Melhores momentos

AULA PASSADA

Caminhos de incremento

Invariante: no início de cada iteração temos um st-pseudofluxo $\check{x}$ que respeita as capacidades.

Algoritmo	consumo de tempo
FORD-FULKERSON	$\mathrm{O}(nmU)$
MAX-CAPACITY	$\mathrm{O}(n^2 m \lg U)$
CAPACITY-SCALING	$\mathrm{O}(m^2 \lg U)$
EDMONDS-KARP	$\mathrm{O}(nm^2)$
DINITS	$\mathrm{O}(n^2 m)$
Karzanov	$\mathrm{O}(n^3)$
Sleator-Tarjan	$\mathrm{O}(nm \log n)$

Estamos supondo que $n = \mathrm{O}(m)$ (grafo conexo)

Preflow-push

Invariante: no início de cada iteração temos st-pré-fluxo que respeita as capacidades e não existe caminho de s a t na rede residual.

Algoritmo	número máximo de execuções	consumo total de tempo
RELABEL	$< 2n^2$	$\mathrm{O}(n^2)$
PUSH saturante	$< nm$	$\mathrm{O}(nm)$
PUSH não-saturante	$< 2n^2(m+2)$	$\mathrm{O}(n^2m)$

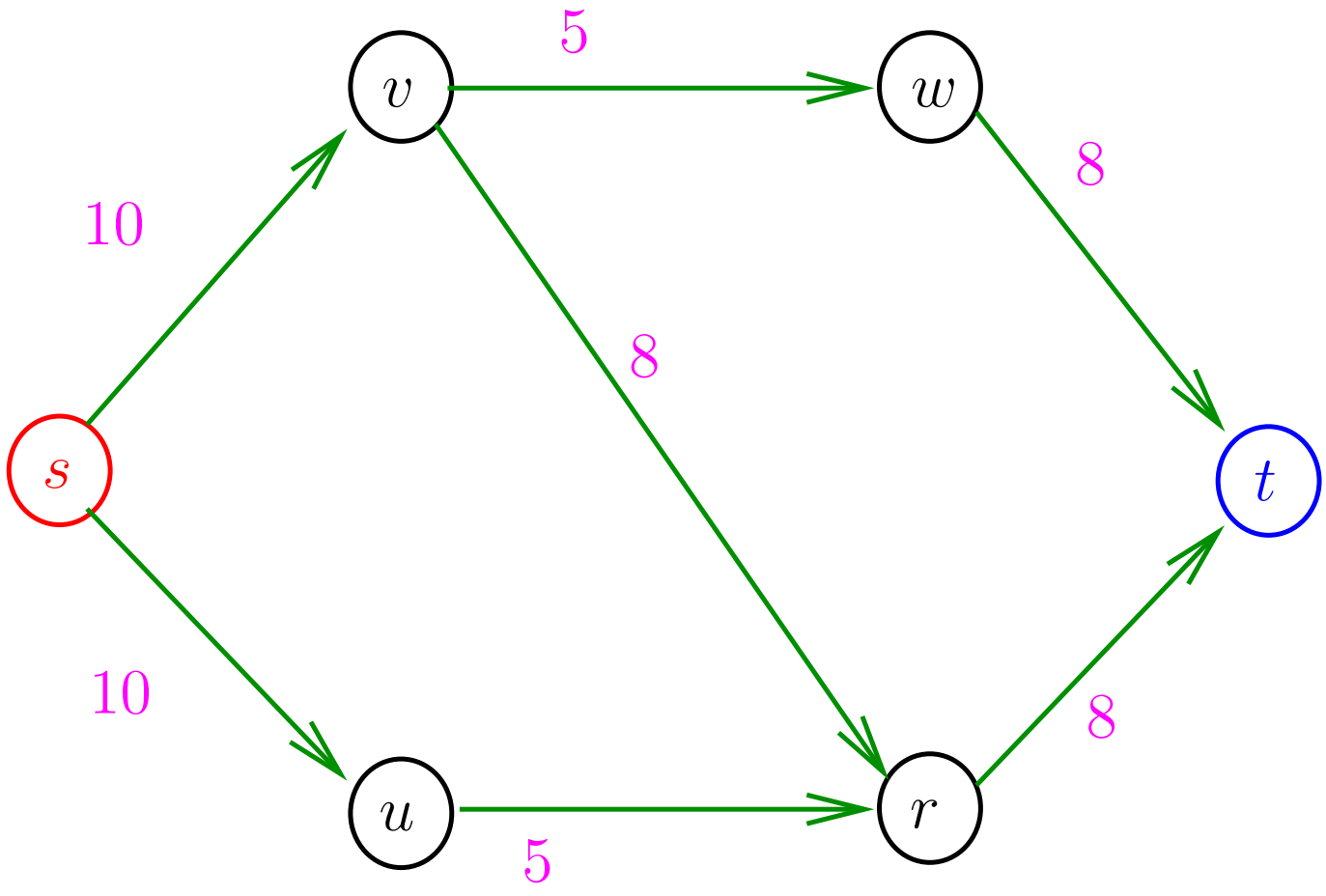
O consumo de tempo do algoritmo GENERIC-PREFLOW-PUSH é $\mathrm{O}(n^2m)$.

AULA 16

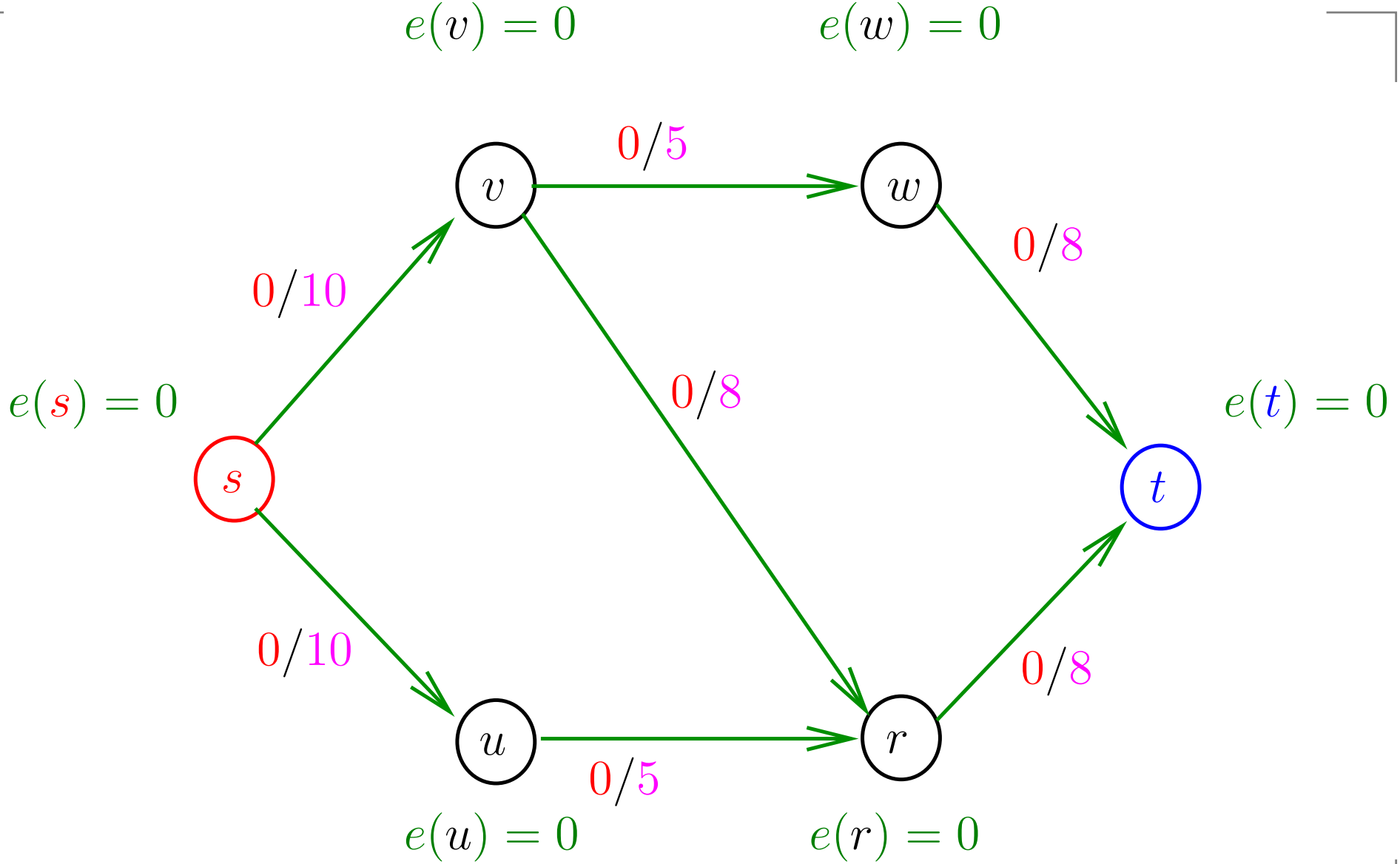
FIFO preflow-push

PF 18.1, 18.2

Rede



Fluxos e excessos

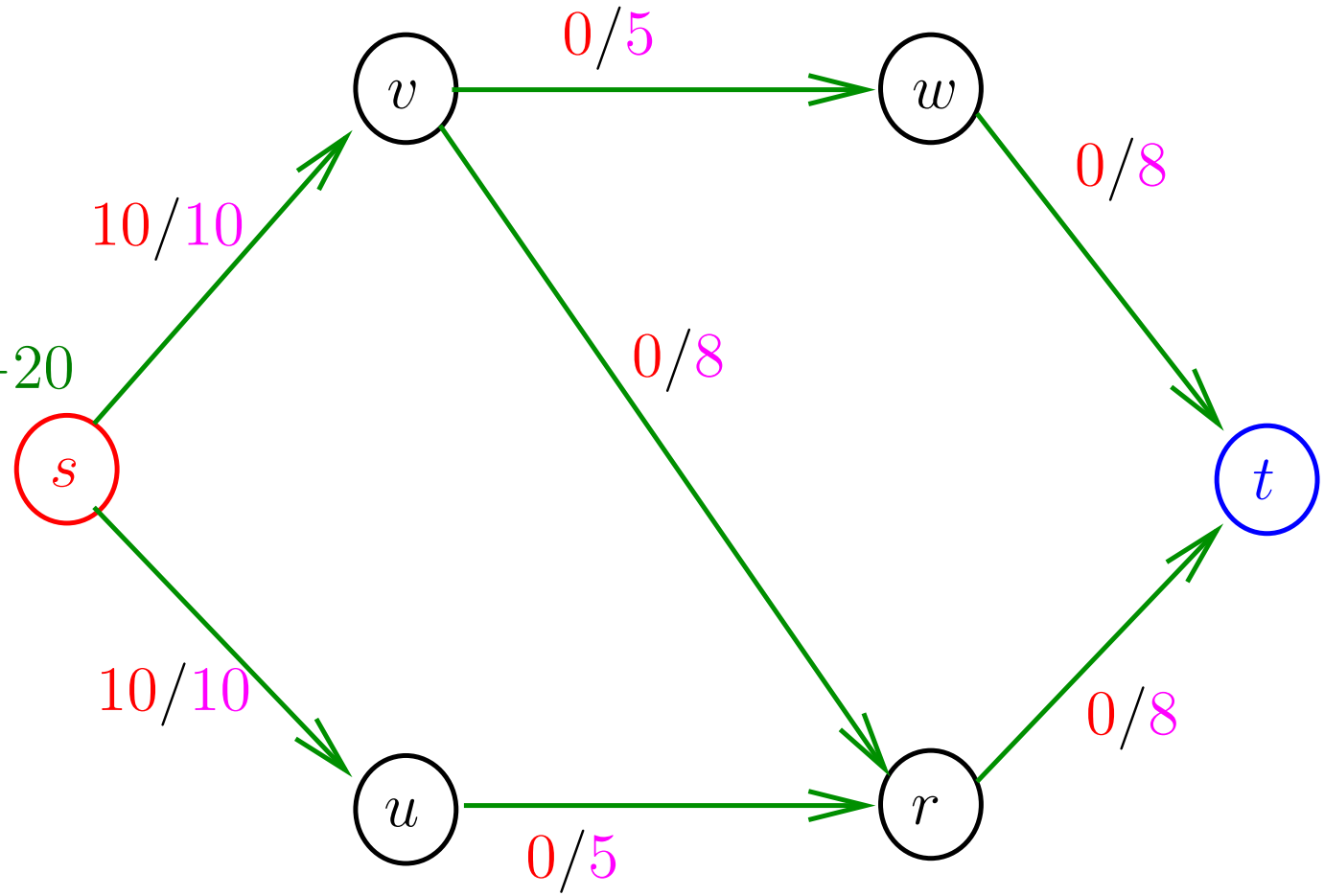


Pré-processamento

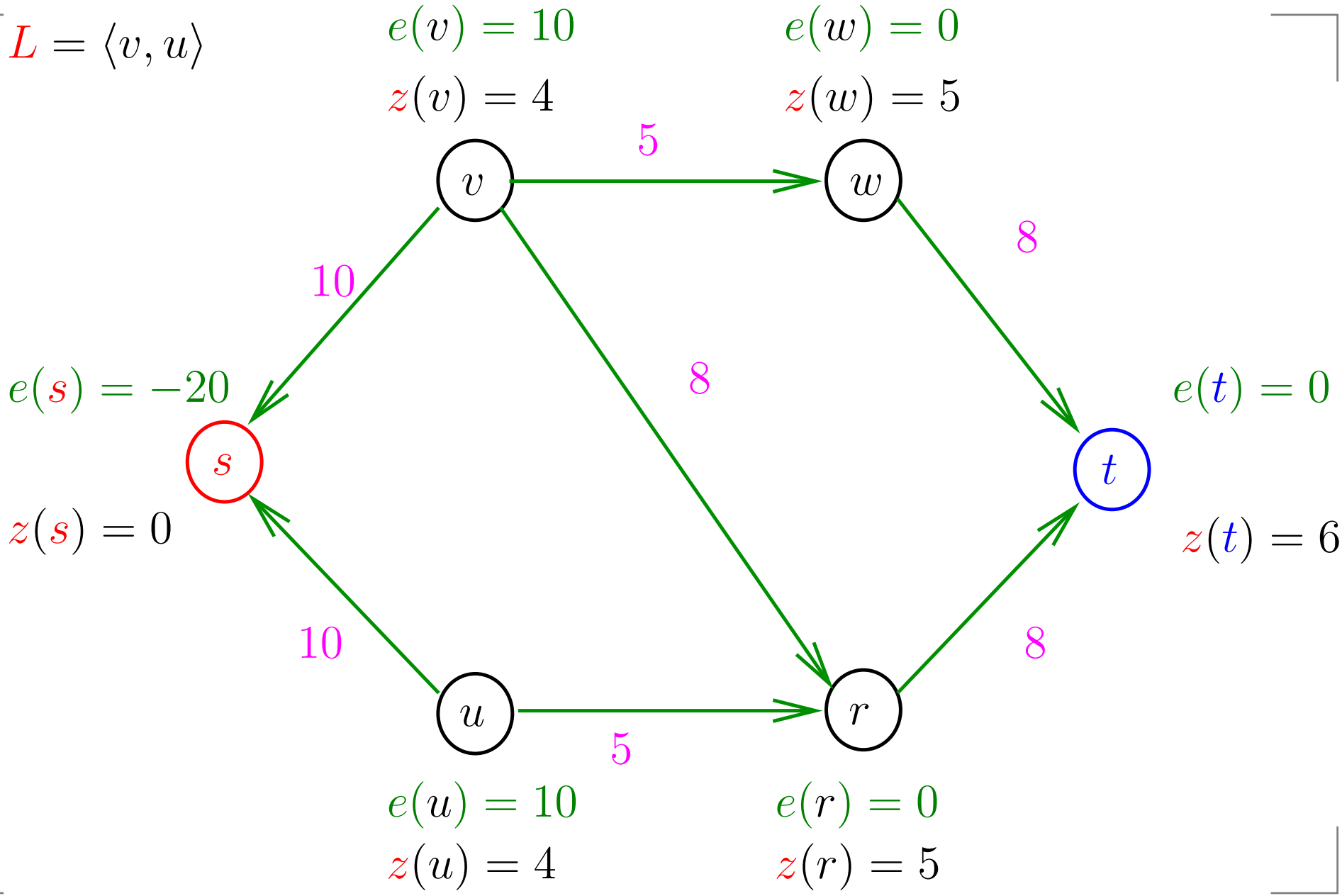
$L = \langle v, u \rangle$

$e(v) = 10$

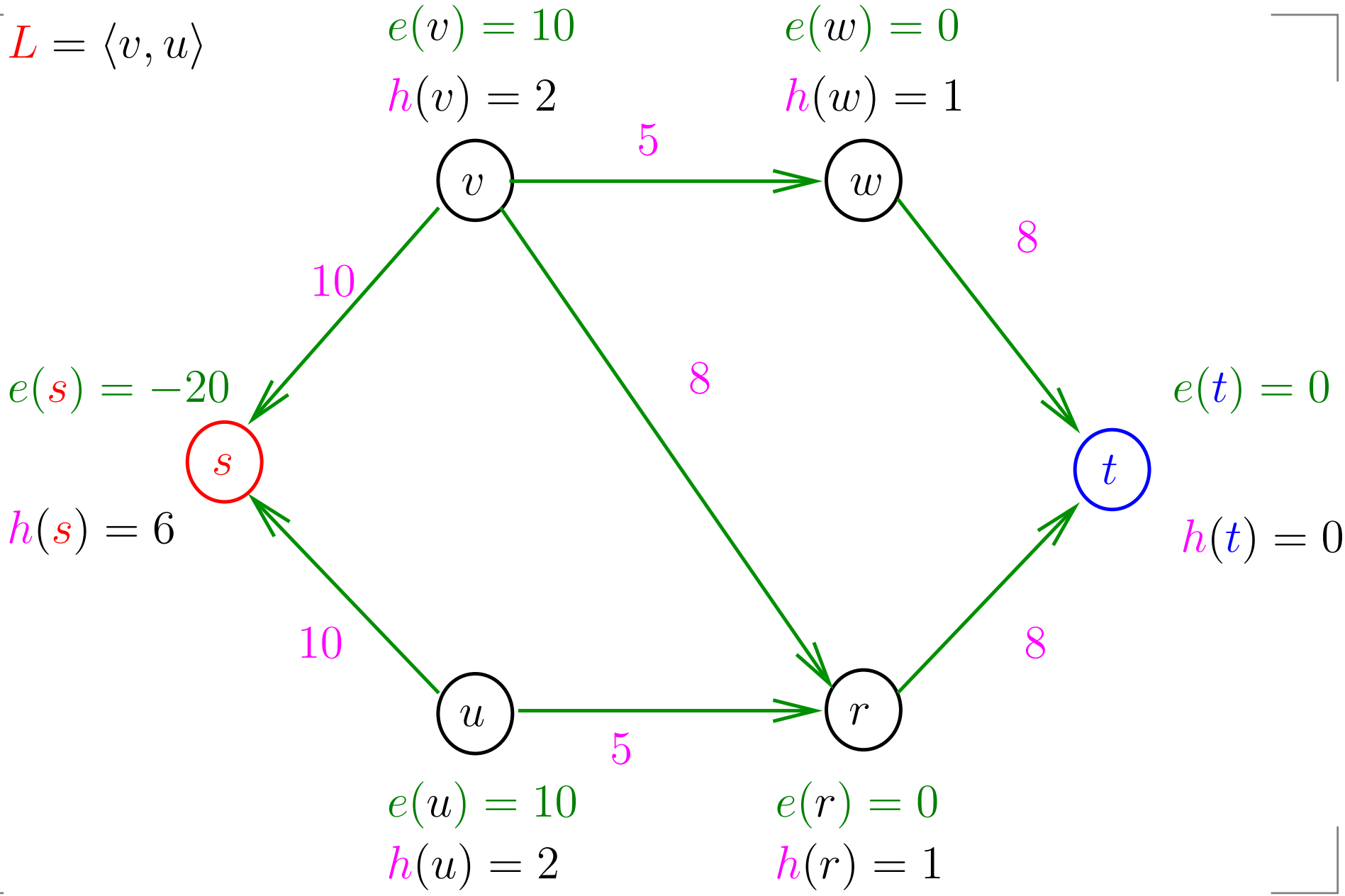
$e(w) = 0$



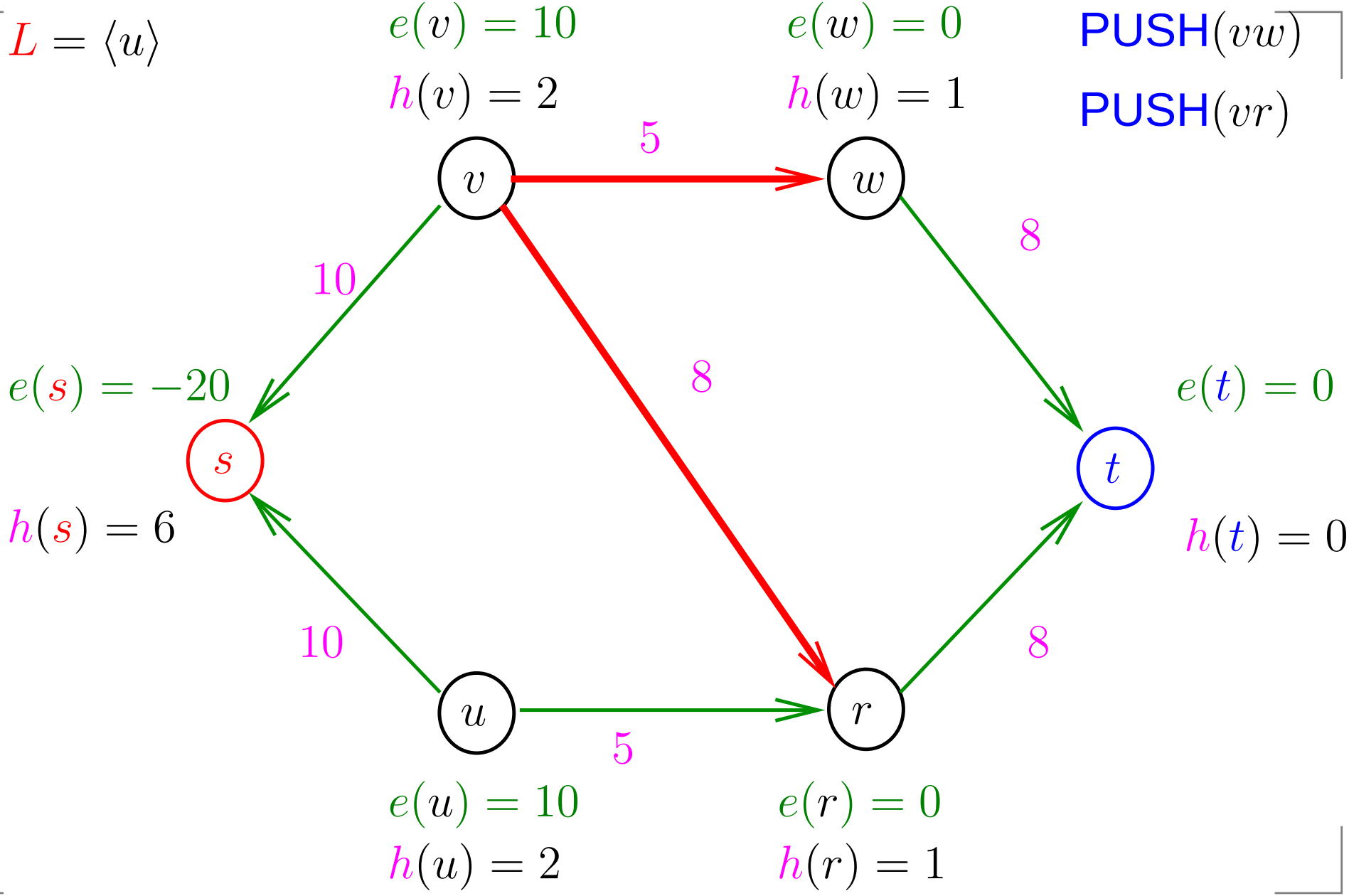
Rede residual 1



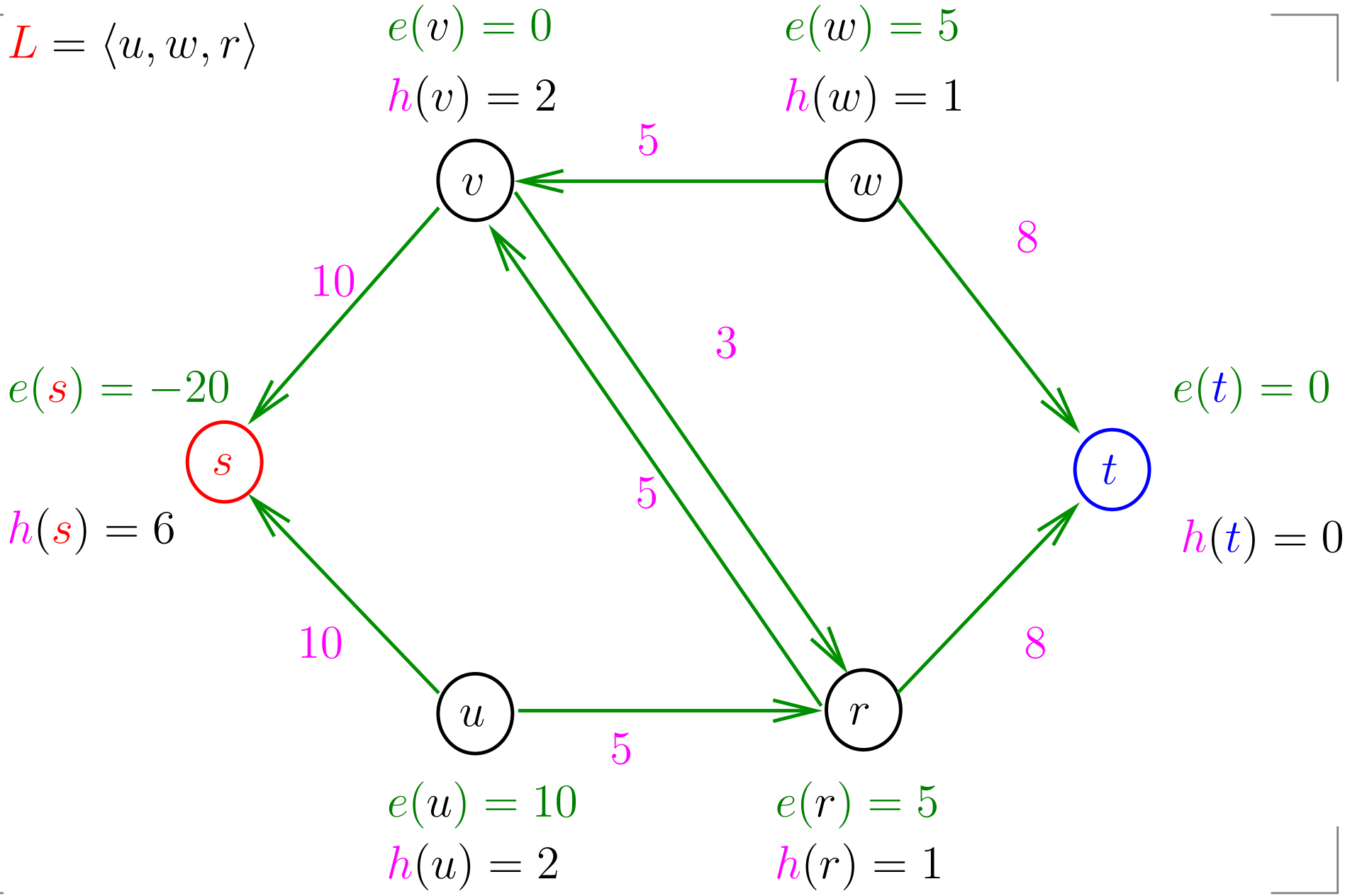
Rede residual 1



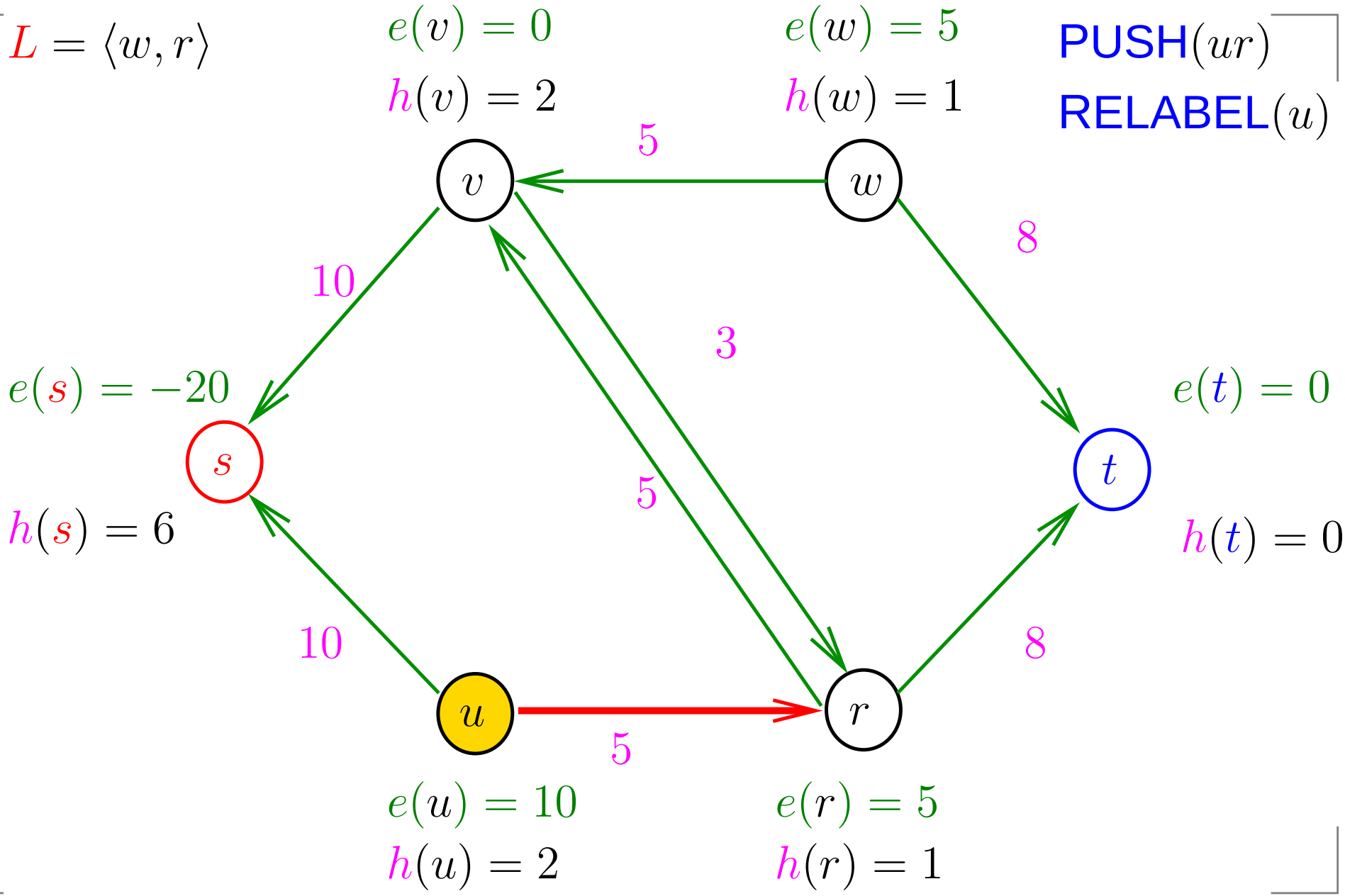
Node-Examination (v)



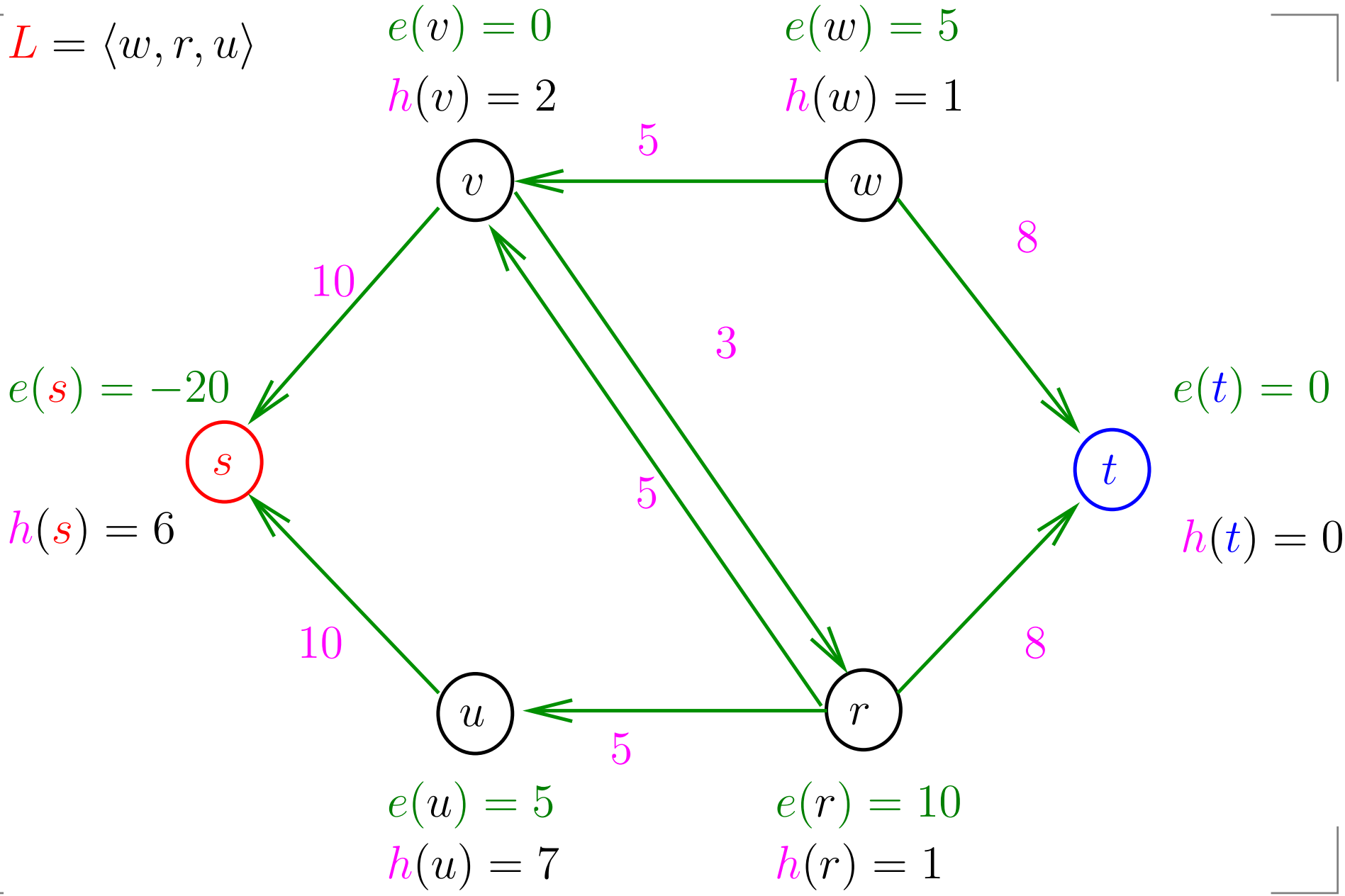
Rede residual 2



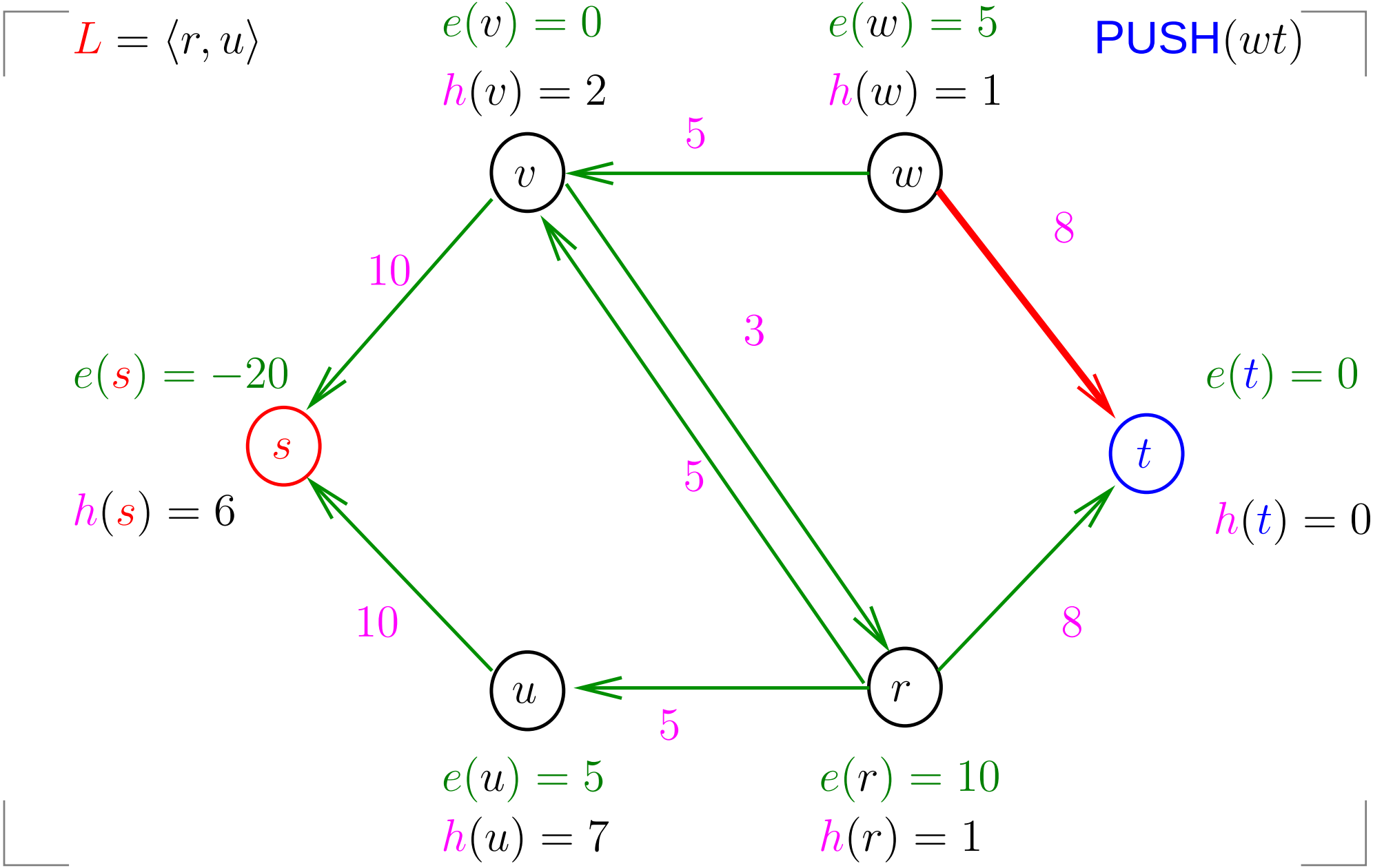
Node-Examination (u)



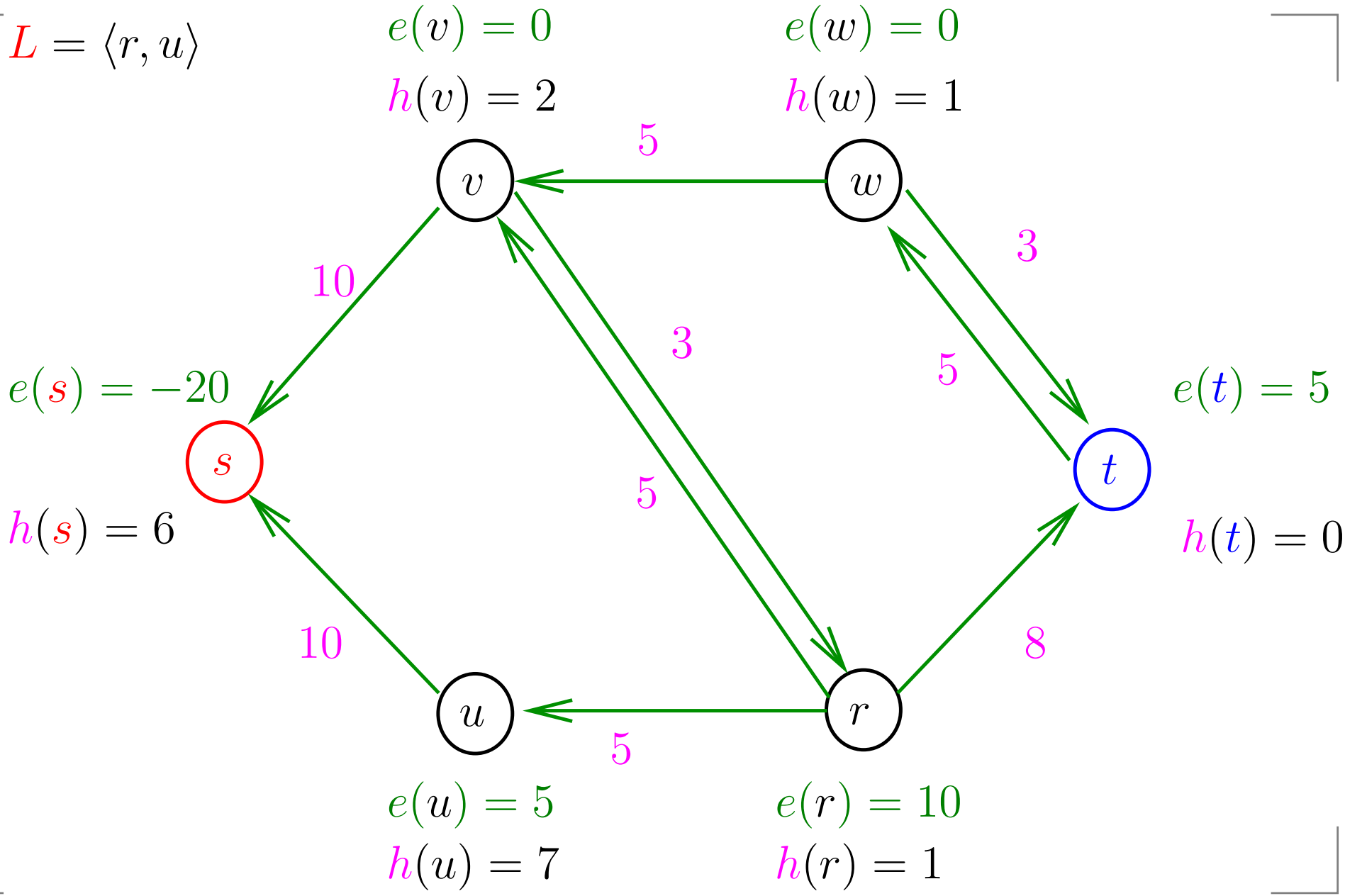
Rede residual 3



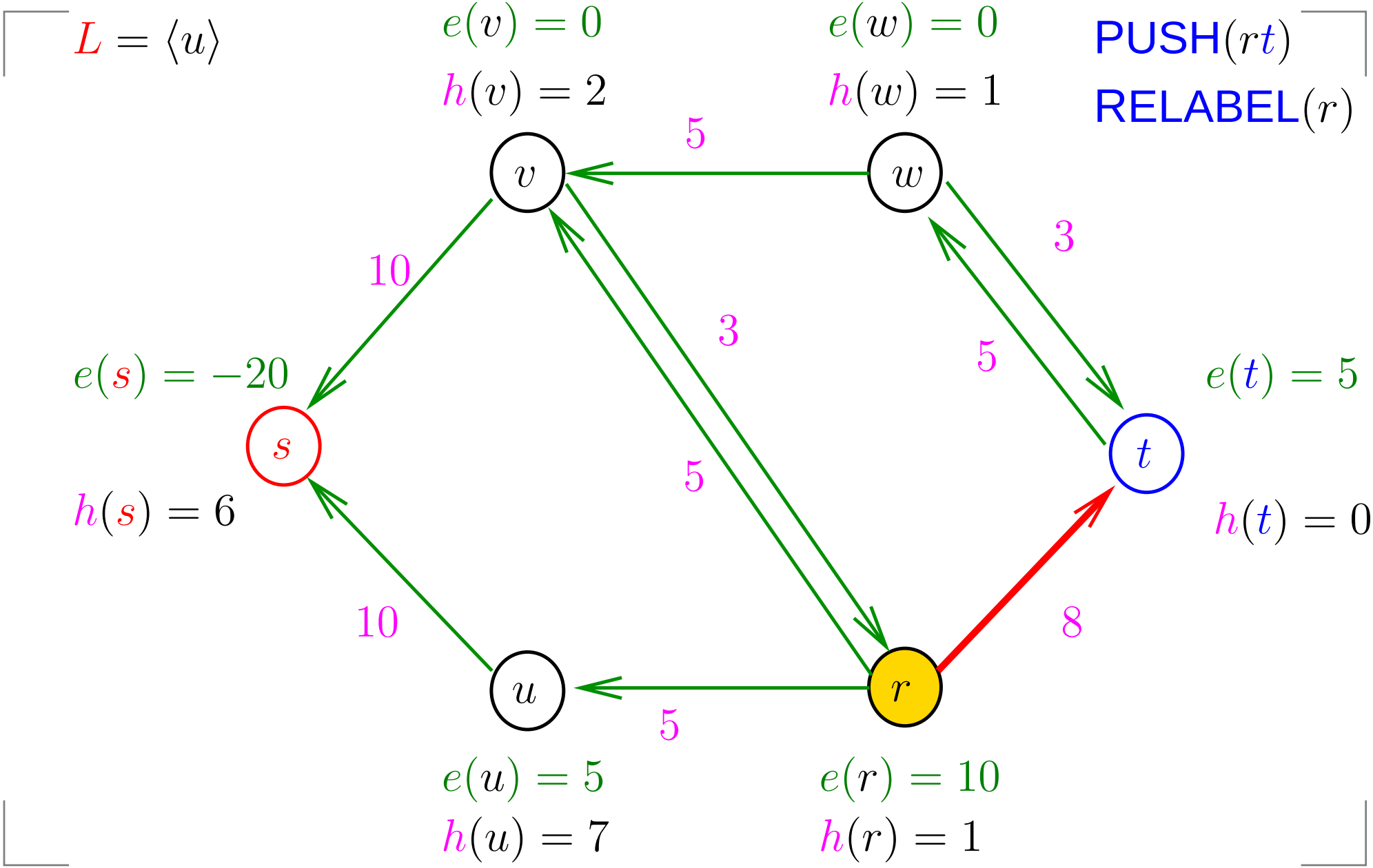
Node-Examation (w)



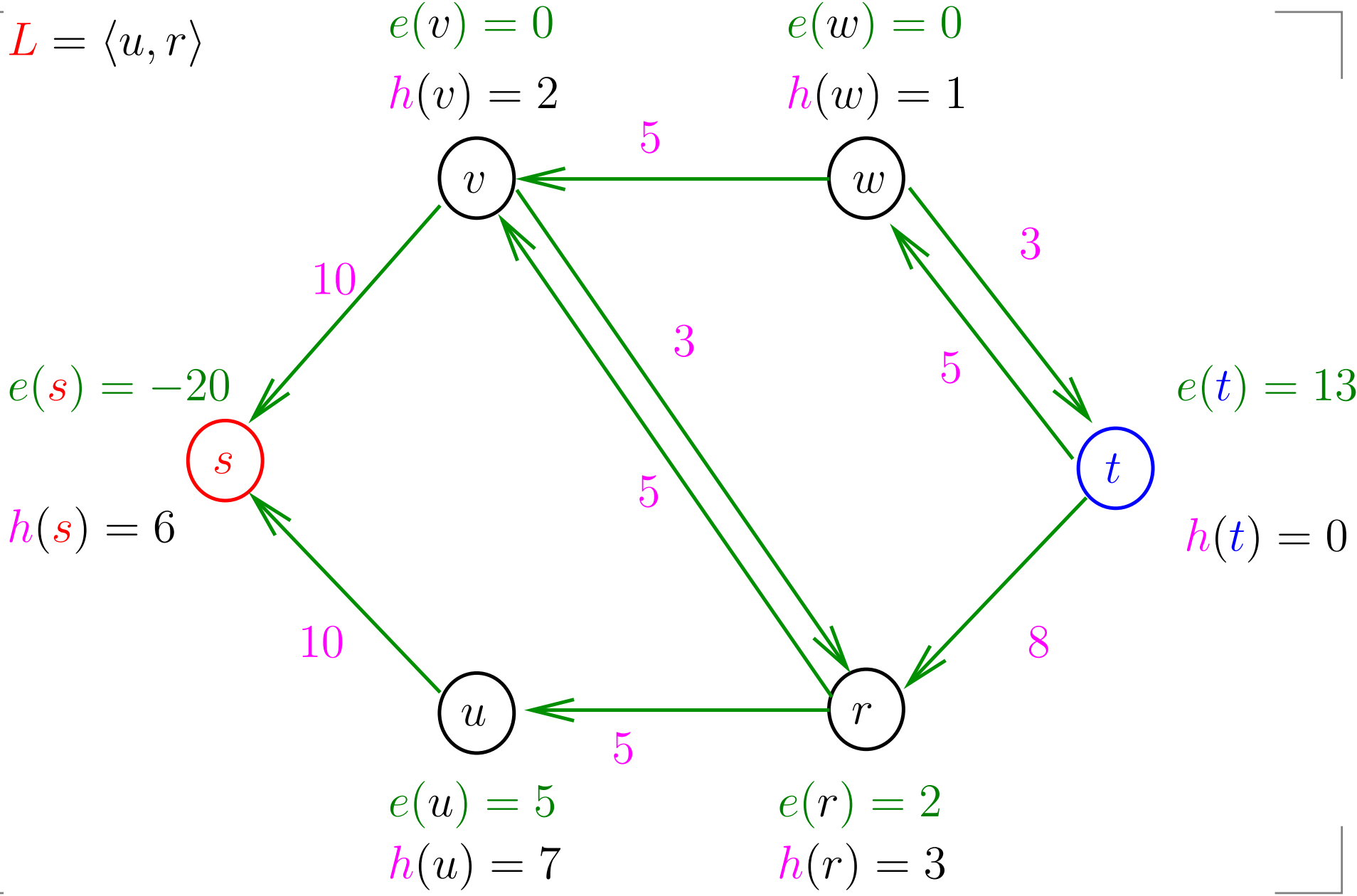
Rede residual 4



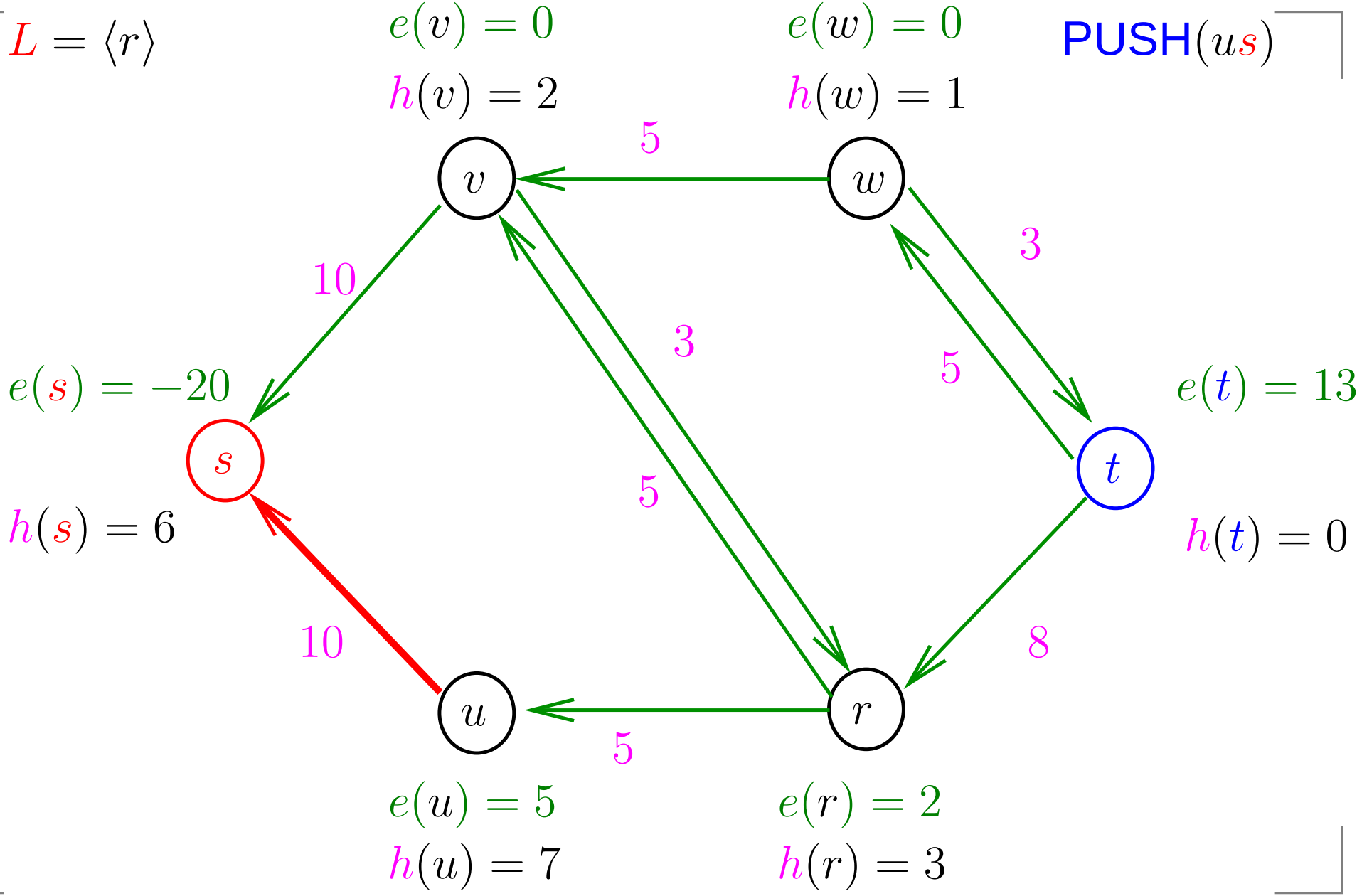
Node-Examination (r)



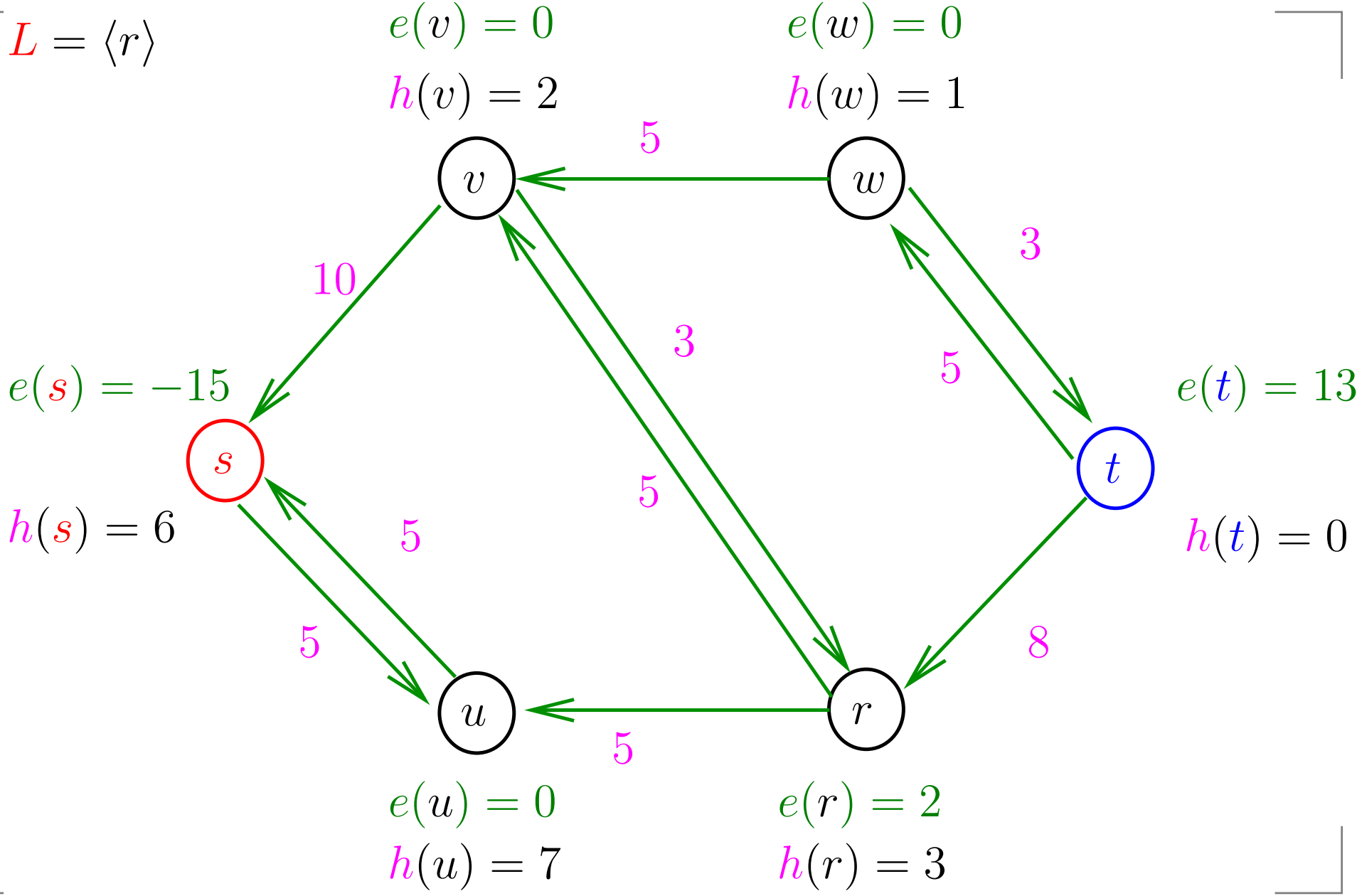
Rede residual 5



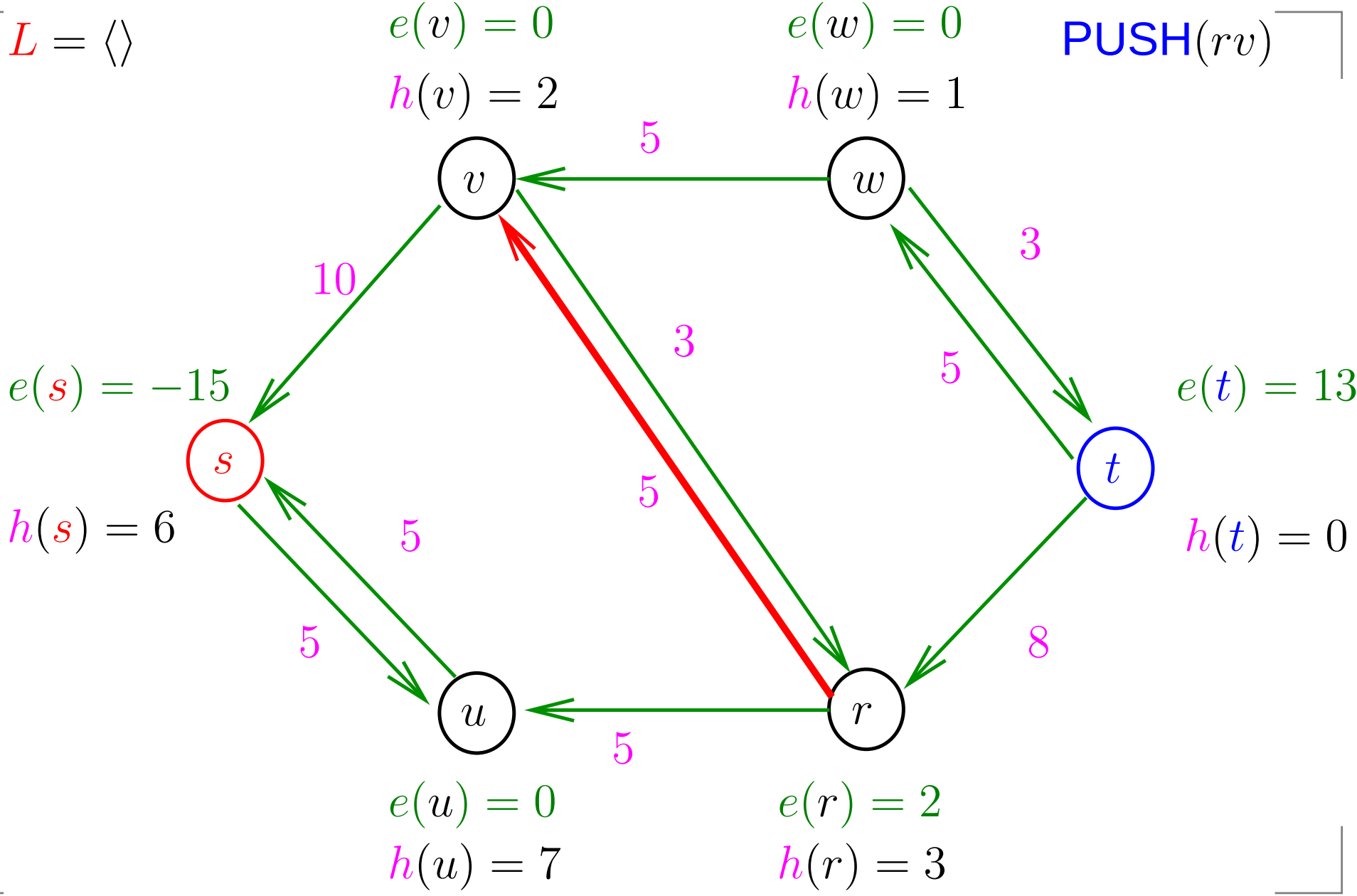
Node-Examination (u)



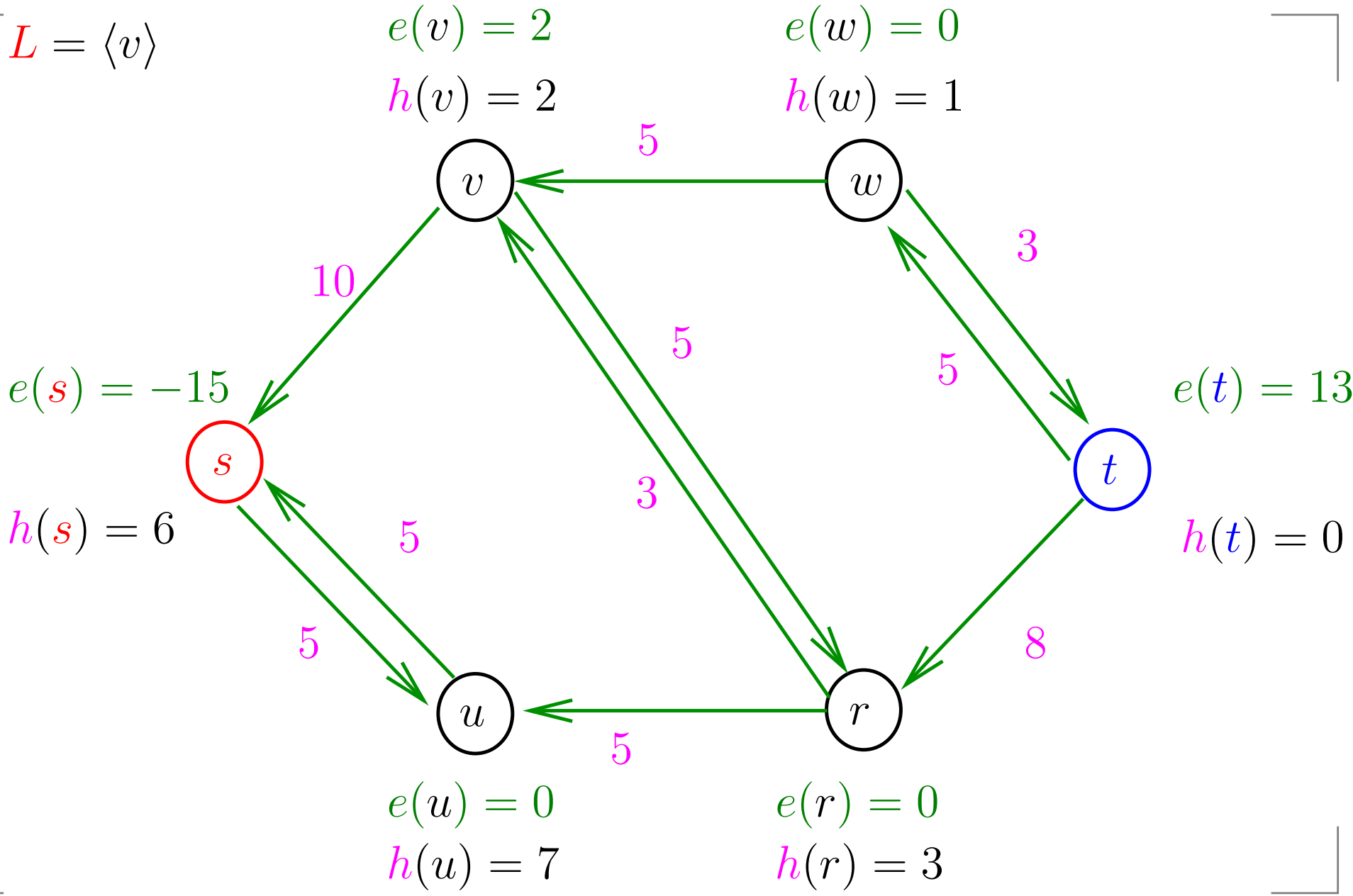
Rede residual 6



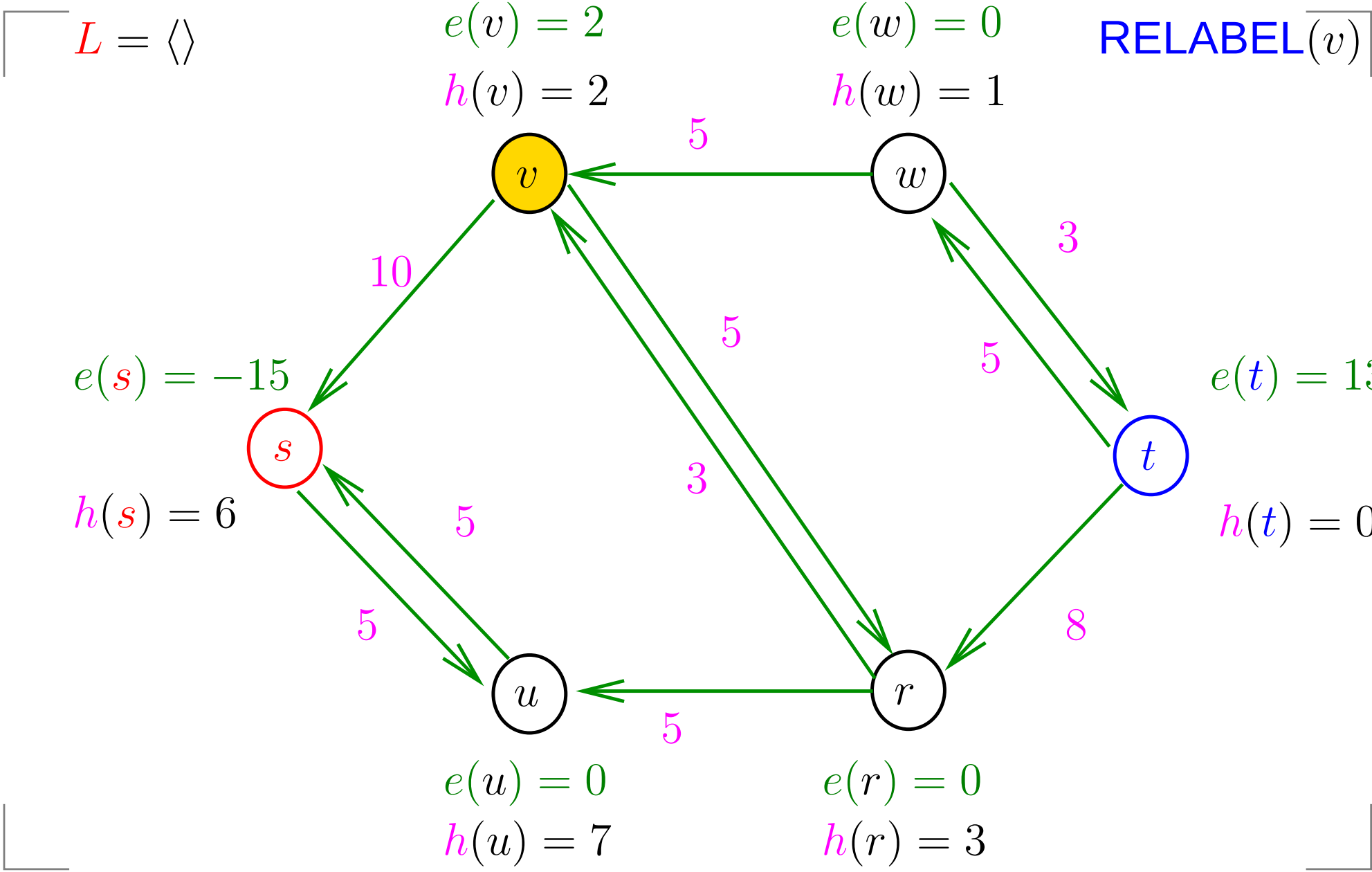
Node-Examination (r)



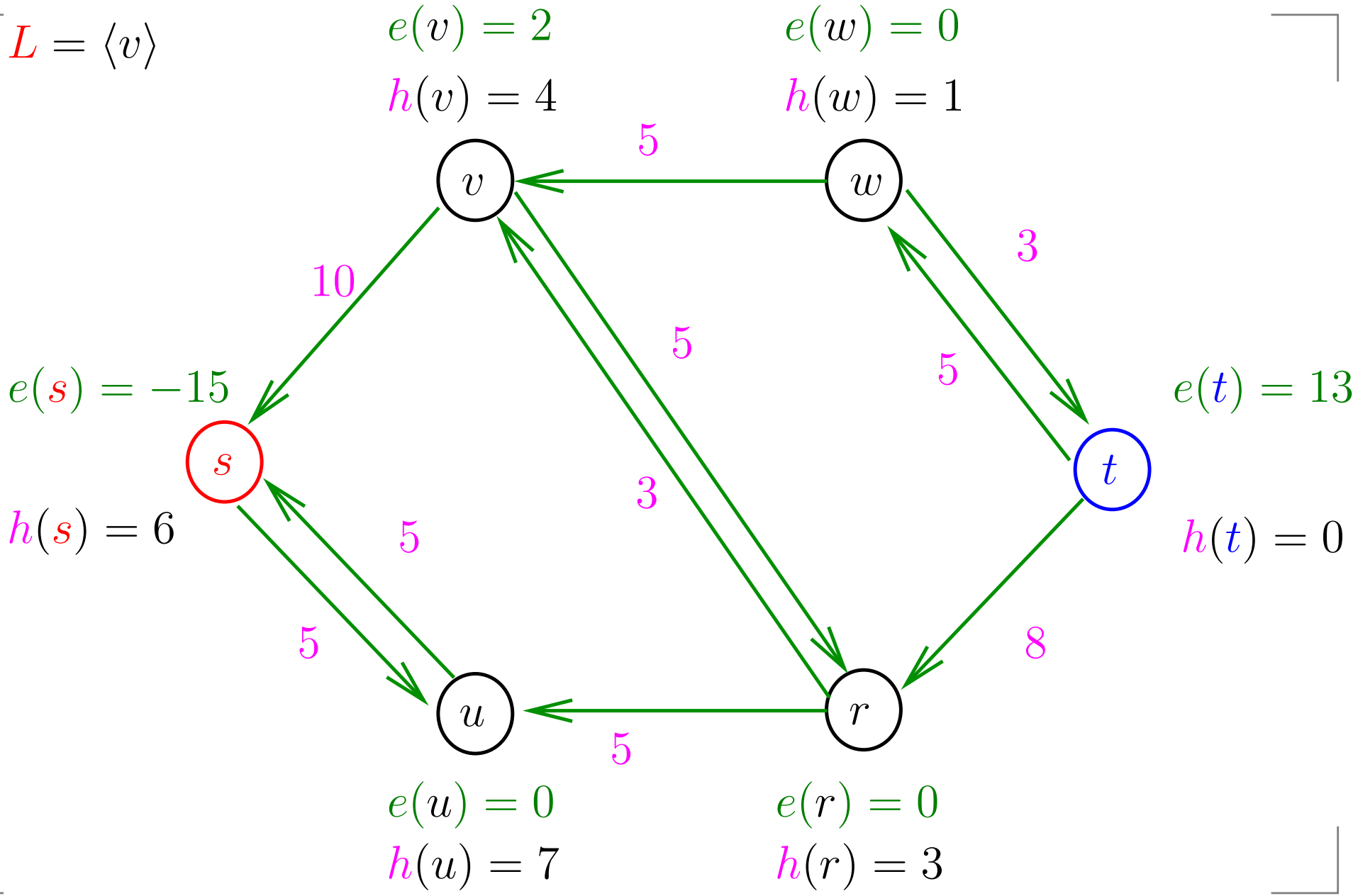
Rede residual 7



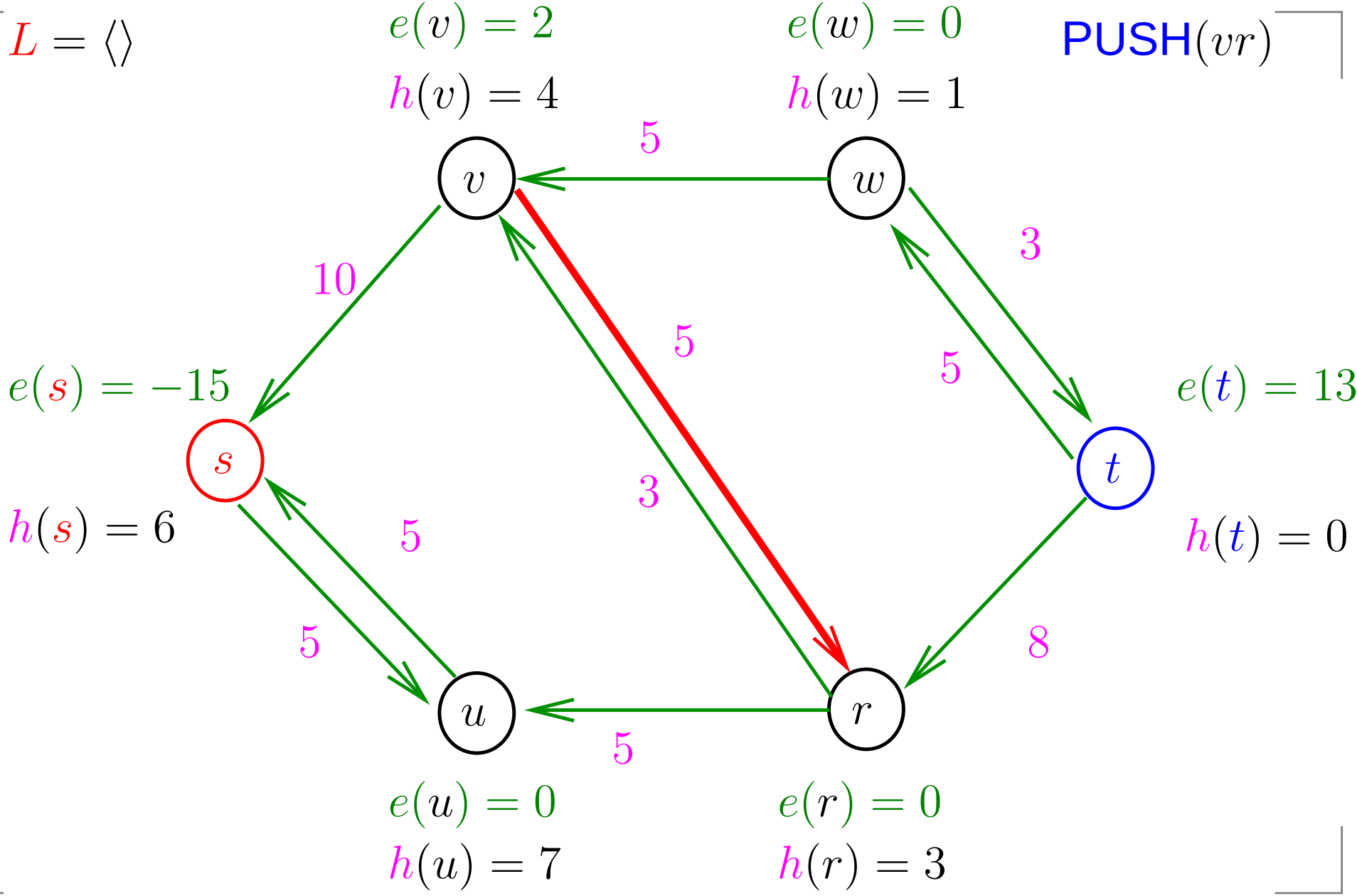
Node-Examination (v)



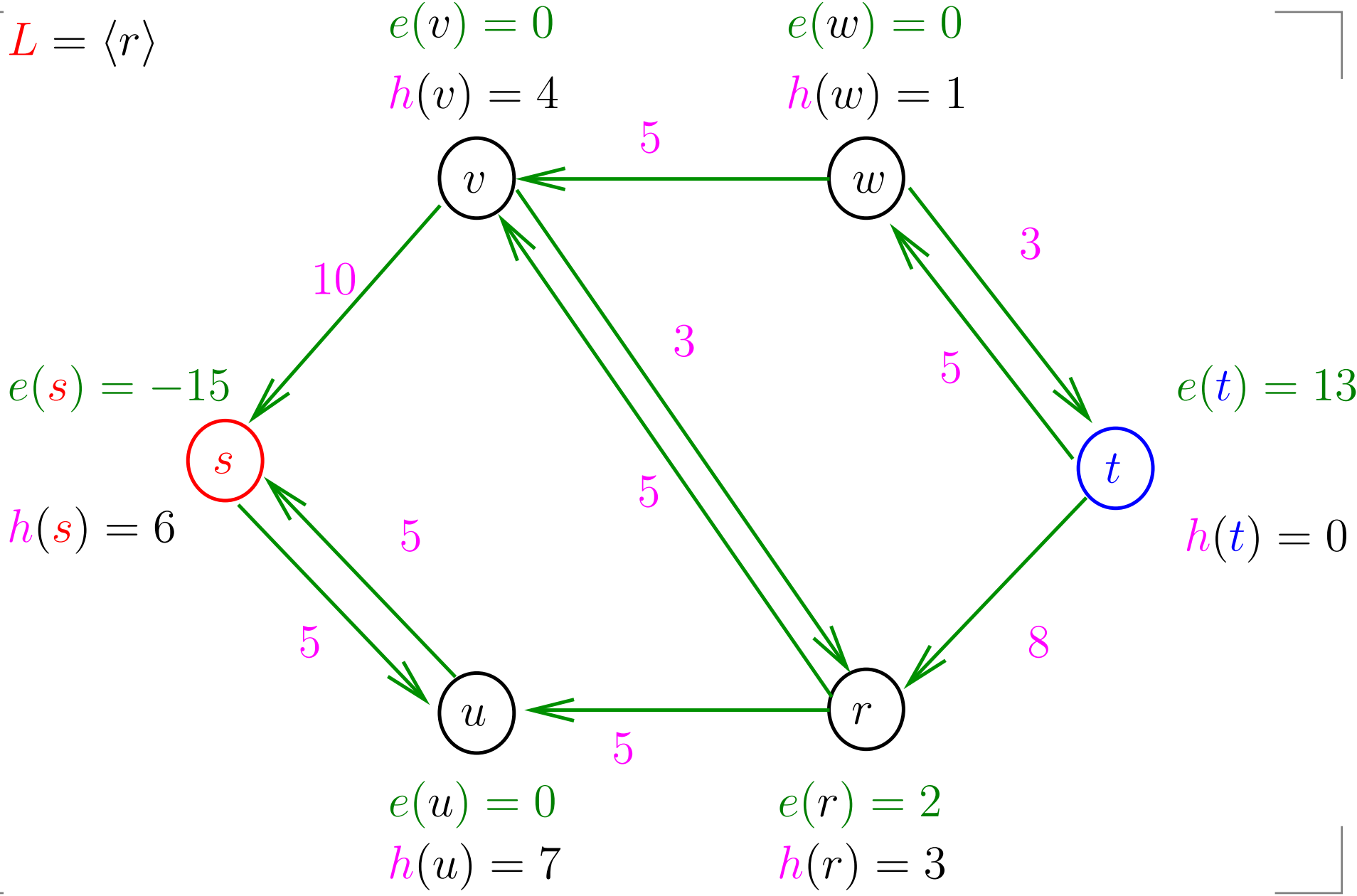
Rede residual 8



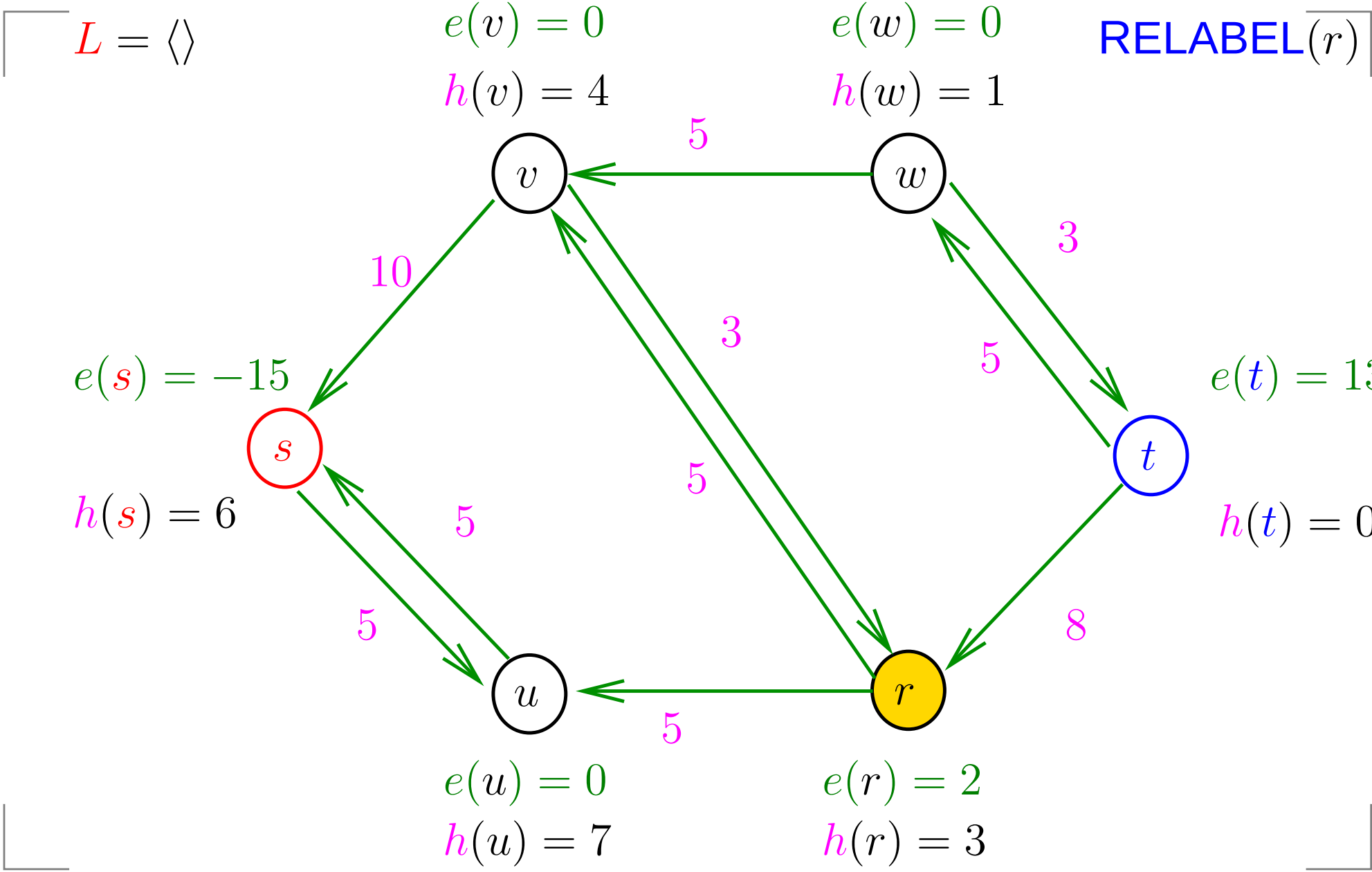
Node-Examination (v)



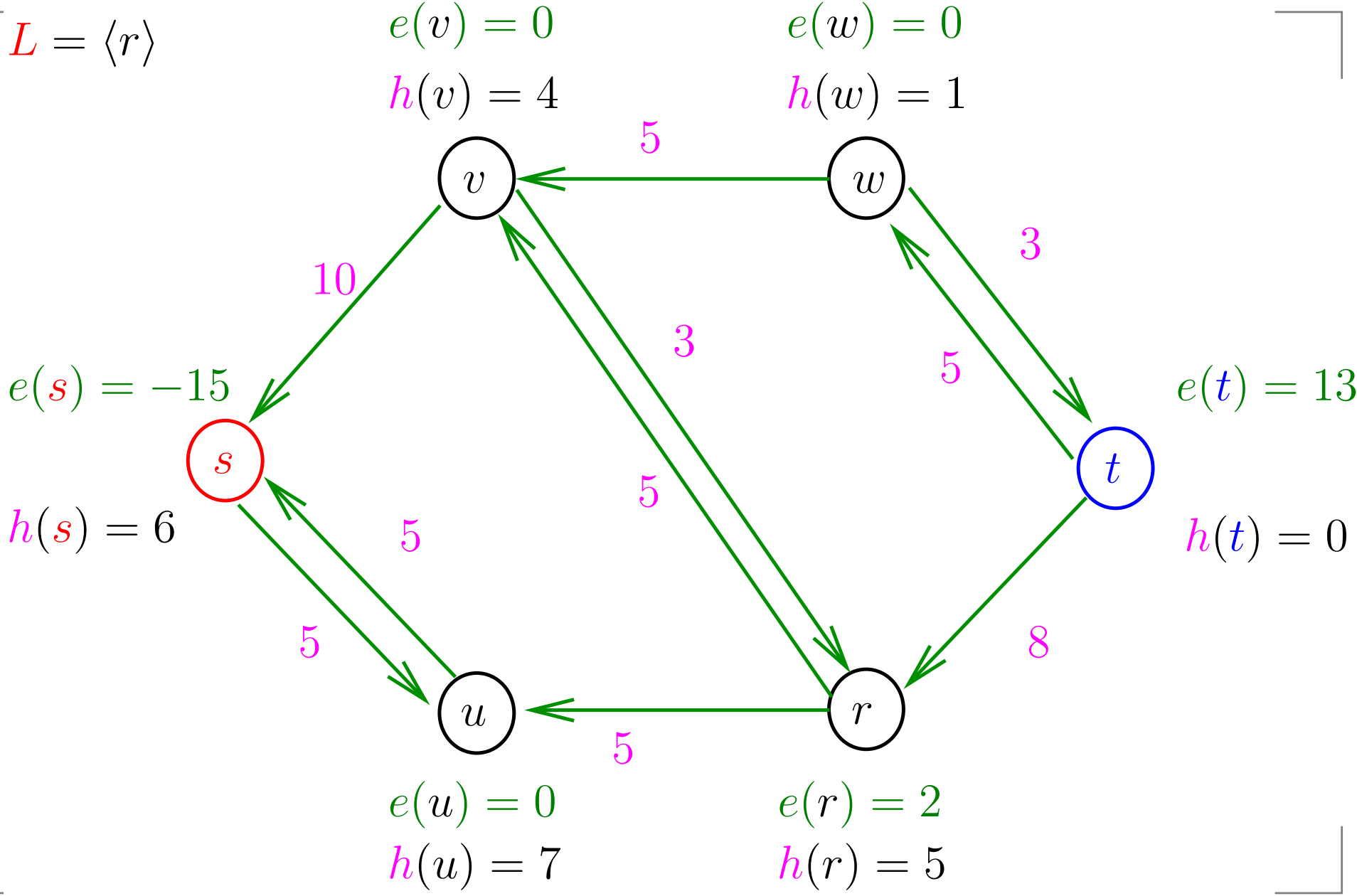
Rede residual 9



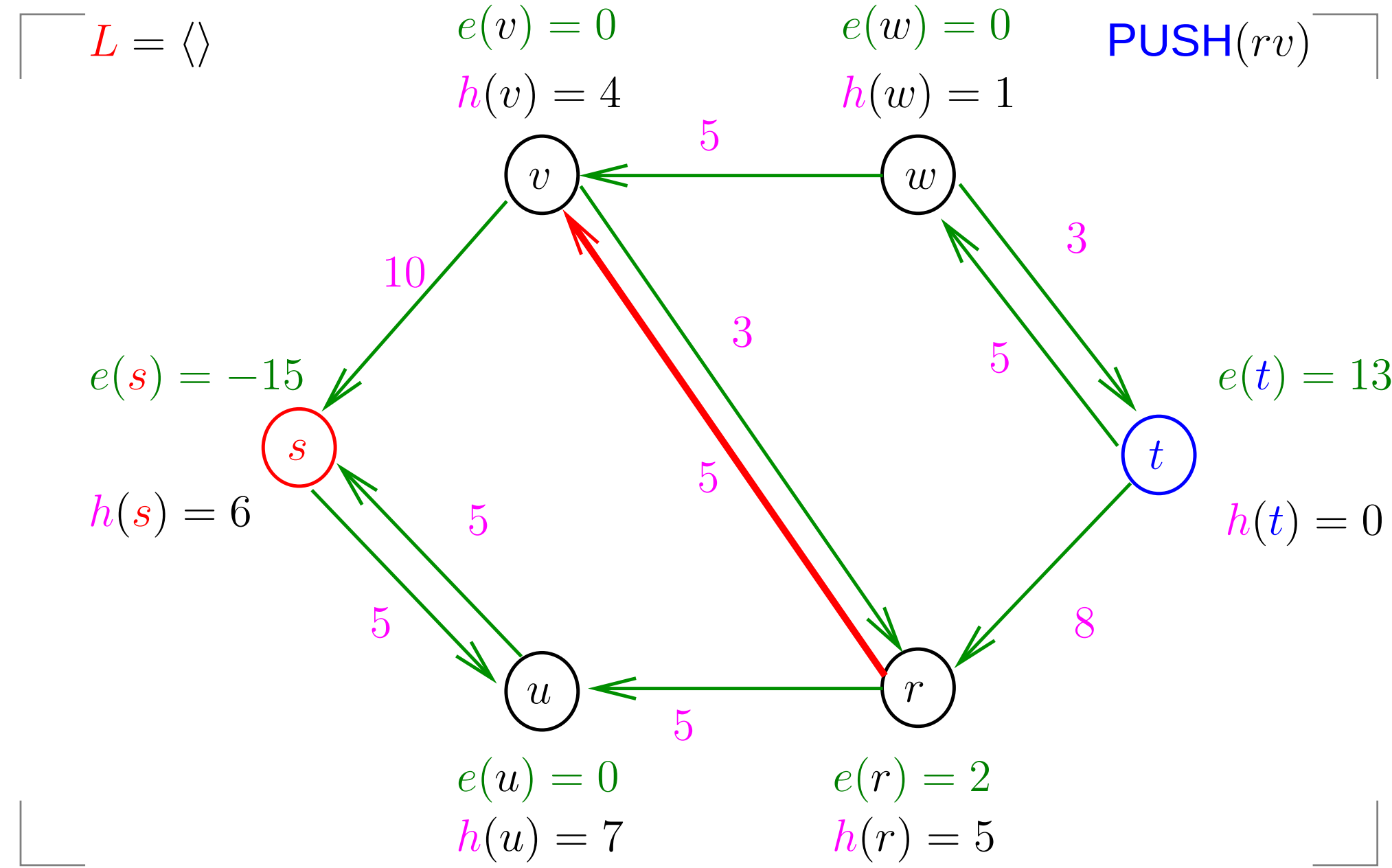
Node-Examination (r)



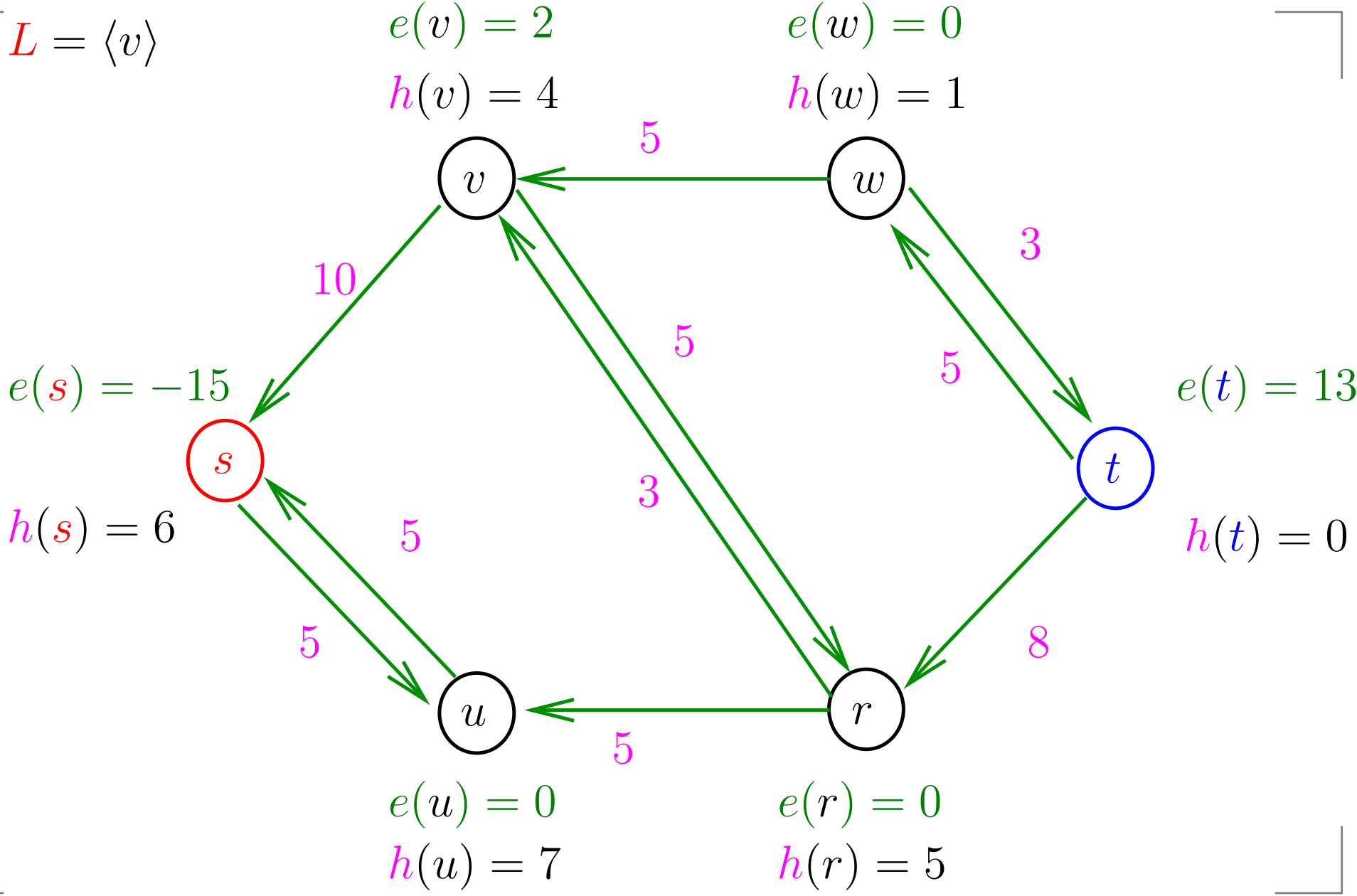
Rede residual 10



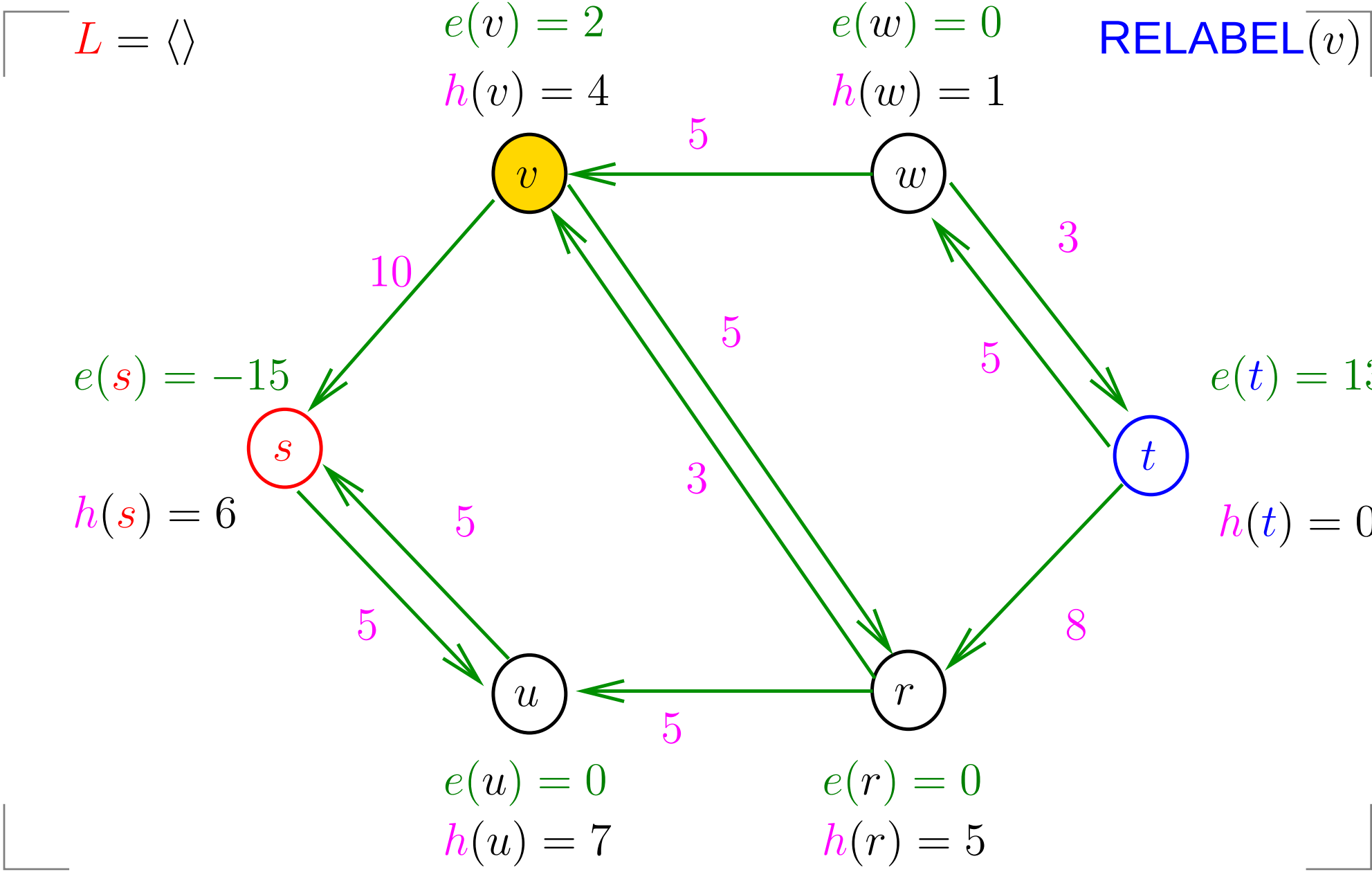
Node-Examination (r)



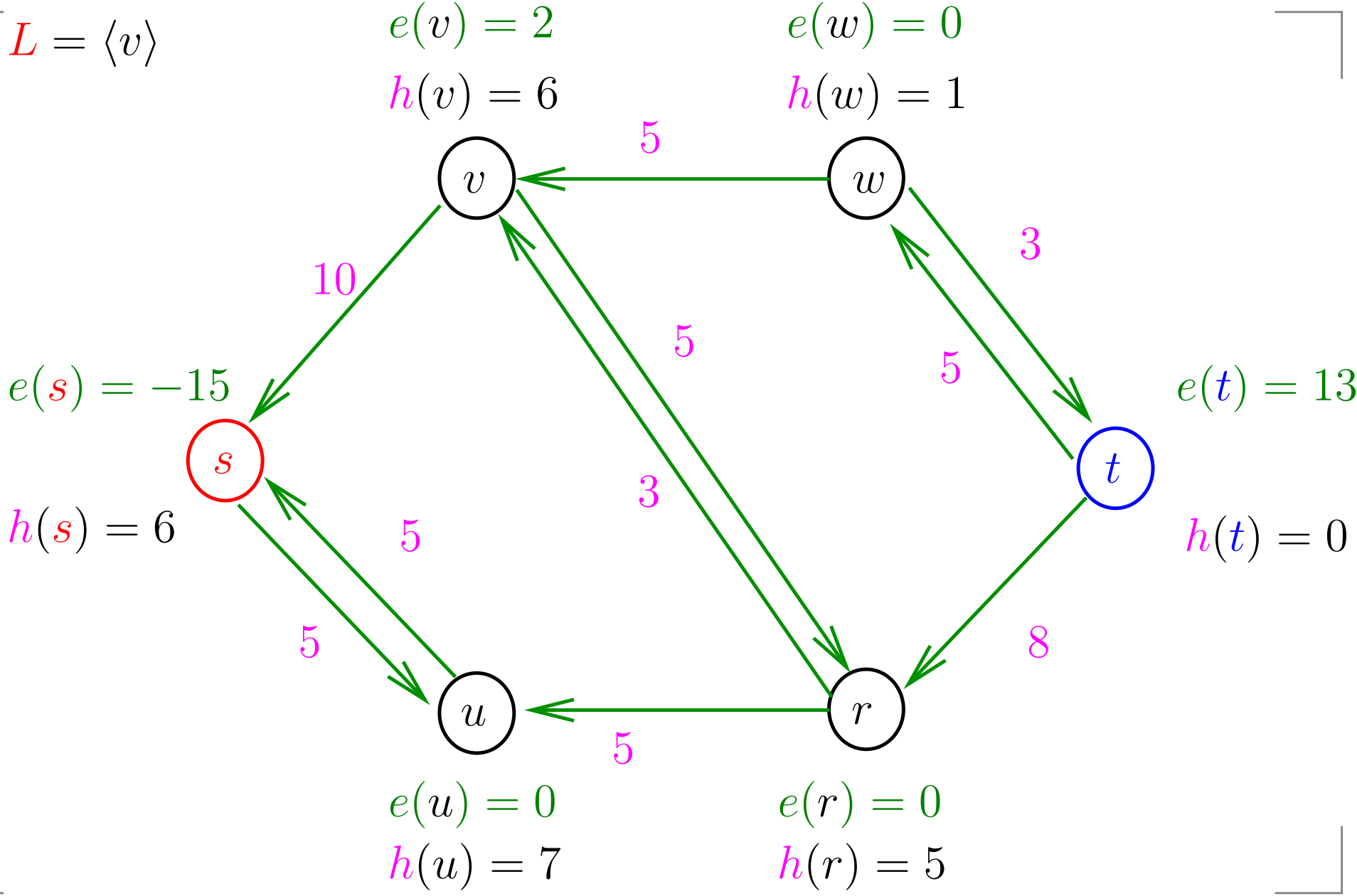
Rede residual 11



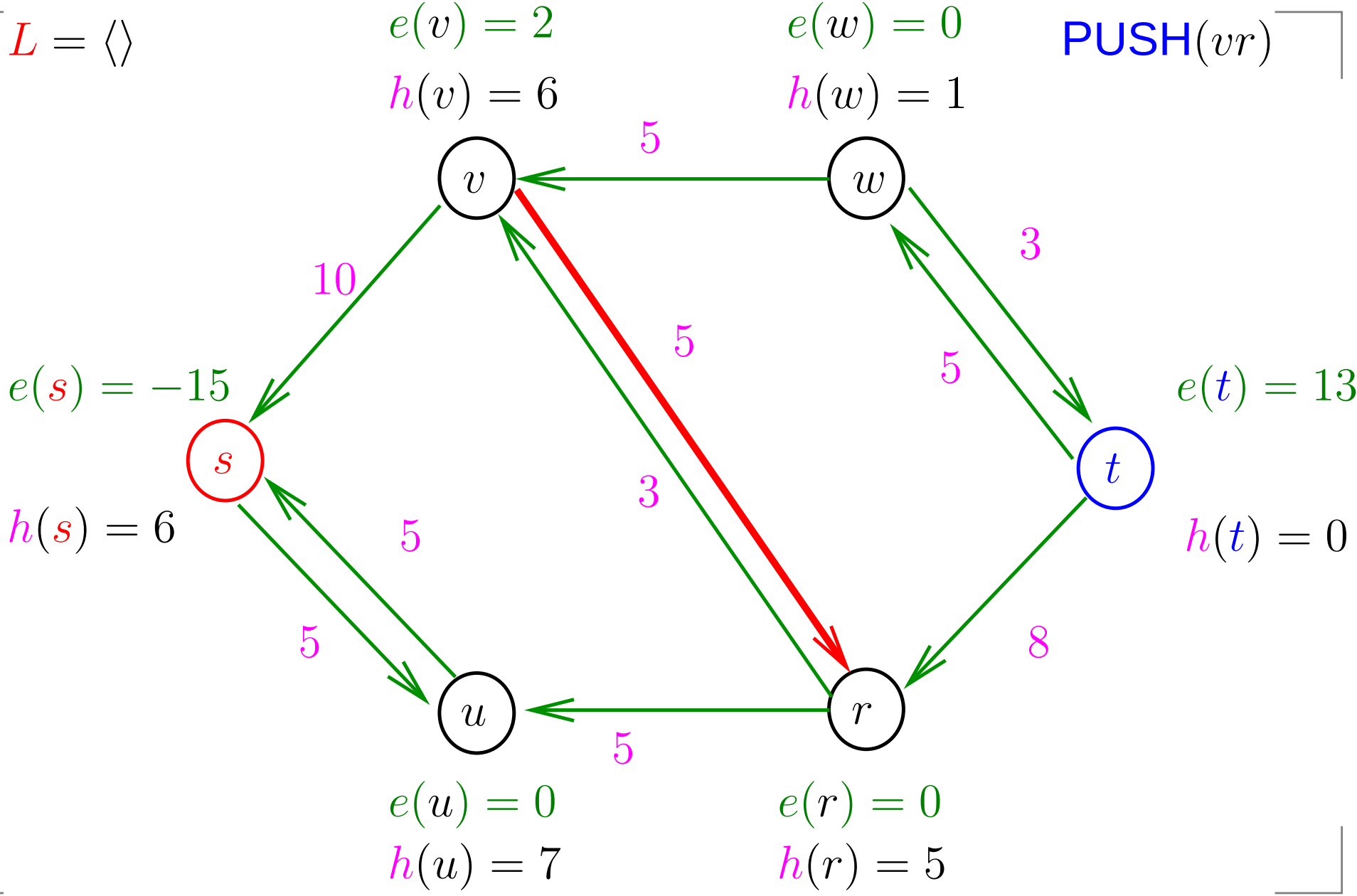
Node-Examination (v)



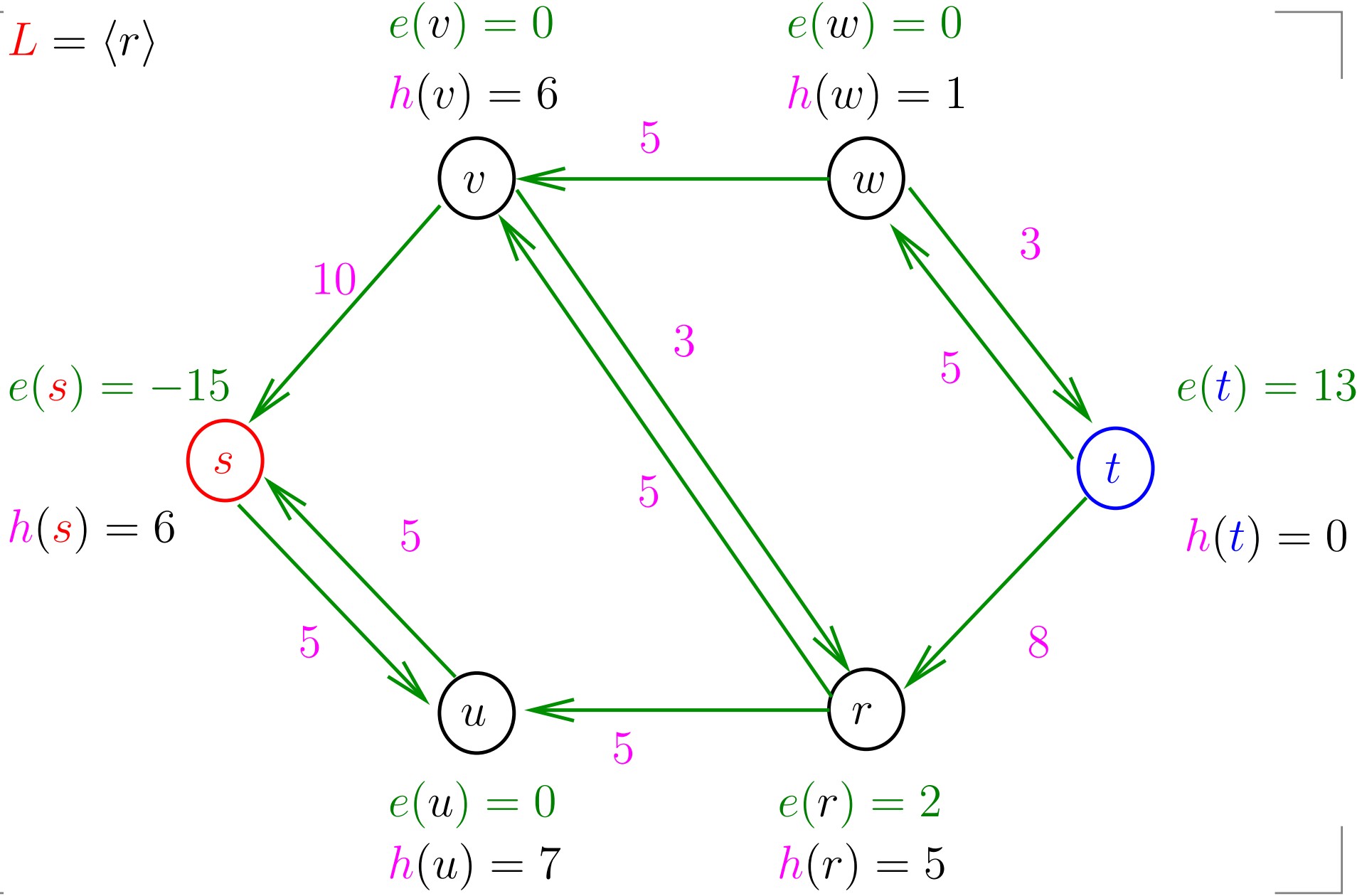
Rede residual 12



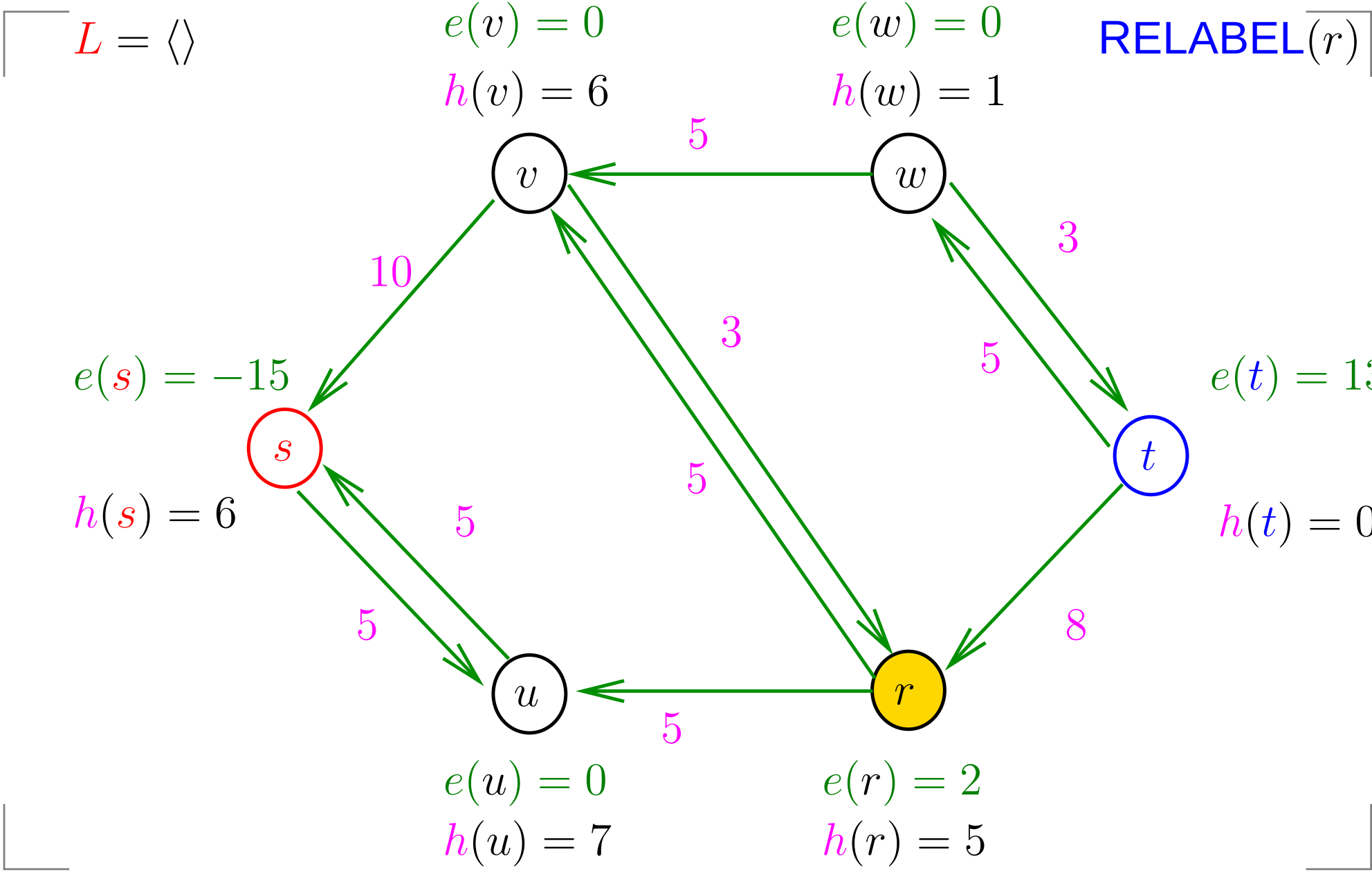
Node-Examination (v)



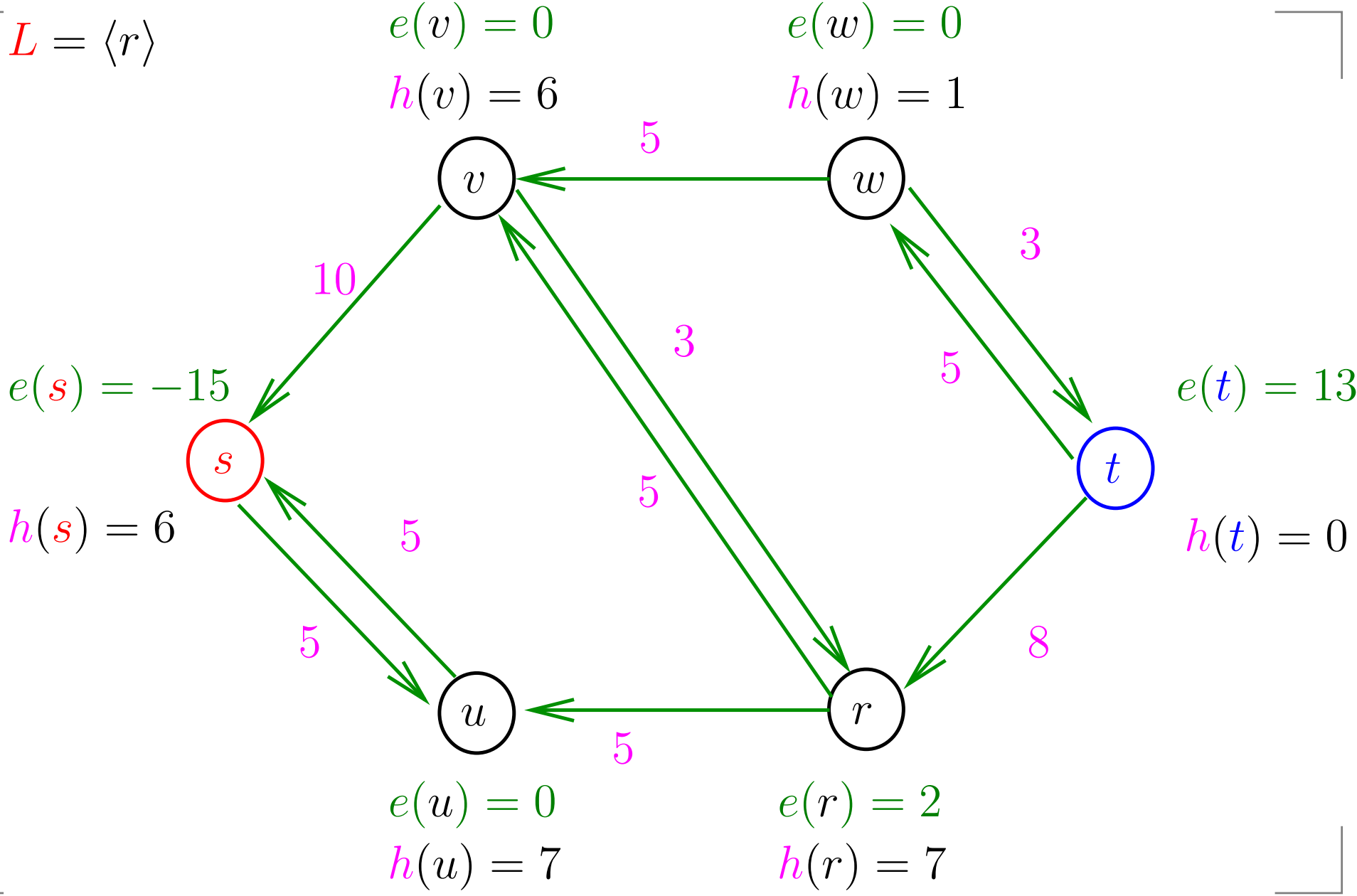
Rede residual 13



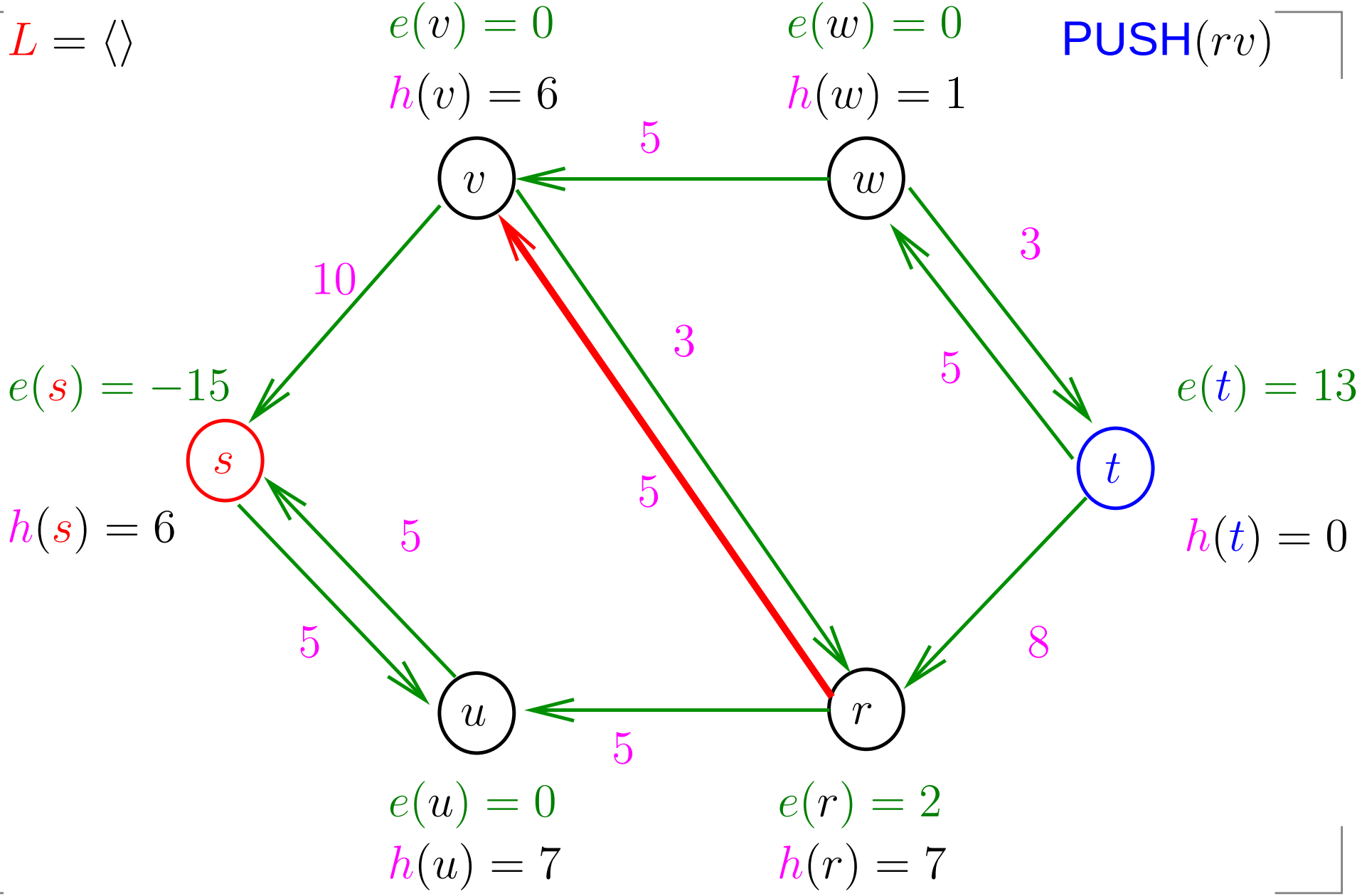
Node-Examination (r)



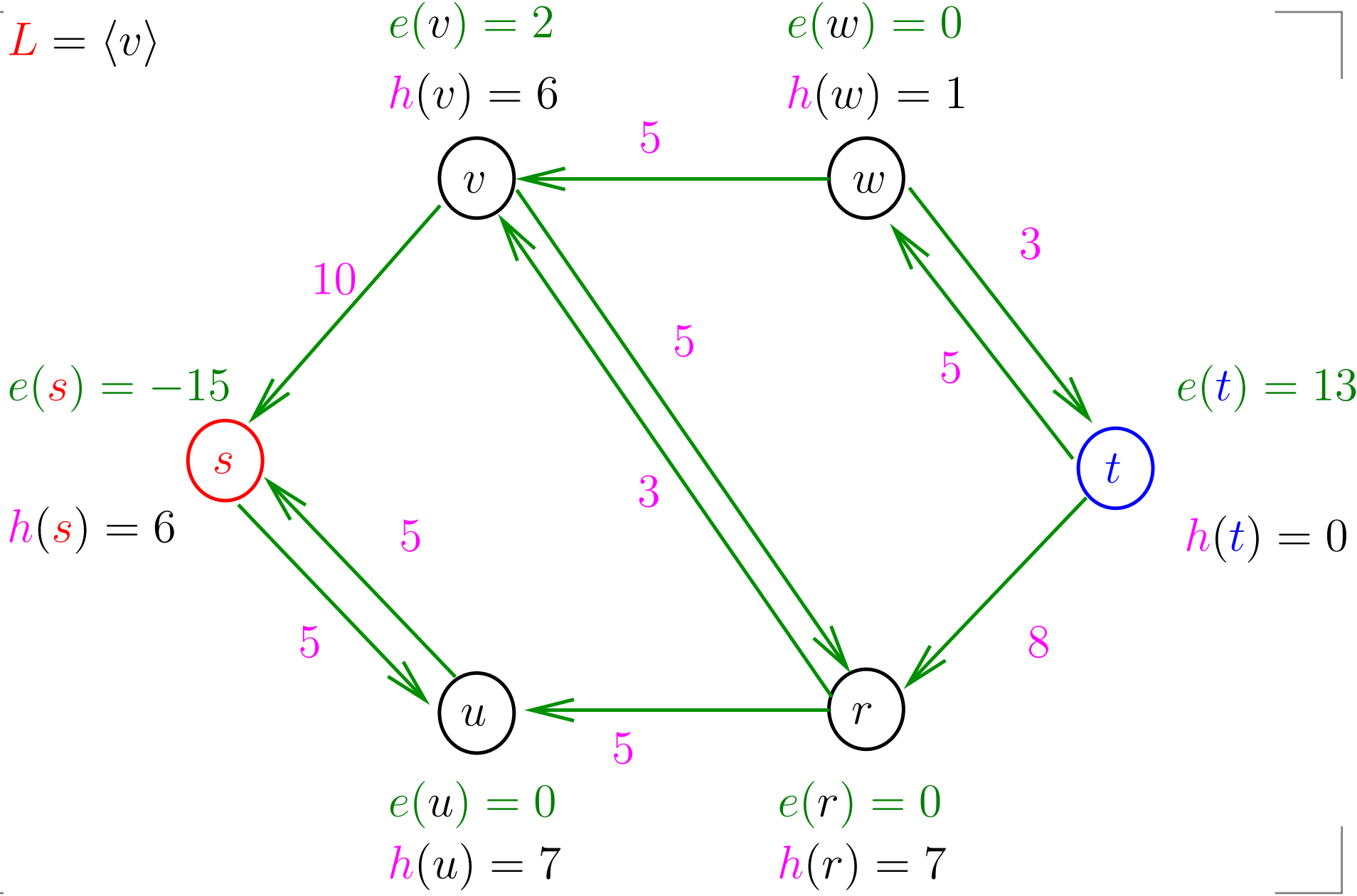
Rede residual 14



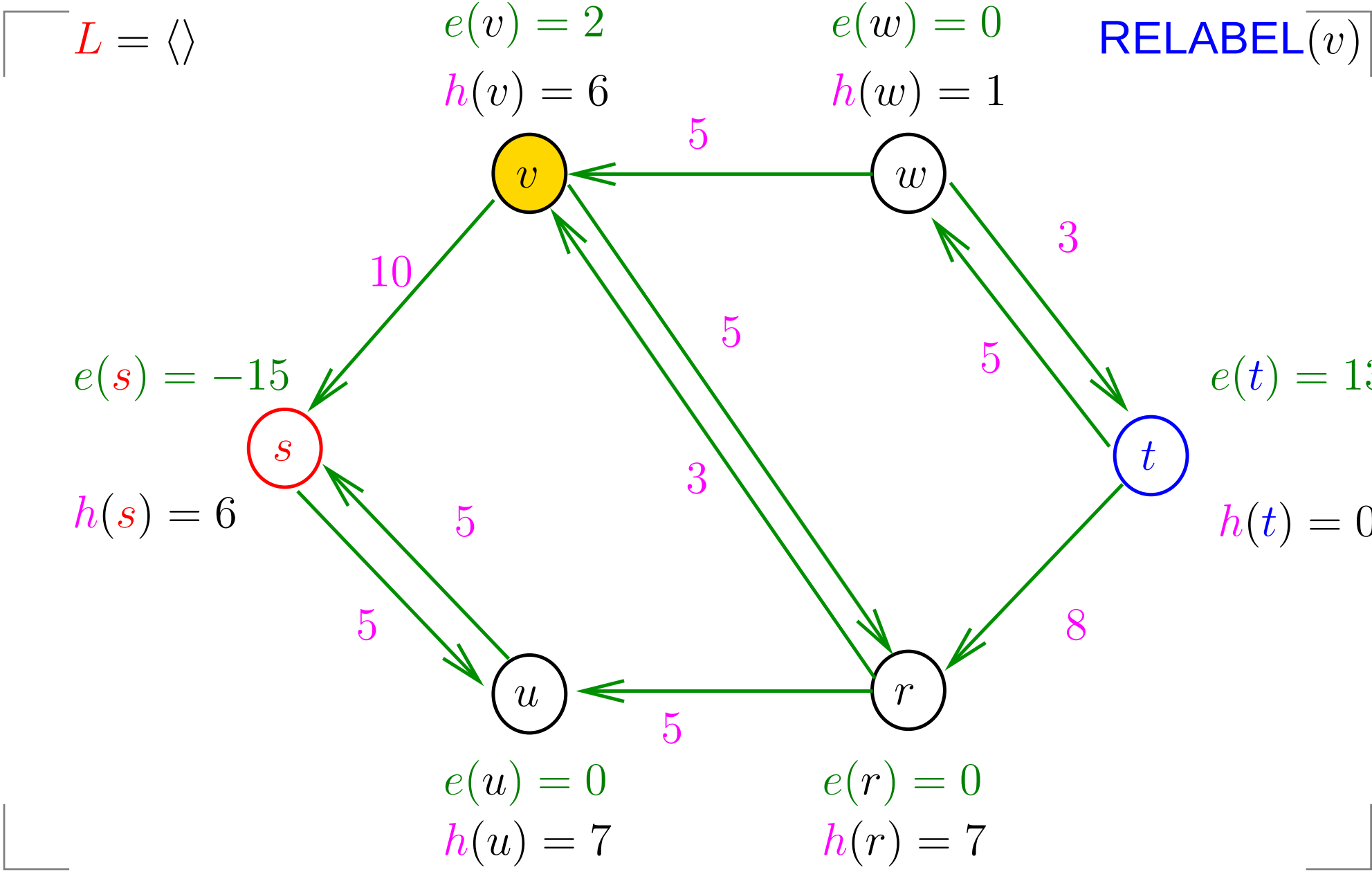
Node-Examination (r)



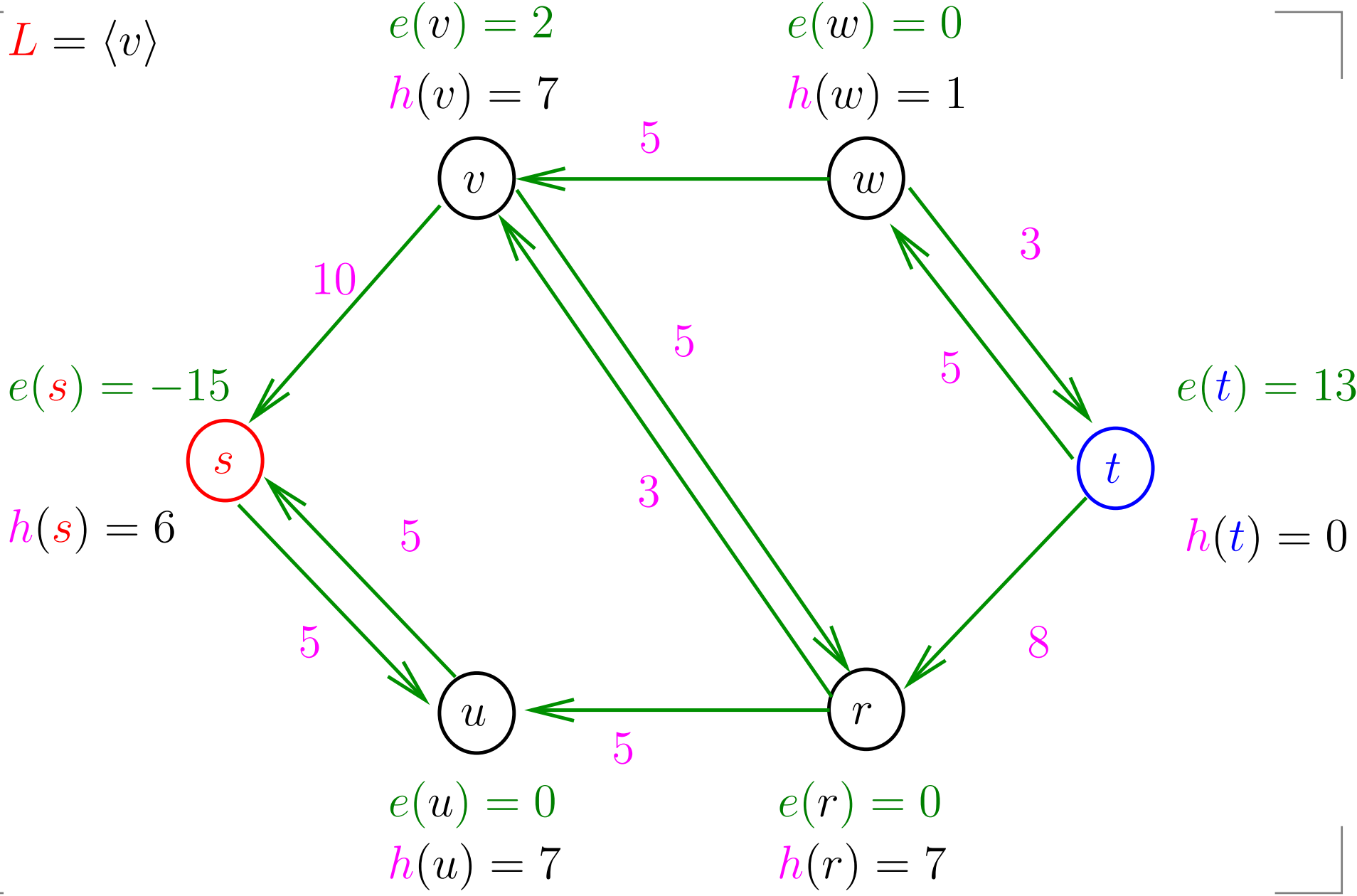
Rede residual 15



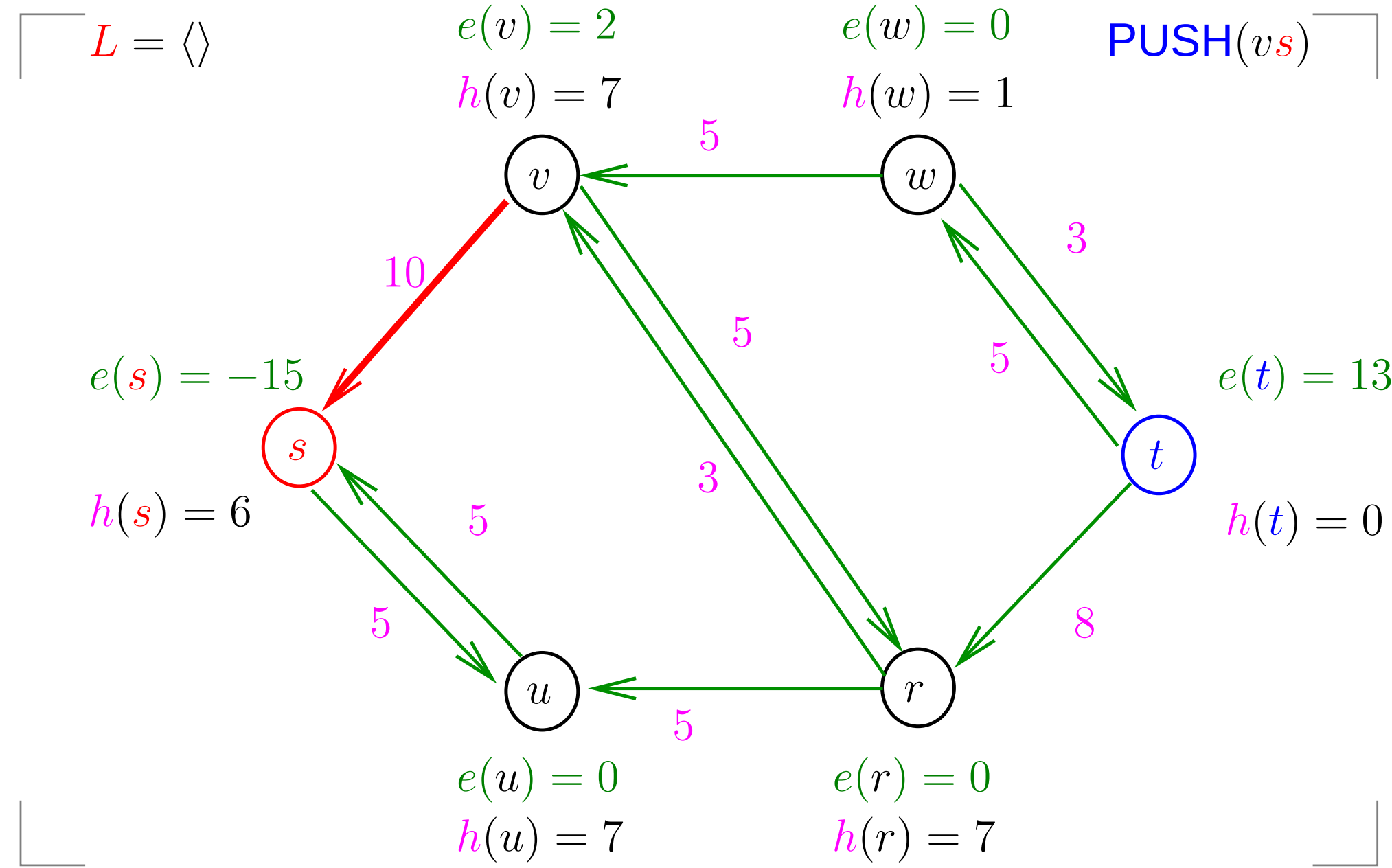
Node-Examination (v)



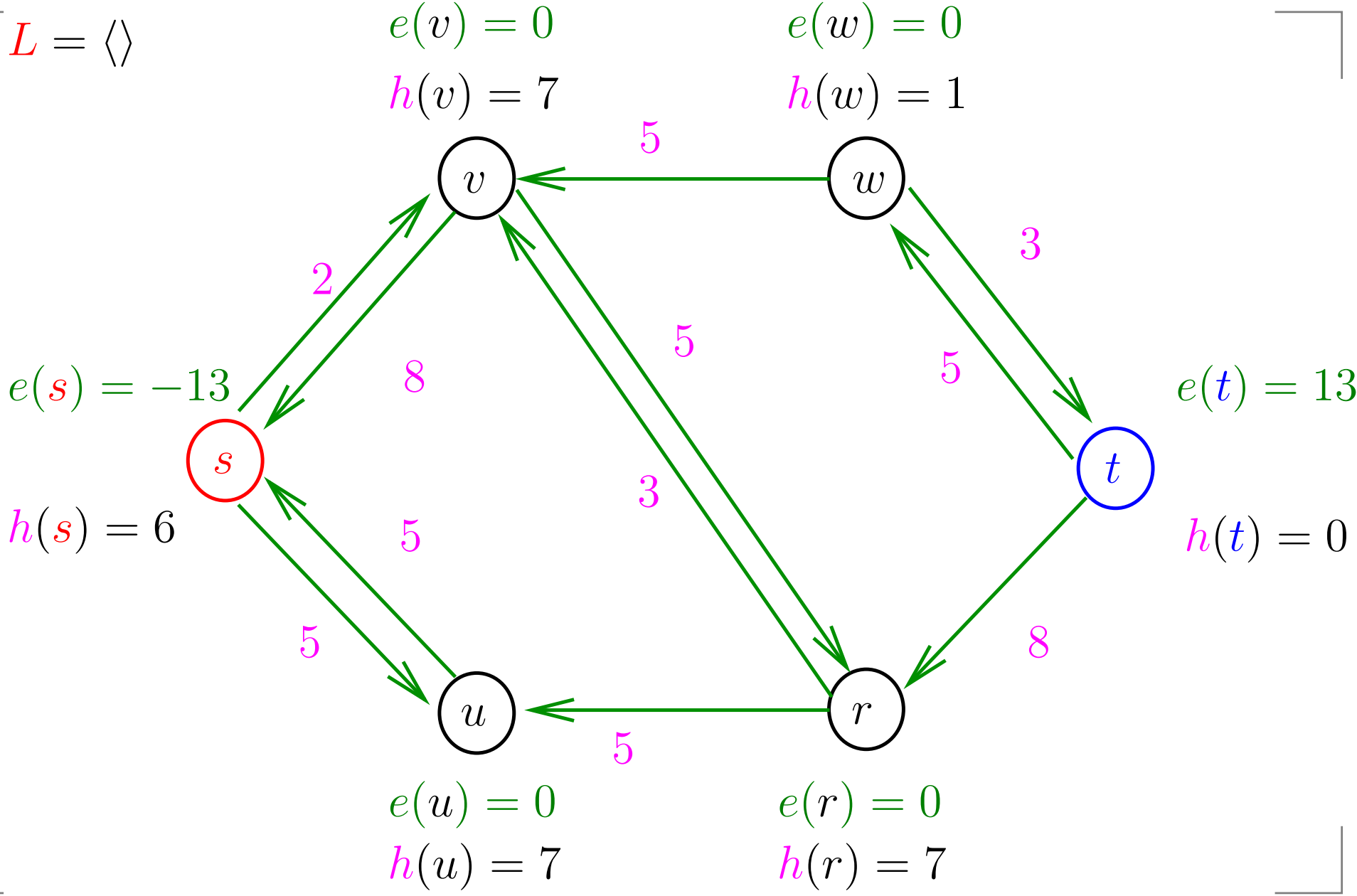
Rede residual 16



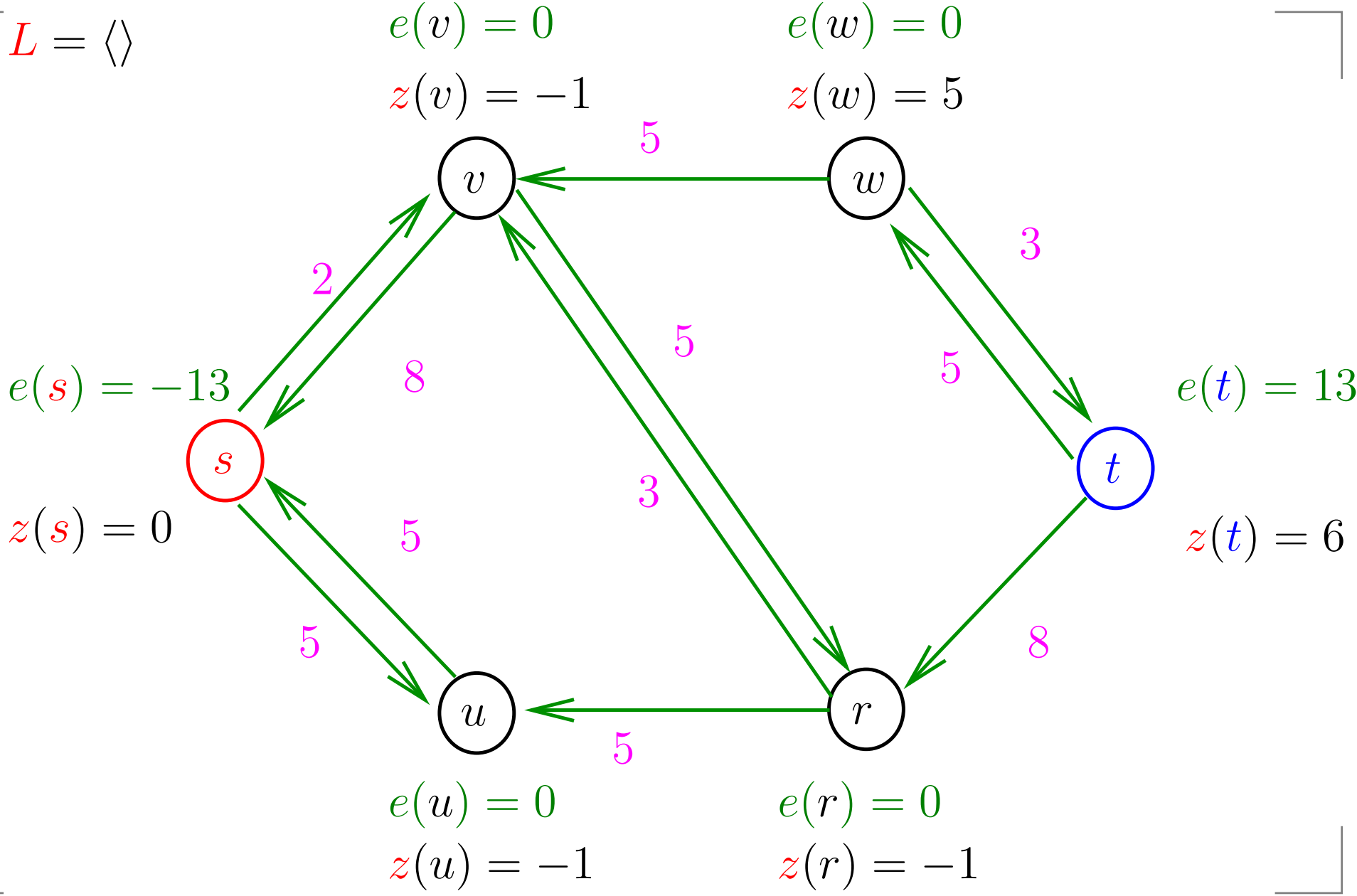
Node-Examination (v)



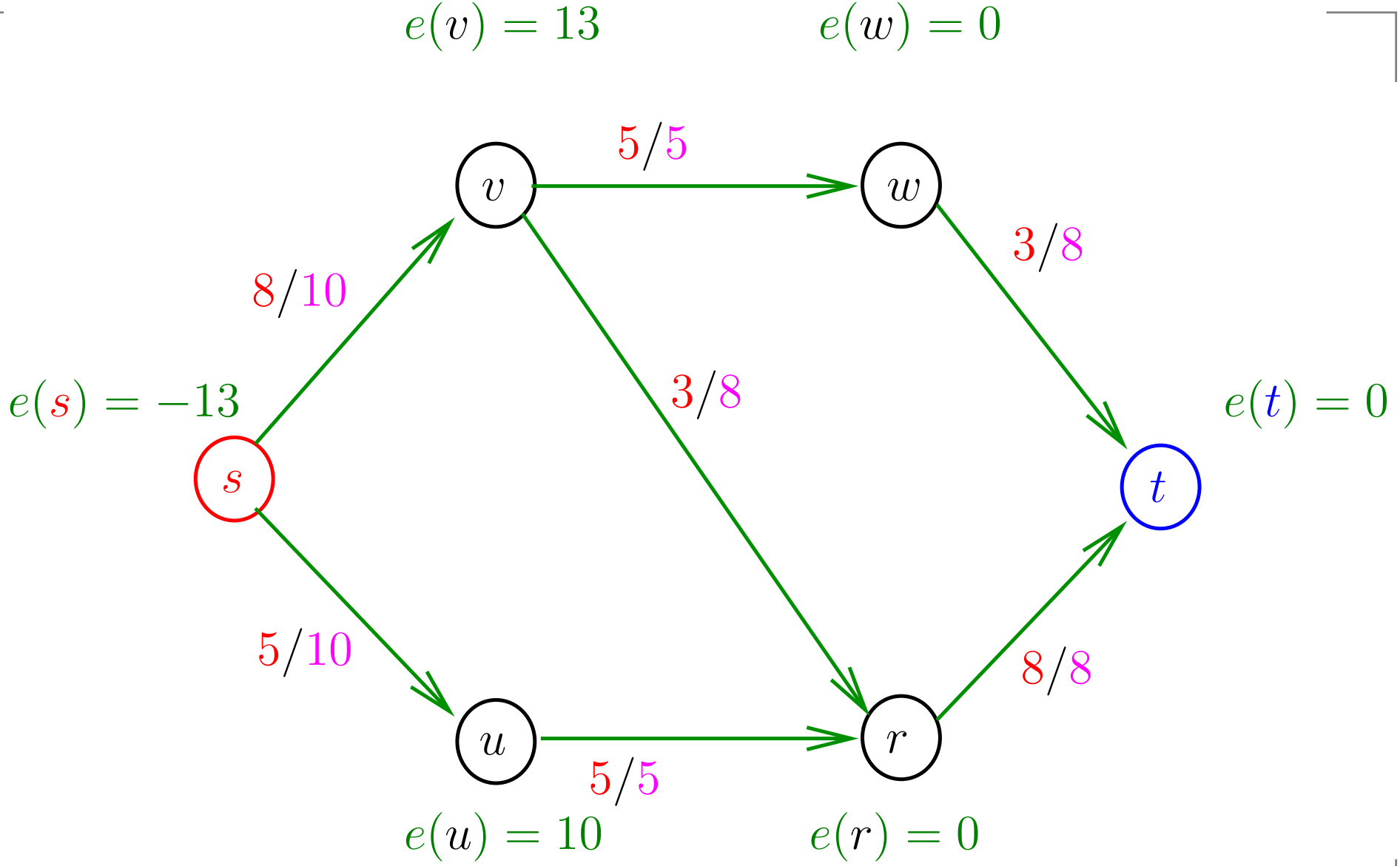
Rede residual 17



Rede residual 17



Fluxo máximo



Node-Examination

NODE-EXAMINATION (i)

1 $A' \leftarrow A(i)$
2 **enquanto** $e(i) > 0$ e $A' \neq \emptyset$ **faça**
3 retire uma arco ij de A'
4 **se** $\check{x}(ij) < u(ij)$ e ij é justo
5 **então** PUSH(ij)
6 **se** $e(i) > 0$
7 **então** RELABEL(i)

Push

PUSH (ij)

1 $\delta \leftarrow \min\{e(i), u(ij) - \check{x}(ij))\}$

2 $\check{x}(ij) \leftarrow \check{x}(ij) + \delta$

3 $\check{x}(ji) \leftarrow \check{x}(ji) - \delta$

4 $e(i) \leftarrow e(i) - \delta$

5 $e(j) \leftarrow e(j) + \delta$

6 **se** $e(j) > 0$ e $j \notin L$ e $j \neq t$

7 **então** acrescente j ao final de L

Relabel (1)

RELABEL (i)
1 $z(i) \leftarrow z(i) - 1$ $\triangleright$ $z(i)$ decresce
2 acrescente i ao final de L

RELABEL (i)
1 $h(i) \leftarrow h(i) + 1$ $\triangleright$ $h(i)$ cresce
2 acrescente i ao final de L

Consumo de tempo: $\mathrm{O}(1)$

Relabel (2)

RELABEL (i)
1 $z(i) \leftarrow -\infty$
2 **para cada** ij em $A(i)$ **faça**
3 **se** $\check{x}(ij) < u(ij)$ e $z(i) < z(j) - 1$
4 **então** $z(i) \leftarrow z(j) - 1$
5 acrescente i ao final de L

RELABEL (i)
1 $h(i) \leftarrow \infty$
2 **para cada** ij em $A(i)$ **faça**
3 **se** $\check{x}(ij) < u(ij)$ e $h(i) > h(j) + 1$
4 **então** $h(i) \leftarrow h(j) + 1$
5 acrescente i ao final de L

Consumo de tempo: $\mathrm{O}(|A(i)|)$

Algoritmo FIFO preflow-push

FIFO-PREFLOW-PUSH $()$

```
 0   PRÉ-PROCESSAMENTO()
 1   L ← ⟨⟩      ▷ L funciona como uma fila.
 2   para cada j em N − {t} faça
 3         se e(j) > 0
 4               então acrescente j ao final de L
 5   enquanto L ≠ ⟨⟩ faça
 6         seja i o primeiro nó em L
 7         retire i de L
 8         NODE-EXAMINATION(i)
 9   x ← FLUXO(x̌)
10   devolva x
```

Invariantes

Na linha 5, antes do "**enquanto** $L \neq \langle\rangle$ ..." vale que

(i1) $x = \text{FLUXO}(\check{x})$ é um pré-fluxo com fonte s;

(i2) $e(i) = \check{x}(\bar{i}, i) - \check{x}(i, \bar{i})$ para cada i em N;

(i3) x respeita u;

(i4) z é um 1-potencial em $(N, A_{\check{x}})$;

(i5) $z(t) - z(s) = n$;

(i6) $z(t) - z(i) \geq 0$ para todo i;

(i7) se $e(j) > 0$ então existe um caminho de j a s em $(N, A_{\check{x}})$.

(i8) os nós em L são distintos dois a dois;

(i9) para todo nó j em $N - \{t\}$, $e(j) > 0$ se e só se j está em L.

Número de iterações

Fato 1. O algoritmo RELABEL é executado $< 2n^2$ vezes.

Demonstração (rascunho): $z(t) - z(i) < 2n$ e em cada execução o valor de $z(i)$ decresce de pelo menos 1.

PUSH (ij) é saturante se $\check{x}(ij) = u(ij)$ após a execução.

Fato 2. Um PUSH saturante é executado $\leq nm$.

Demonstração (rascunho): Entre duas execuções de um PUSH saturante de um arco ij o valor de $z(j)$ diminui de pelo menos 2.

Fases

Uma fase é uma seqüência de iterações que são tratados os nós que estão em L no fim da fase anterior.

FIFO-PREFLOW-PUSH $()$

```
 0  PRÉ-PROCESSAMENTO()
 1  L_1 ← L_2 ← ⟨⟩      ▷ L_1 e L_2 funcionam como filas
 2  para cada j em N − {t} faça
 3      se e(j) > 0 então acrescente j ao final de L_1
 4  enquanto L_1 ≠ ⟨⟩ ou L_2 ≠ ⟨⟩ faça
 5      se L_1 = ⟨⟩
 6          então L_1 ← L_2   L_2 ← ⟨⟩      ▷ nova fase
 7      seja i o primeiro nó em L_1
 8      retire i de L_1
 9      NODE-EXAMINATION(i)
10  devolva FLUXO(x̆)
```

Número de fases (1)

Fato 3. O número de fases é $\leq 4n^2 + 2n$ vezes.

Demonstração (rascunho): Considere o valor de

$$\Phi := \max(z(t) - z(i) : i \in N \text{ e } e(i) > 0).$$

- (i6) $\Rightarrow \Phi \geq 0$ no início de cada iteração.
- No início da primeira iteração

$$z(t) - z(i) < n$$

para todo nó i. Logo, no início da primeira iteração

$$\Phi < n.$$

Número de fases (2)

Sejam Φ_1 e Φ_2 o valor de Φ no início de duas fases consecutivas.

Temos duas situações a considerar.

Caso 1. Se na fase não é executado um RELABEL, então

$$\Phi_2 \leq \Phi_1 - 1.$$

Caso 2. Se na fase é executado um RELABEL, então

$$\Phi_2 \leq \Phi_1 + 1.$$

Número de fases (3)

Assim, como

- no início de cada iteração $\Phi \geq 0$;
- no início da primeira iteração $\Phi \geq n$;
- no início da última iteração $\Phi = 0$; e
- RELABEL é executado $< 2n^2$

então, o número de fases é

$$< n + 2n^2 + n + 2n^2 = 4n^2 + 2n.$$

Número de não-saturantes push

Fato 4. Um PUSH não-saturante é executado $< 4n^3 + 2n^2$.

Demonstração (rascunho):
Temos que

- cada nó é submetido ao algoritmo NODE-EXAMINATION no máximo uma vez durante cada fase e
- cada NODE-EXAMINATION executa no máximo um PUSH não-saturante.

Logo, o número total de não-saturantes PUSH é

$$< n(4n^2 + 2n) = 4n^3 + 2n^2.$$

Consumo de tempo

Algoritmo	número máximo de execuções	consumo total de tempo
RELABEL	$< 2n^2$	$\mathrm{O}(n^2)$
PUSH saturante	$< nm$	$\mathrm{O}(nm)$
PUSH não-saturante	$< 4n^3 + 2n^2$	$\mathrm{O}(n^3)$

O consumo de tempo do algoritmo FIFO-PREFLOW-PUSH é $\mathrm{O}(n^3)$.

Highest-label preflow-push

Pré-processamento

Observação: no início da primeira iteração dos algoritmos preflow-push basta que z seja um 1-potencial em $(N, A_{\check{x}})$.

PRÉ-PROCESSAMENTO $()$

1 $\quad \check{x} \leftarrow 0$

2 $\quad e \leftarrow 0$

3 $\quad$ **para cada** sj em $A(s)$ **faça**

4 $\quad\quad \check{x}(sj) \leftarrow u(sj)$

5 $\quad\quad \check{x}(sj) \leftarrow -u(sj)$

6 $\quad\quad e(j) \leftarrow e(j) + u(sj)$

7 $\quad\quad e(s) \leftarrow e(s) - u(sj)$

8 $\quad$ **para cada** i em N **faça**

9 $\quad\quad z(i) \leftarrow n$

10 $\quad z(s) \leftarrow 0$

Highest-label preflow-push

HIGHEST-LABEL-PREFLOW-PUSH $()$

```
 0   PRÉ-PROCESSAMENTO()
 1   L ← ⟨⟩      ▷ L funciona como uma fila
 2   para cada j em N − {t} faça
 3         se e(j) > 0
 4               então acrescente j a L
 5   enquanto L ≠ ⟨⟩ faça
 6         seja i um nó em L tal que z(i) é mínimo
 6         seja i um nó em L tal que h(i) é máximo
 7         retire i de L
 8         NODE-EXAMINATION(i)
 9   x ← FLUXO(x̆)
10   devolva x
```

Node-Examination

NODE-EXAMINATION (i)

1 $A' \leftarrow A(i)$
2 **enquanto** $e(i) > 0$ e $A' \neq \emptyset$ **faça**
3 retire uma arco ij de A'
4 **se** $\check{x}(ij) < u(ij)$ e ij é justo
5 **então** PUSH(ij)
6 **se** $e(i) > 0$
7 **então** RELABEL(i)

Push

PUSH (ij)

1 $\delta \leftarrow \min\{e(i), u(ij) - \check{x}(ij))\}$

2 $\check{x}(ij) \leftarrow \check{x}(ij) + \delta$

3 $\check{x}(ji) \leftarrow \check{x}(ji) - \delta$

4 $e(i) \leftarrow e(i) - \delta$

5 $e(j) \leftarrow e(j) + \delta$

6 **se** $e(j) > 0$ e $j \notin L$ e $j \neq t$

7 **então** acrescente j a L

Relabel

RELABEL (i)
1 $z(i) \leftarrow z(i) - 1$ $\triangleright$ $z(i)$ decresce
2 acrescente i a L

RELABEL (i)
1 $h(i) \leftarrow h(i) + 1$ $\triangleright$ $h(i)$ cresce
2 acrescente i a L

Consumo de tempo: $\mathrm{O}(1)$

Invariantes

Na linha 5, antes do "**enquanto** $L \neq \langle\rangle$ ..." vale que

(i1) $x = \text{FLUXO}(\check{x})$ é um pré-fluxo com fonte s;

(i2) $e(i) = \check{x}(\bar{i}, i) - \check{x}(i, \bar{i})$ para cada i em N;

(i3) x respeita u;

(i4) z é um 1-potencial em $(N, A_{\check{x}})$;

(i5) $z(t) - z(s) = n$;

(i6) $z(t) - z(i) \geq 0$ para todo i;

(i7) se $e(j) > 0$ então existe um caminho de j a s em $(N, A_{\check{x}})$.

(i8) os nós em L são distintos dois a dois;

(i9) para todo nó j em $N - \{t\}$, $e(j) > 0$ se e só se j está em L.

Número de iterações

Fato 1. O algoritmo RELABEL é executado $< 2n^2$ vezes.

Fato 2. Um PUSH saturante é executado $\leq nm$.

Fato 3. Um PUSH saturante é executado $\leq 2n^3 + n$.

Demonstração (rascunho):
Entre duas execuções de um RELABEL os valores de z não mudam.

Cada PUSH não-saturante faz com que o nó i com $z(i)$ mínimo fique inativo ($e(i) = 0$).

Logo, há $< n$ PUSH não-saturantes entre duas execuções de um RELABEL há $< n$ e o número de PUSH não-saturantes é

$$< n(2n^2 + 1) = 2n^2 + n.$$

Consumo de tempo

Algoritmo	número máximo de execuções	consumo total de tempo
RELABEL	$< 2n^2$	$\mathrm{O}(n^2)$
PUSH saturante	$< nm$	$\mathrm{O}(nm)$
PUSH não-saturante	$< 2n^3 + n$	$\mathrm{O}(n^3)$

O consumo de tempo do algoritmo HIGHEST-LABEL-PREFLOW-PUSH é $\mathrm{O}(n^3)$.

Pode-se mostra que o consumo de tempo do algoritmo HIGHEST-LABEL-PREFLOW-PUSH é $\mathrm{O}(n^2 m^{1/2})$.

Excess Scaling preflow-push

Excess-scaling

Idéia: fazer com que cada PUSH não-saturante envie uma quantidade "suficientemente grande" de fluxo e assim o número de PUSH não-saturantes será "suficientemente pequeno".

Em cada iteração do algoritmo temos um pararâmetro Δ que satisfaz

$$\max\{e(i) : i \neq t\} \leq \Delta.$$

Um nó i tem um excesso grande se $e(i) \geq \Delta/2$.

O algoritmo faz PUSH(ij) apenas se i tem excesso grande. Isto garante que em um PUSH não-saturante o algoritmo envia uma quantidade de fluxo relativamente grande.

Push modificado

PUSH (ij)

1 $\quad \delta \leftarrow \min\{e(i), u(ij) - \check{x}(ij), \Delta - e(j))\}$

2 $\quad \check{x}(ij) \leftarrow \check{x}(ij) + \delta$

3 $\quad \check{x}(ji) \leftarrow \check{x}(ji) - \delta$

4 $\quad e(i) \leftarrow e(i) - \delta$

5 $\quad e(j) \leftarrow e(j) + \delta$

Consumo de tempo: $\mathrm{O}(1)$

A modificação na atribuição na linha 1 garante que $e(j) \leq \Delta$ para todo $j \neq t$.

Relabel (1)

RELABEL (i)
1 $z(i) \leftarrow z(i) - 1$ $\triangleright$ $z(i)$ decresce

RELABEL (i)
1 $h(i) \leftarrow h(i) + 1$ $\triangleright$ $h(i)$ cresce

Consumo de tempo: $\mathrm{O}(1)$

Excess-scaling preflow-push

EXCESS-SCALING-PREFLOW-PUSH ()

```
 0  PRÉ-PROCESSAMENTO()
 1  Δ ← 2^⌈lg U⌉
 2  enquanto Δ ≥ 1 faça
 3      se max{e(i) : i ≠ t} ≤ Δ/2 então Δ ← Δ/2
 4      senão
 5          seja i tal que e(i) ≥ Δ/2 e z(i) é máximo
 6          A(x̌) ← {ij ∈ A : x̌(ij) < u(ij)}
 7          se algum ij em A_x̌(i) é justo
 8              então PUSH(ij)
 9              senão RELABEL(i)
10  devolva FLUXO(x̌)
```

Número de fases

O valor de Δ permanece constante durante a execução do bloco de linhas 6–8.

Diremos que cada seqüência de execuções desse bloco de linhas é uma fase (= *scaling phase*).

O fim de cada fase é marcado pela execução da linha 9, onde $\Delta' := \Delta/2$ assume o papel de Δ na próxima fase.

Conclusão: o número de fases é

$$\leq 1 + \lfloor \lg U \rfloor.$$

Consumo de tempo (1)

Fato 1. O algoritmo RELABEL é executado $< 2n^2$ vezes.

Fato 2. Um PUSH saturante é executado $\leq nm$.

Fato 3. Um PUSH não-saturante envia pelo menos $\Delta/2$ unidades de fluxo.

Demonstração (rascunho): Suponha que o algoritmo executou PUSH(ij) não-saturante.

Logo, $z(j) = z(i) + 1$.

Como, pela escolha de i na linha 6, $e(i) \geq \Delta/2$ e

$$z(i) \geq \max\{z(k) : k \neq t \text{ e } e(k) \geq \Delta/2\},$$

entao $e(j) < \Delta/2$. Como PUSH(ij) é não-saturante, então ele envia $\min\{e(i), \Delta - e(j)\} \geq \Delta/2$ unidades de fluxo.

Consumo de tempos (2)

Fato 4. Um PUSH não-saturante é executado $< 8n^2$ em cada fase e $< 8n^2(1 + \lfloor \lg U \rfloor)$ no total.

Demonstração (rascunho): Considere o valor de

$$\Phi := \sum \left((z(t) - z(i)) \frac{e(i)}{\Delta} : i \in N \text{ e } e(i) > 0 \right).$$

- (i6) $\Rightarrow \Phi \geq 0$ no início de cada iteração.
- No início de cada iteração

$$z(t) - z(i) < 2n$$

para todo nó i. Logo, como $\max\{e(i) : i \neq t\} < \Delta$, no início da primeira iteração de uma fase temos que

$$\Phi < 2n^2.$$

Consumo de tempo (3)

Sejam Φ_1 e Φ_2 o valor de Φ antes e depois do algoritmo executar um RELABEL ou um PUSH (na mesma fase).

Se o algoritmo executou um:

- RELABEL $\Rightarrow \Phi_2 \leq \Phi_1 + 1$.
- PUSH saturante $\Rightarrow \Phi_2 < \Phi_1$
- PUSH não-saturante $\Rightarrow \Phi_2 \leq \Phi_1 - 1/2$ (pelo Fato 3)

Como no início da última iteração da fase $\Phi \geq 0$, então o número de execuções de um PUSH não-saturante em cada fase é

$$< 2(2n^2 + 2n^2) = 8n^2.$$

Portanto, o algoritmo executa um PUSH não-saturante

$$< 8n^2(1 + \lfloor \lg U \rfloor) \text{ vezes.}$$

Consumo de tempo

Algoritmo	número máximo de execuções	consumo total de tempo
RELABEL	$< 2n^2$	$\mathrm{O}(n^2)$
PUSH saturante	$< nm$	$\mathrm{O}(nm)$
PUSH não-saturante	$< 8n^2(1 + \lfloor \lg U \rfloor)$	$\mathrm{O}(n^2 \lg U)$

O consumo de tempo do algoritmo EXCESS-SCALING-PREFLOW-PUSH é $\mathrm{O}(nm + n^2 \lg U)$.

Resumão

Algoritmo	consumo de tempo
FORD-FULKERSON	$O(nmU)$
MAX-CAPACITY	$O(n^2 m \lg U)$
CAPACITY-SCALING	$O(m^2 \lg U)$
EDMONDS-KARP	$O(nm^2)$
DINITS	$O(n^2 m)$
Karzanov	$O(n^3)$
Sleator-Tarjan	$O(nm \log n)$
GENERIC-PREFLOW-PUSH	$O(n^2 m)$
FIFO-PREFLOW-PUSH	$O(n^3)$
HIGHEST-LABEL-PREFLOW-PUSH	$O(n^3)$ $(O(n^2 m^{1/2}))$
EXCESS-SCALING-PREFLOW-PUSH	$O(nm + n^2 \lg U)$