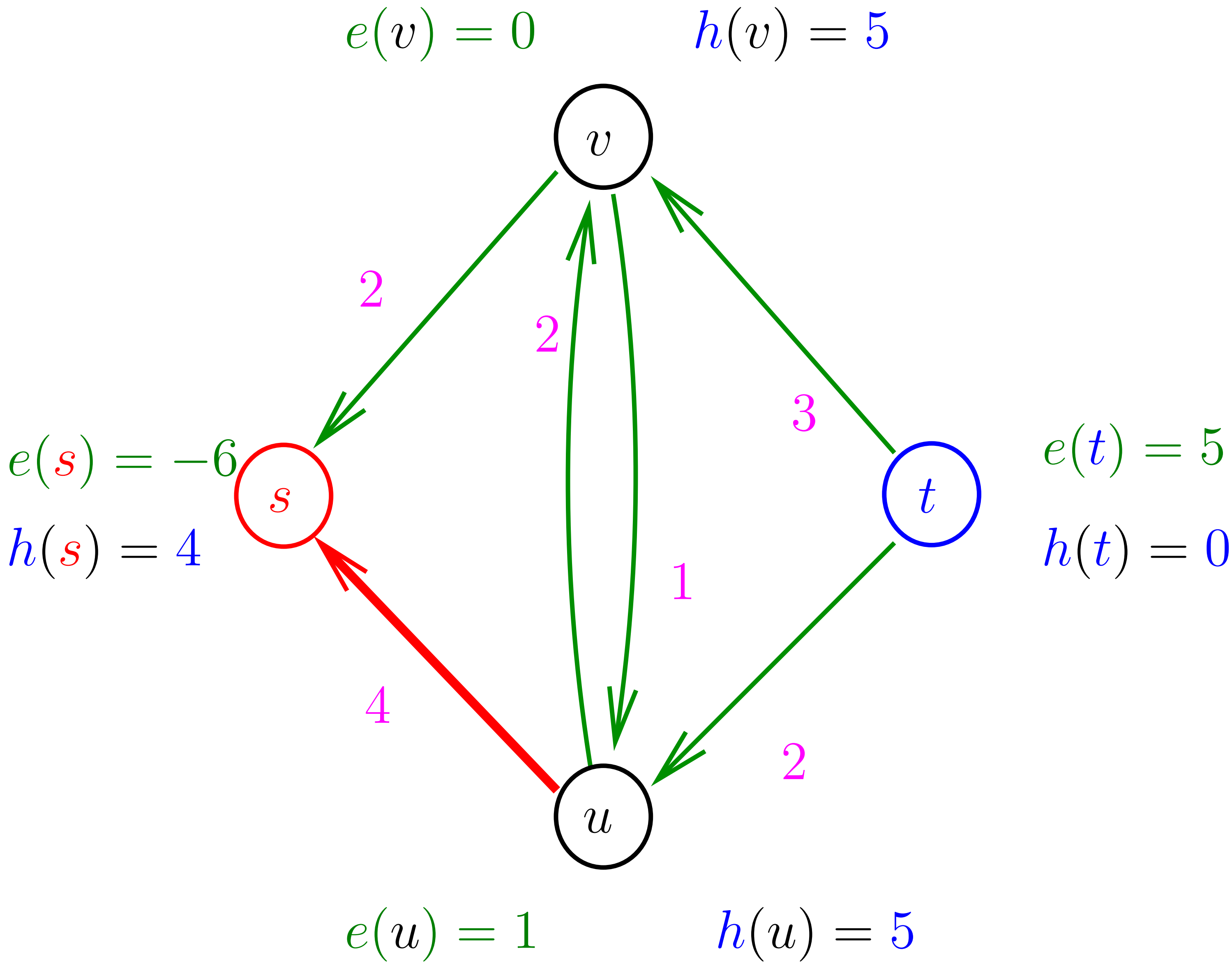
Relabel (u)



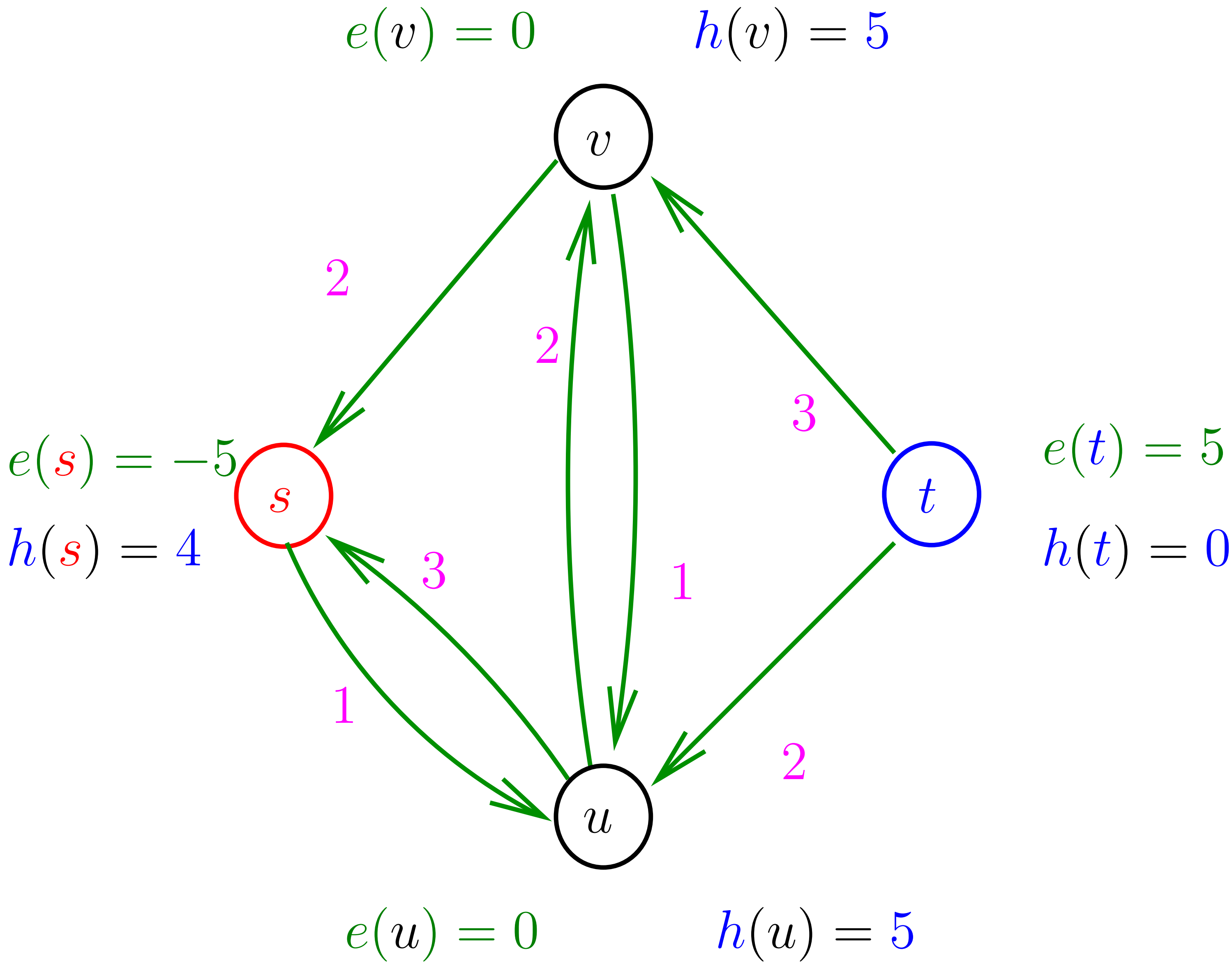
Rede residual 15



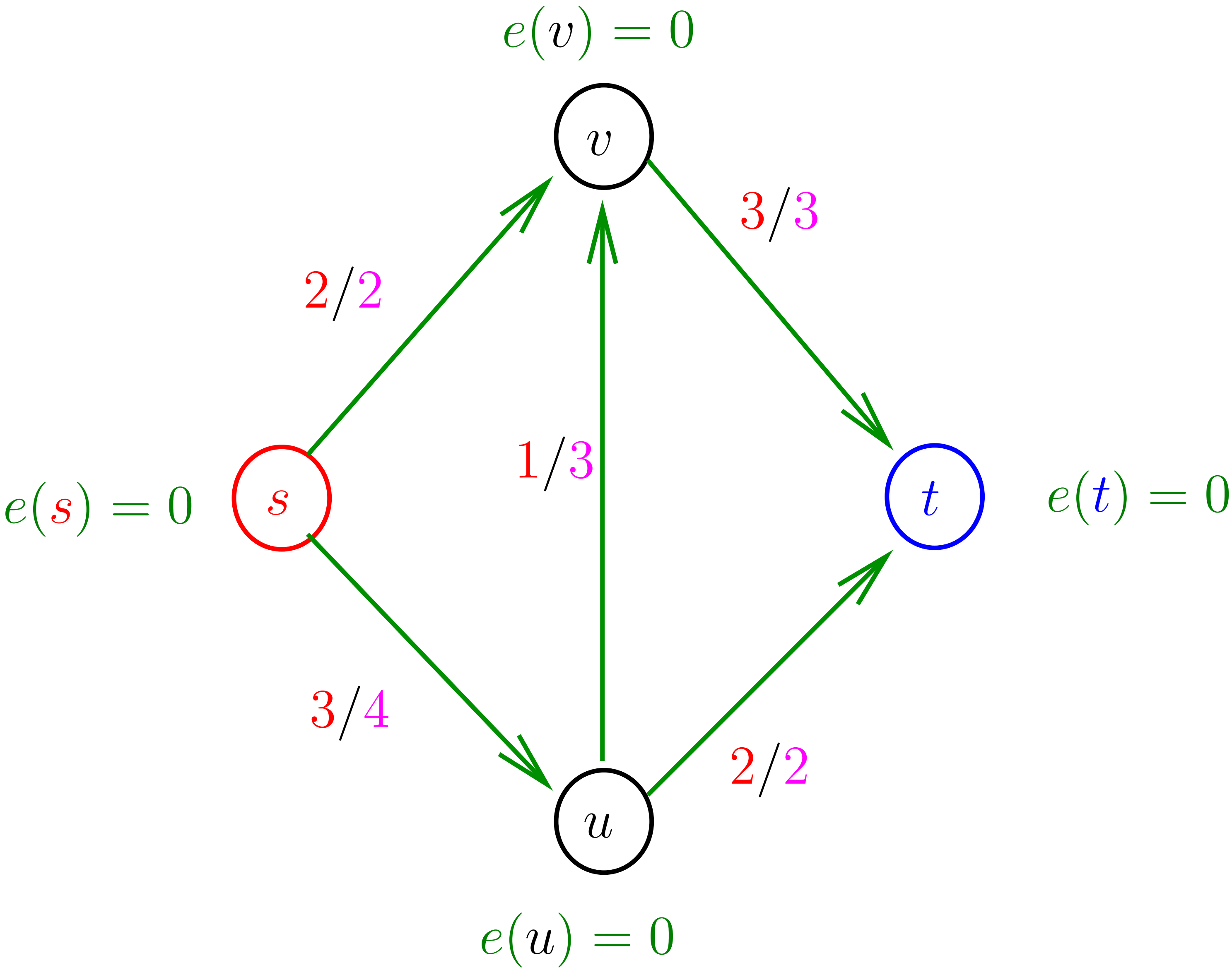
Push (us)



Rede residual 16



Fluxo máximo



Push

PUSH (ij)

1 $\quad \delta \leftarrow \min\{e(i), u(ij) - \check{x}(ij))\}$

2 $\quad \check{x}(ij) \leftarrow \check{x}(ij) + \delta$

3 $\quad \check{x}(ji) \leftarrow \check{x}(ji) - \delta$

4 $\quad e(i) \leftarrow e(i) - \delta$

5 $\quad e(j) \leftarrow e(j) + \delta$

Consumo de tempo: $\mathrm{O}(1)$

Relabel (1)

RELABEL (i)

1 $z(i) \leftarrow z(i) - 1$ $\triangleright$ $z(i)$ decresce

RELABEL (i)

1 $h(i) \leftarrow h(i) + 1$ $\triangleright$ $h(i)$ cresce

Consumo de tempo: $O(1)$

Relabel (2)

RELABEL (i)

1 $\quad z(i) \leftarrow \max\{z(j) - 1 : ij \in A_{\check{x}}\}$ $\quad \triangleright$ $z(i)$ decresce

RELABEL (i)

1 $\quad h(i) \leftarrow \min\{h(i) + 1 : ij \in A_{\check{x}}\}$ $\quad \triangleright$ $h(i)$ cresce

Consumo de tempo: $\mathrm{O}(|A(i)|)$

Relabel (3)

RELABEL (i)

$z(i) \leftarrow -\infty$
para cada ij em $A(i)$ **faça**
  se $\check{x}(ij) < u(ij)$ e $z(i) < z(j) - 1$
    então $z(i) \leftarrow z(j) - 1$

RELABEL (i)

$h(i) \leftarrow \infty$
para cada ij em $A(i)$ **faça**
  se $\check{x}(ij) < u(ij)$ e $h(i) > h(j) + 1$
    então $h(i) \leftarrow h(j) + 1$

Consumo de tempo: $\mathrm{O}(|A(i)|)$

Pré-processamento

PRÉ-PROCESSAMENTO $()$

$\check{x} \leftarrow 0$

$e \leftarrow 0$

para cada sj em $A(s)$ **faça**

  $\check{x}(sj) \leftarrow u(sj)$

  $\check{x}(sj) \leftarrow -u(sj)$

  $e(j) \leftarrow e(j) + u(sj)$

  $e(s) \leftarrow e(s) - u(sj)$

$A(\check{x}) \leftarrow \{ij \in A : \check{x}(ij) < u(ij)\}$

$z \leftarrow$ POTENCIAL-ÓTIMO-TÉRMINO$(N, A_{\check{x}}, t)$

Consumo de tempo: $\mathrm{O}(n + m)$.

Algoritmo preflow-push básico

GENERIC-PREFLOW-PUSH $()$

PRÉ-PROCESSAMENTO$()$

enquanto $e(i) > 0$ para algum i em $N - \{t\}$ **faça**

$\quad A(\check{x}) \leftarrow \{ij \in A : \check{x}(ij) < u(ij)\}$

$\quad$ **se** algum ij em $A_{\check{x}}(i)$ é justo

$\quad\quad$ **então** PUSH(ij)

$\quad\quad$ **senão** RELABEL(i)

$x \leftarrow$ FLUXO$(\check{x})$

devolva x

Invariantes

Na linha 1, antes do "**enquanto** $e(i) > 0 \ldots$" vale que

(i1) $x = \text{FLUXO}(\check{x})$ é um pré-fluxo com fonte s;

(i2) $e(i) = \check{x}(\bar{i}, i) - \check{x}(i, \bar{i})$ para cada i em N;

(i3) x respeita u;

(i4) z é um 1-potencial em $(N, A_{\check{x}})$;

(i5) $z(t) - z(s) = n$;

(i6) $z(t) - z(i) \geq 0$ para todo i;

(i7) se $e(j) > 0$ então existe um caminho de j a s em $(N, A_{\check{x}})$.

Conseqüências imediatas

- (i7) $\Rightarrow$ em cada chamada de RELABEL (i):

$$z(i) \leftarrow \max\{z(i) - 1 : ij \in A_{\check{x}}\} < \infty$$

- (i4)+(i5)+(i7) $\Rightarrow$ no início de cada iteração:

$$z(t) - z(i) = z(t) - z(s) + z(s) - z(i) + < 2n \Rightarrow h(i) < 2n$$

  para cada nó i. Esta conseqüência é fundamental para estimar o número de iterações.

Quando o algoritmo pára temos que:

- $e(i) = 0$ para cada $i \in N - \{st\} \Rightarrow x$ é um fluxo
- (i4)+(i5) $\Rightarrow$ não existe caminho de s a t em $(N, A_{\check{x}}) \Rightarrow x$ é fluxo máximo.

Número de iterações

Fato 1. O algoritmo RELABEL é executado $< 2n^2$ vezes.

Demonstração (rascunho): $z(t) - z(i) < 2n$ e em cada execução o valor de $z(i)$ decresce de pelo menos 1.

PUSH (ij) é saturante se $\check{x}(ij) = u(ij)$ após a execução.

Fato 2. Um PUSH saturante é executado $\leq nm$.

Demonstração (rascunho): Entre duas execuções de um PUSH saturante de um arco ij o valor de $z(j)$ diminui de pelo menos 2.

Número de iterações

Fato 3. Um PUSH não-saturante é executado $< 2n^2(m+2)$.

Demonstração (rascunho): Considere o valor de

$$\Phi := \sum (z(t) - z(i) : i \in N \text{ e } e(i) > 0).$$

- (i6) $\Rightarrow \Phi \geq 0$ no início de cada iteração.
- No início da primeira iteração

  $$z(t) - z(i) < n$$

  para todo nó i. Logo, no início da primeira iteração

  $$\Phi < n^2.$$

Número de iterações

Sejam Φ_1 e Φ_2 o valor de Φ no início de duas iterações consecutivas.

Se na iteração é executado um:

- RELABEL $\Rightarrow \Phi_2 = \Phi_1 + 1$.
- PUSH saturante $\Rightarrow \Phi_2 < \Phi_1 + 2n$
- PUSH não-saturante $\Rightarrow \Phi_2 \leq \Phi_1 - 1$

Como no início da última iteração $\Phi = 0$, então o número de execuções de um PUSH não-saturante é

$$< n^2 + 2n^2 + 2n^2 m < 2n^2(m+2).$$

Consumo de tempo

Algoritmo	número máximo de execuções	consumo total de tempo
RELABEL	$< 2n^2$	$\mathrm{O}(n^2)$
PUSH saturante	$< nm$	$\mathrm{O}(nm)$
PUSH não-saturante	$< 2n^2(m+2)$	$\mathrm{O}(n^2m)$

O consumo de tempo do algoritmo GENERIC-PREFLOW-PUSH é $\mathrm{O}(n^2m)$.