# AULA 17

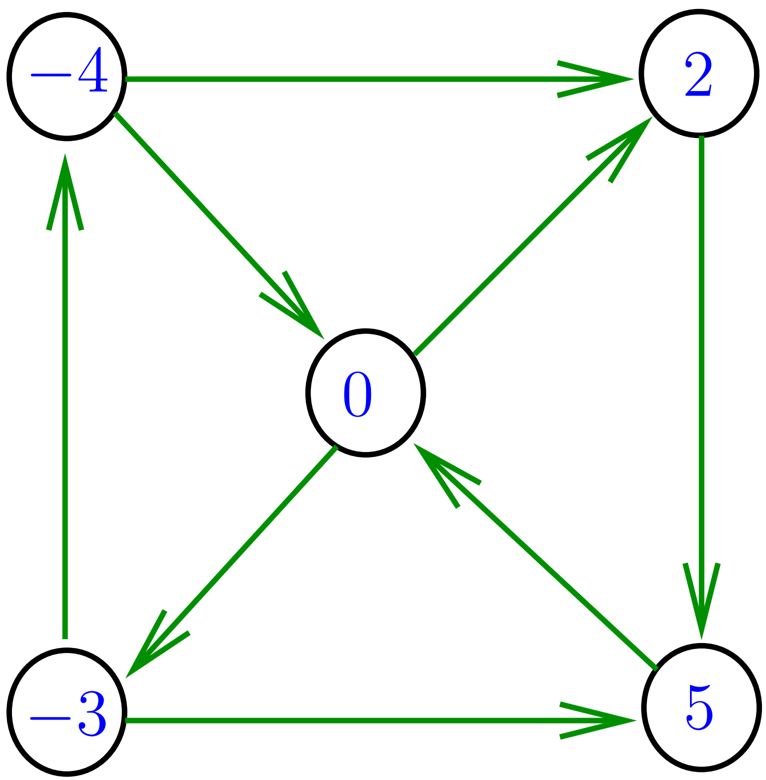
# Fluxo viável

PF 19.1, 19.2, 19.3, 19.4

# Função-demanda

Uma função-demanda em um grafo $(N, A)$ é qualquer função que associa um número inteiro $b(i)$ a cada nó $i$, ou seja, qualquer função

$$b : N \to \mathbb{Z} \ .$$



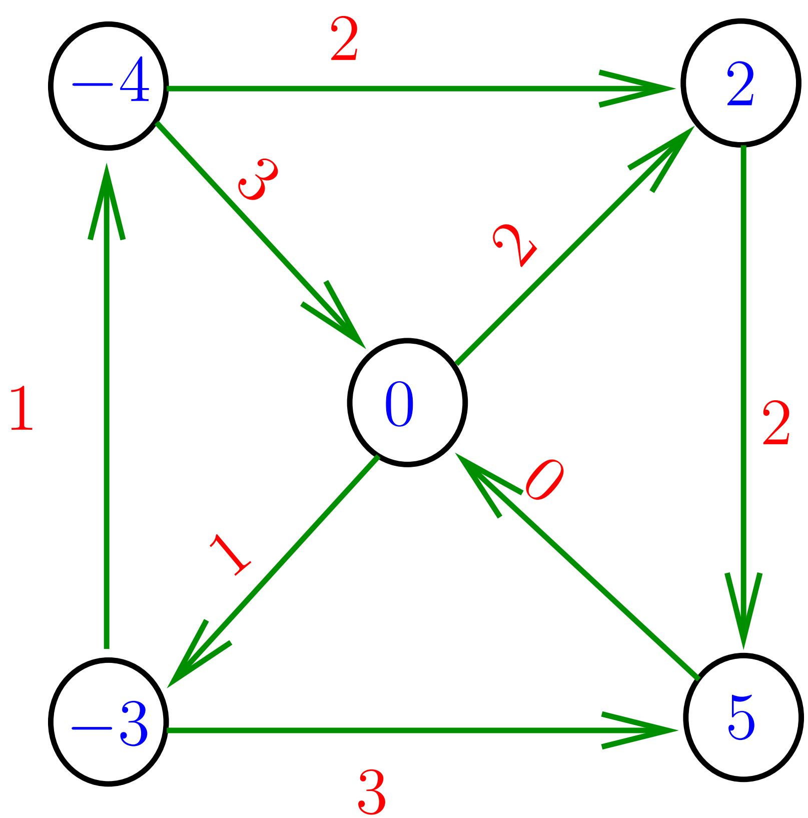
# Fluxos e demandas

Um fluxo é uma função de $N$ em $\mathbb{Z}_{\geq}$.

Um fluxo $x$ satisfaz uma função-demanda $b$ se, para cada no $i$,

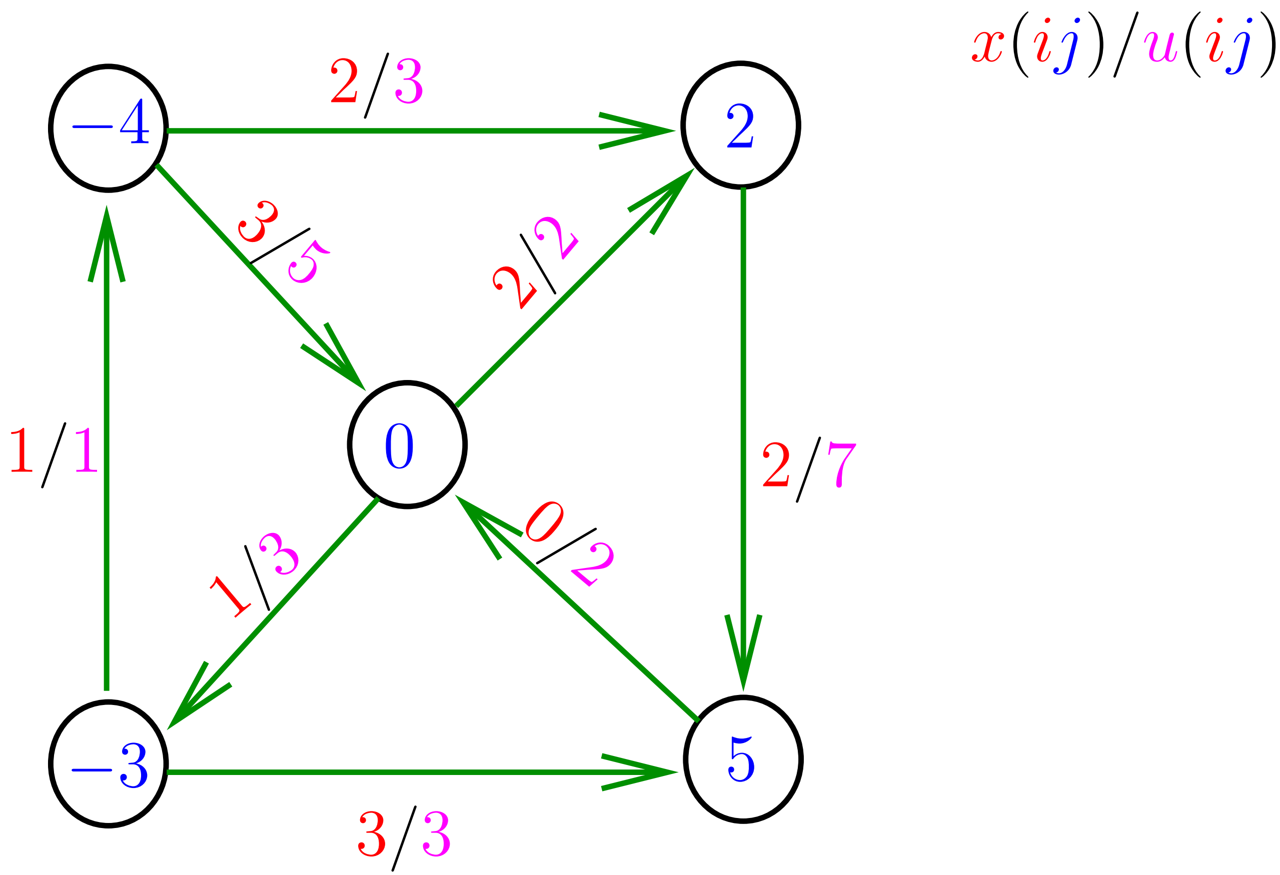
$$e(i) = x(\bar{i}, i) - x(i, \bar{i}) = b(i) \ .$$

$x(ij)$



# Problema do fluxo viável

Problema: Dada uma rede $(N, A, u, b)$ com função-capacidade $u$ e função-demanda $b$, encontrar um fluxo que satisfaça $b$ e respeite $u$.

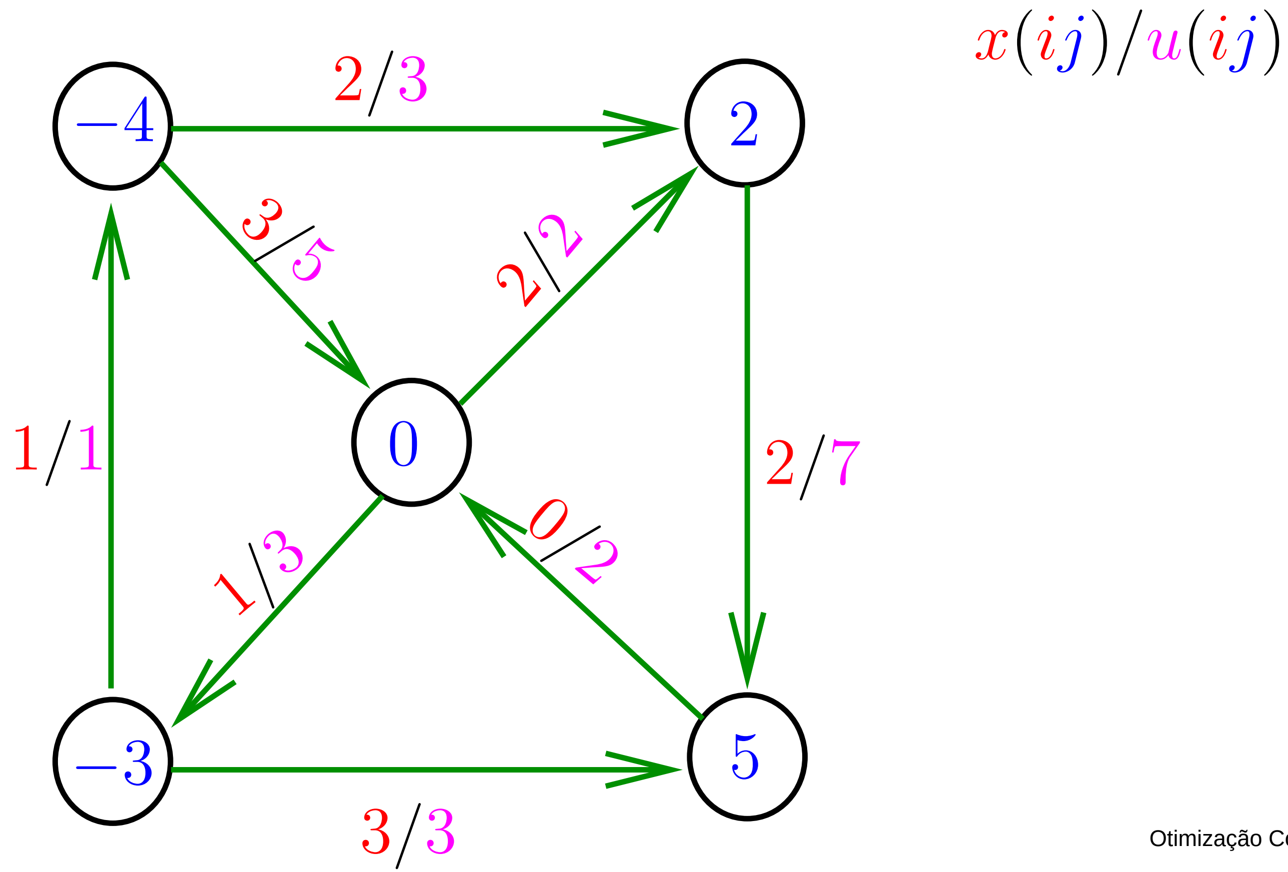


# Condição de viabilidade

Dada uma rede $(N, A, u, b)$ com função-capacidade $u$ e função-demanda $b$, se existe fluxo que satifaz $b$ e respeita $u$, então

$$-u(T, \overline{T}) \leq b(T) \leq u(\overline{T}, T) \ ,$$

para todo subconjunto $T$ de $N$.



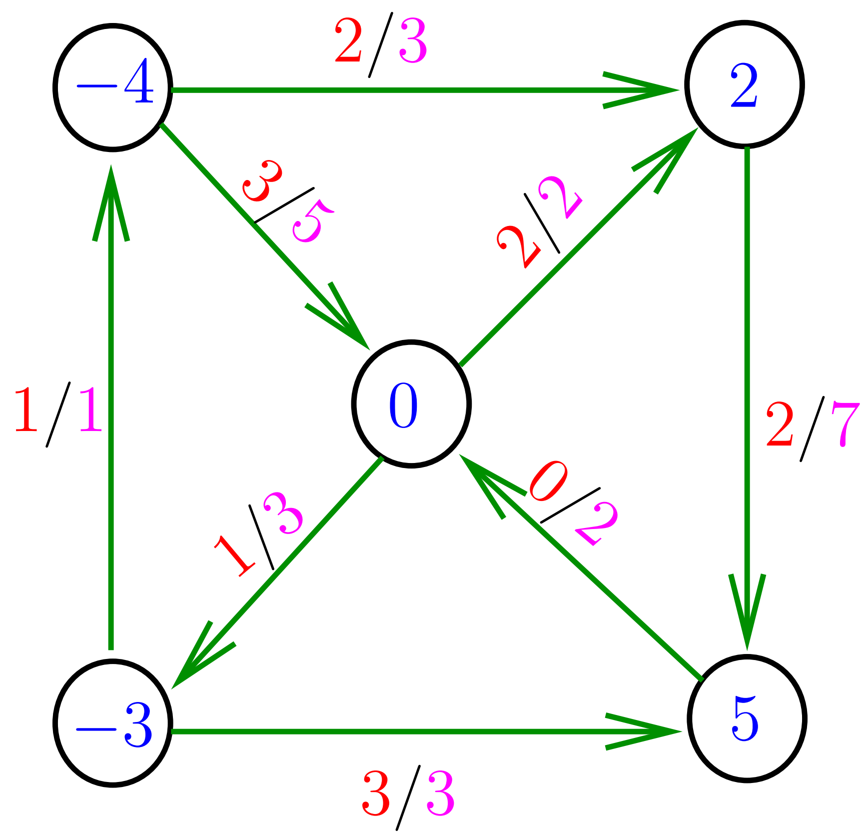
# Condição de viabilidade (equivalente)

Se existe fluxo que satifaz $b$ e respeita $u$, então

$$b(N) = 0 \quad \text{e} \quad b(T) \leq u(\overline{T}, T) \ ,$$

para todo subconjunto $T$ de $N$.

$x(ij)/u(ij)$

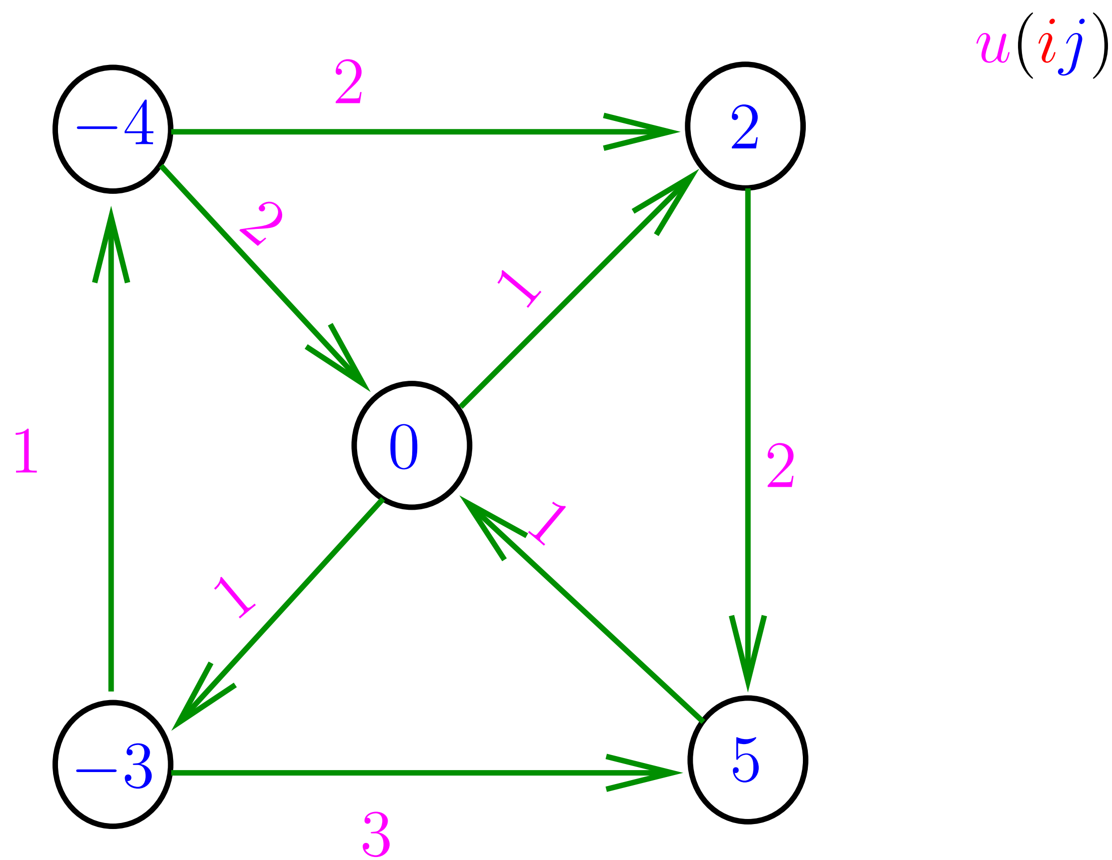


# Teorema de Gale

Se para todo subconjunto $\overline{T}$ de $N$,

$$-u(T,\overline{T}) \leq b(T) \leq u(\overline{T},T) \ ,$$

então existe fluxo que satifaz $b$ e respeita $u$.

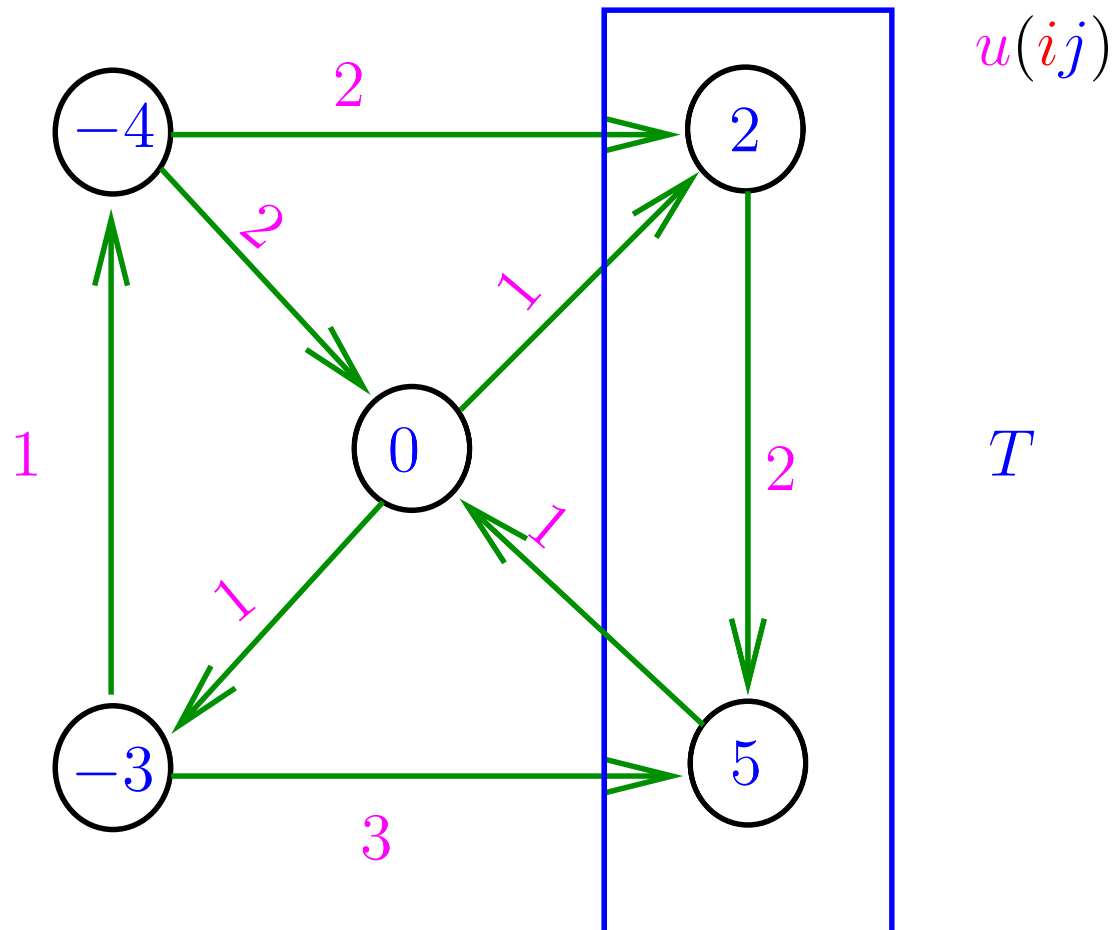


# Teorema de Gale

Se para todo subconjunto $\overline{T}$ de $N$,

$$-u(T,\overline{T}) \leq b(T) \leq u(\overline{T},T) \ ,$$

então existe fluxo que satifaz $b$ e respeita $u$.



# Algoritmo de fluxo viável

Recebe uma rede simétrica $(N, A, u, b)$ e devolve um fluxo viável $x$ ou um subconjunto $S$ de $N$ que viola a condição de Gale.

FLUXO-VIÁVEL $(N, A, u, b)$

```
se b(N) ≠ 0 então devolva N
x̌ ← 0    e ← 0

enquanto existe s em N tal que e(s) > b(s) faça
    A_x̌ ← {ij ∈ A : x̌(ij) < u(ij)}
    ⟨y, P⟩ ← CAMINHO(N, A_x̌, s)
    se existe t tal que y(t) = 0 e e(t) < b(t) então
        INCREMENTE-FLUXO-VIÁVEL(u, x̌, A_π, s, t)
    senão S ← {i : y(i) = 0}
        devolva S

x ← FLUXO(x̌)
devolva x
```

# Incremente fluxo viável

INCREMENTE-FLUXO-VIÁVEL $(u, \check{x}, A_\pi, s, t)$

Seja $P$ um caminho de $s$ a $t$ em $(N, A_\pi)$

$\delta_1 \leftarrow \min\{u(ij) - \check{x}(ij) : ij$ é arco de $P\}$

$\delta_2 \leftarrow \min\{e(s) - b(s), b(t) - e(t)\}$

$\delta \leftarrow \min\{\delta_1, \delta_2\}$

**para cada** arco $ij$ em $P$ **faça**

  $\check{x}(ij) \leftarrow \check{x}(ij) + \delta$

  $\check{x}(ji) \leftarrow \check{x}(ji) - \delta$

$e(s) \leftarrow e(s) - \delta$

$e(t) \leftarrow e(t) + \delta$

# Invariantes

Na linha 3 valem as seguintes invariantes:

(i1) $e(i) = x(\bar{i}, i) - x(i, \bar{i})$, para cada nó $i$;

(i2) $\sum_{i \in N} (b(i) - e(i)) = 0$;

(i3) $x$ respeita $u$.

# Consumo de tempo

O consumo de tempo do algoritmo é
FLUXO-VIÁVEL $O((n+m)nB)$.

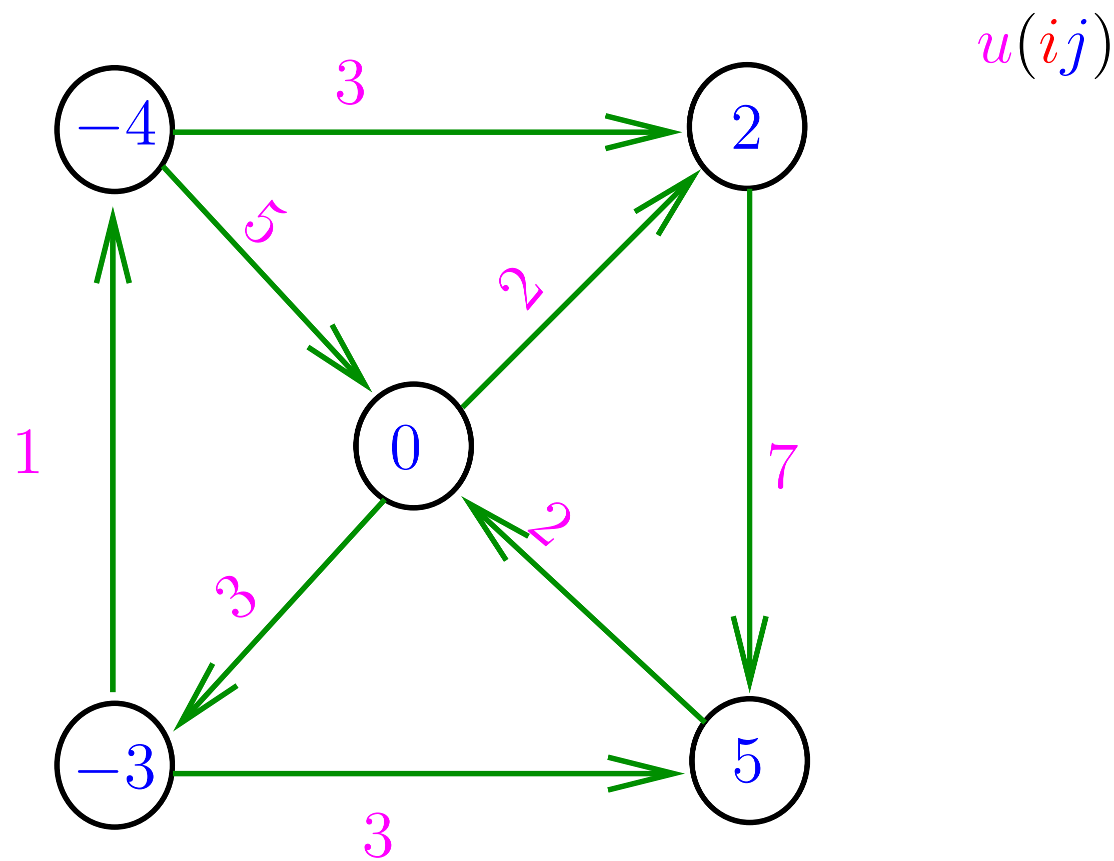
$B := \max\{|b(i)| : i \in N\}$

Este consumo de tempo não é polinomial.

Ele é pseudo-polinomial.

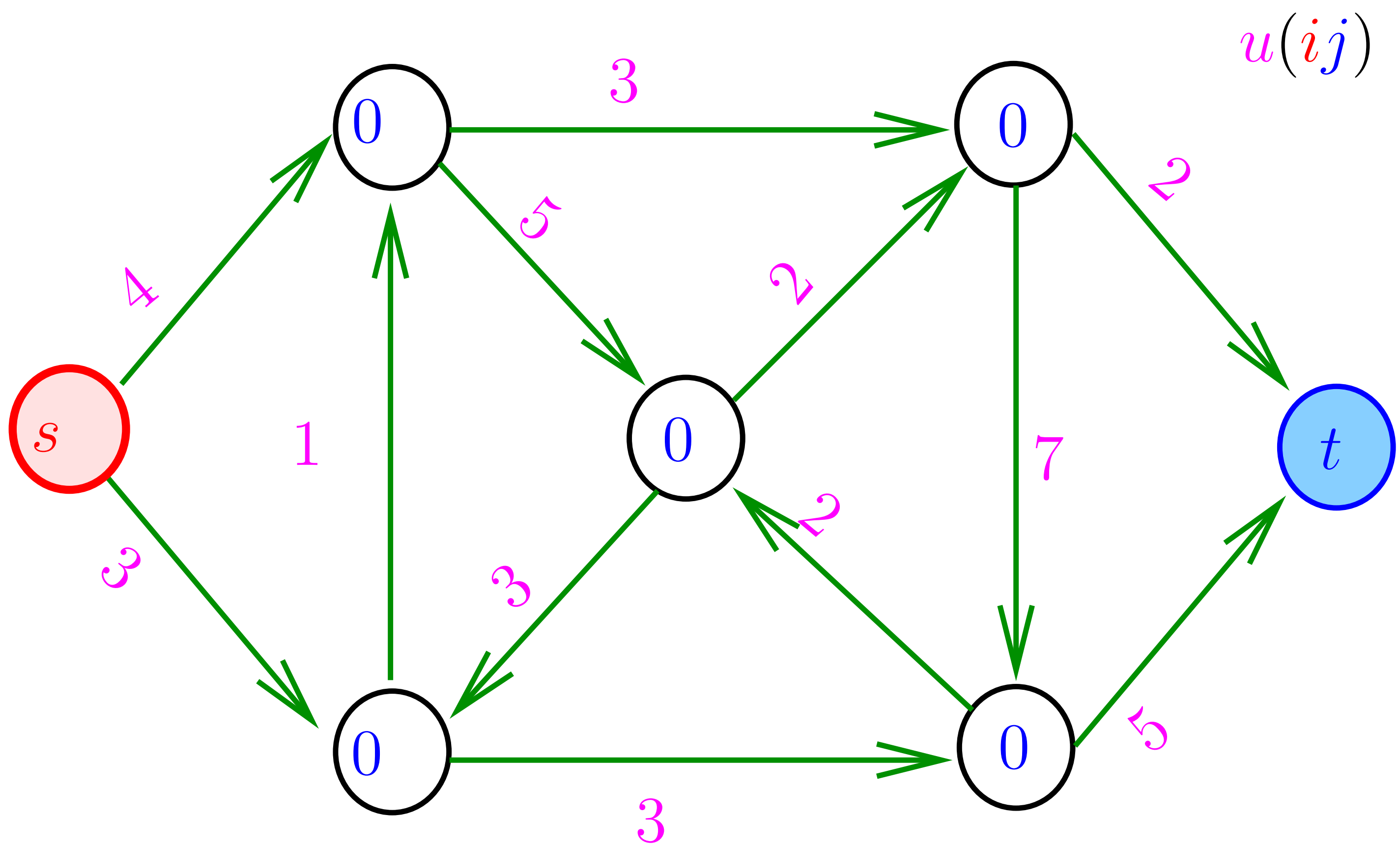
# Algoritmo fortemente polinomial

Um fluxo viável pode ser encontrado resolvendo-se um problema do fluxo máximo em uma rede auxiliar.



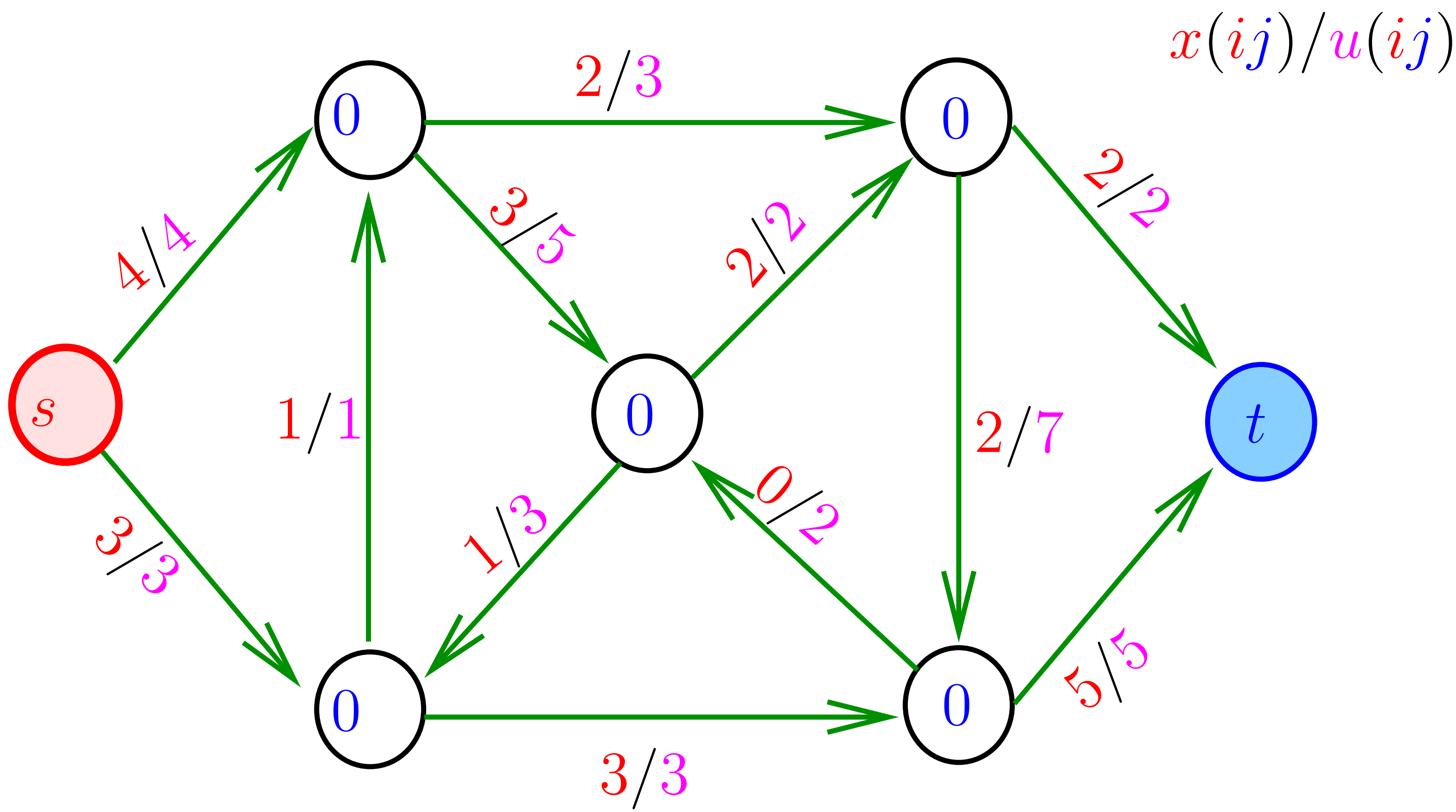
# Algoritmo fortemente polinomial

Um fluxo viável pode ser encontrado resolvendo-se um problema do fluxo máximo em uma rede auxiliar.



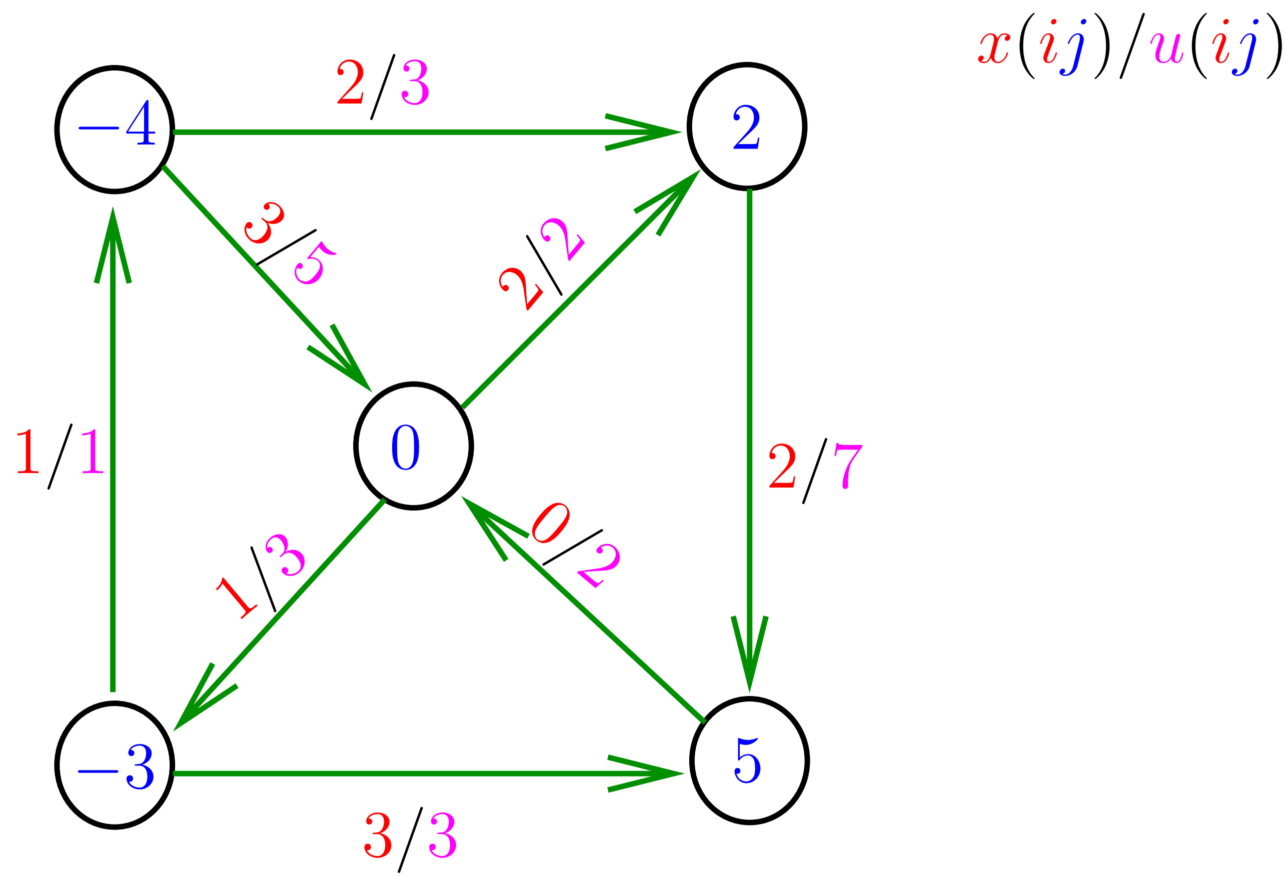
# Algoritmo fortemente polinomial

Um fluxo viável pode ser encontrado resolvendo-se um problema do fluxo máximo em uma rede auxiliar.



# Algoritmo fortemente polinomial

Um fluxo viável pode ser encontrado resolvendo-se um problema do fluxo máximo em uma rede auxiliar.



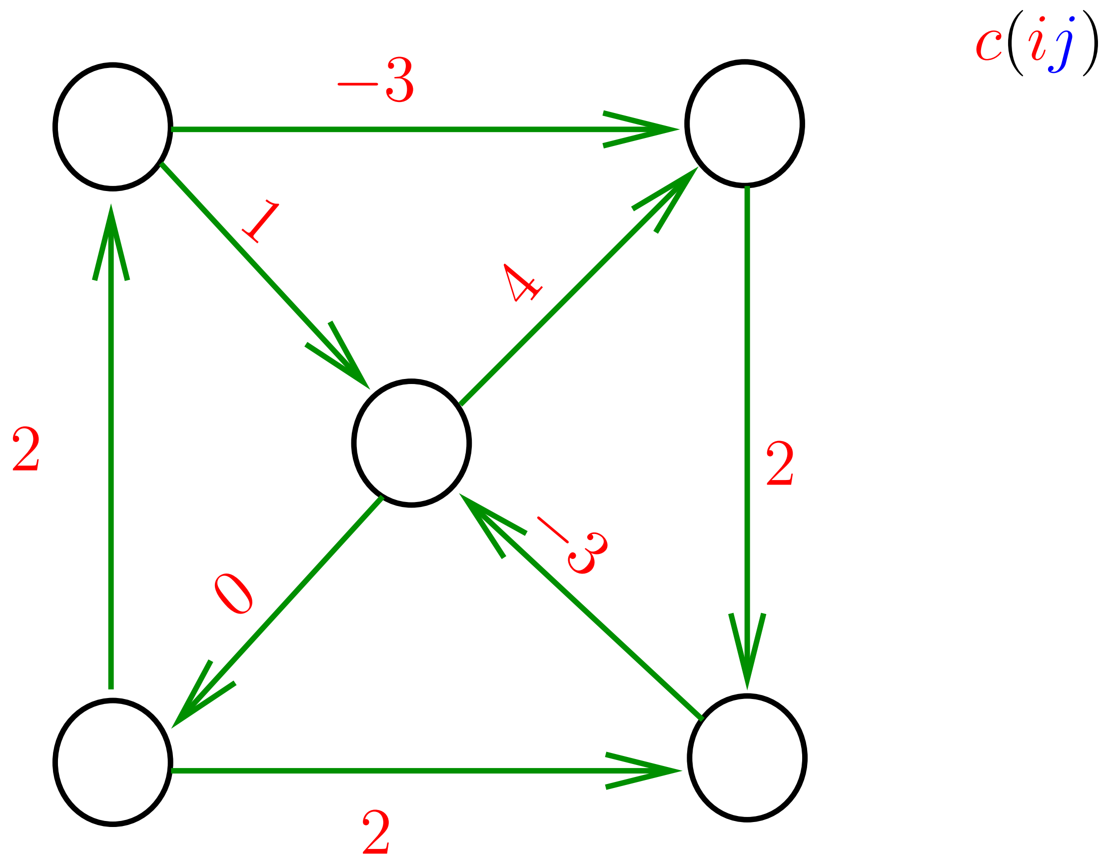
# Fluxo viável de custo mínimo

PF 20.1, 20.2, 20.3

# Função-custo

Uma função-custo em um grafo $(N, A)$ é qualquer função que associa um número inteiro $c(ij)$ a cada arco $ij$, ou seja, qualquer função

$$c : A \to \mathbb{Z} \, .$$



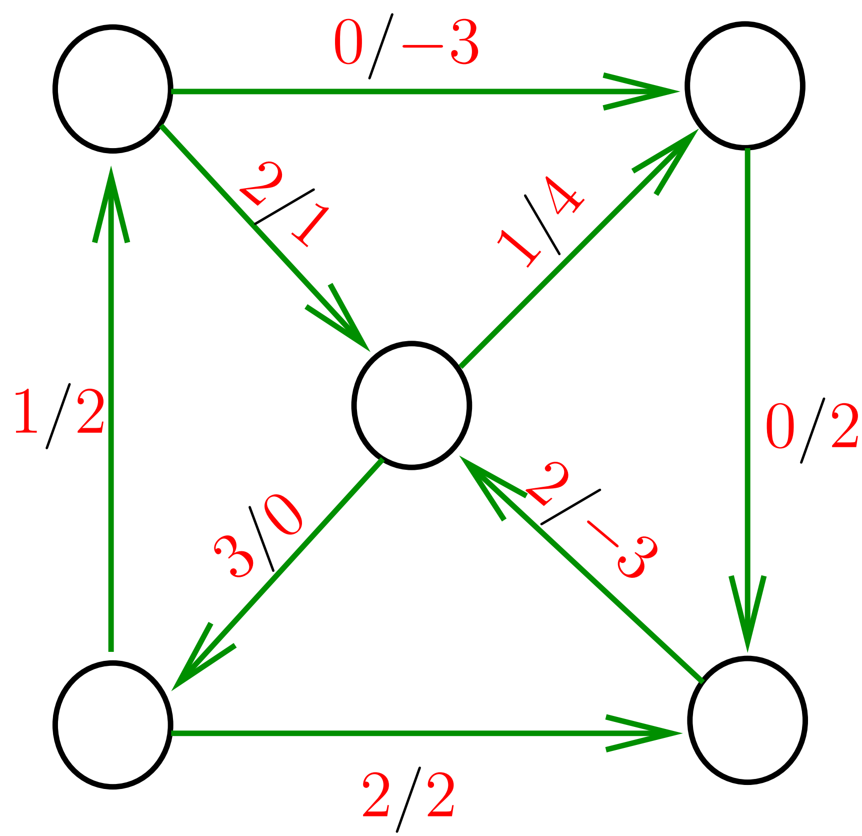
# Fluxos e custos

O custo de um fluxo $x$ é o número $i$,

$$cx := \sum (c(ij)x(ij) : ij \in A) \; .$$

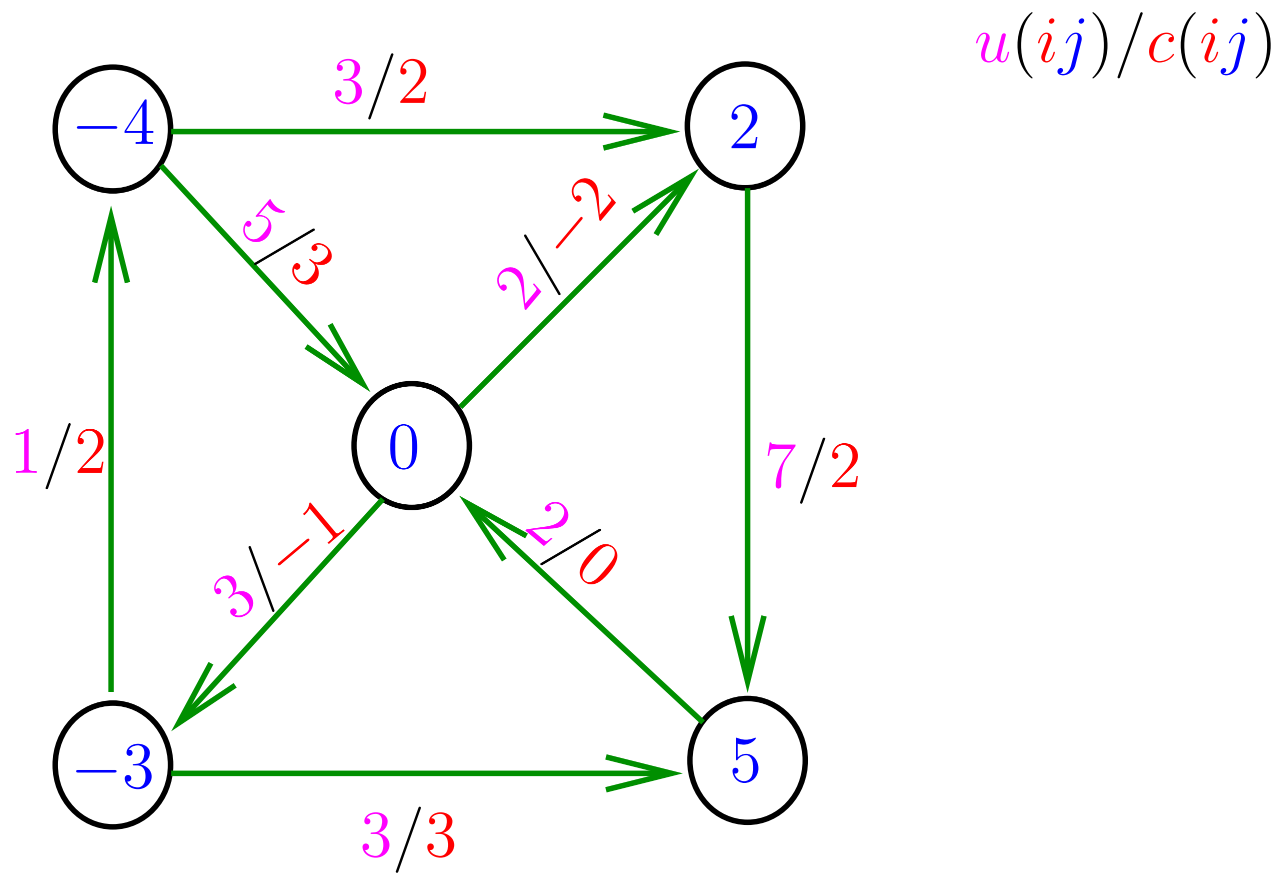
Exemplo: um fluxo de custo 2

$x(ij)/c(ij)$

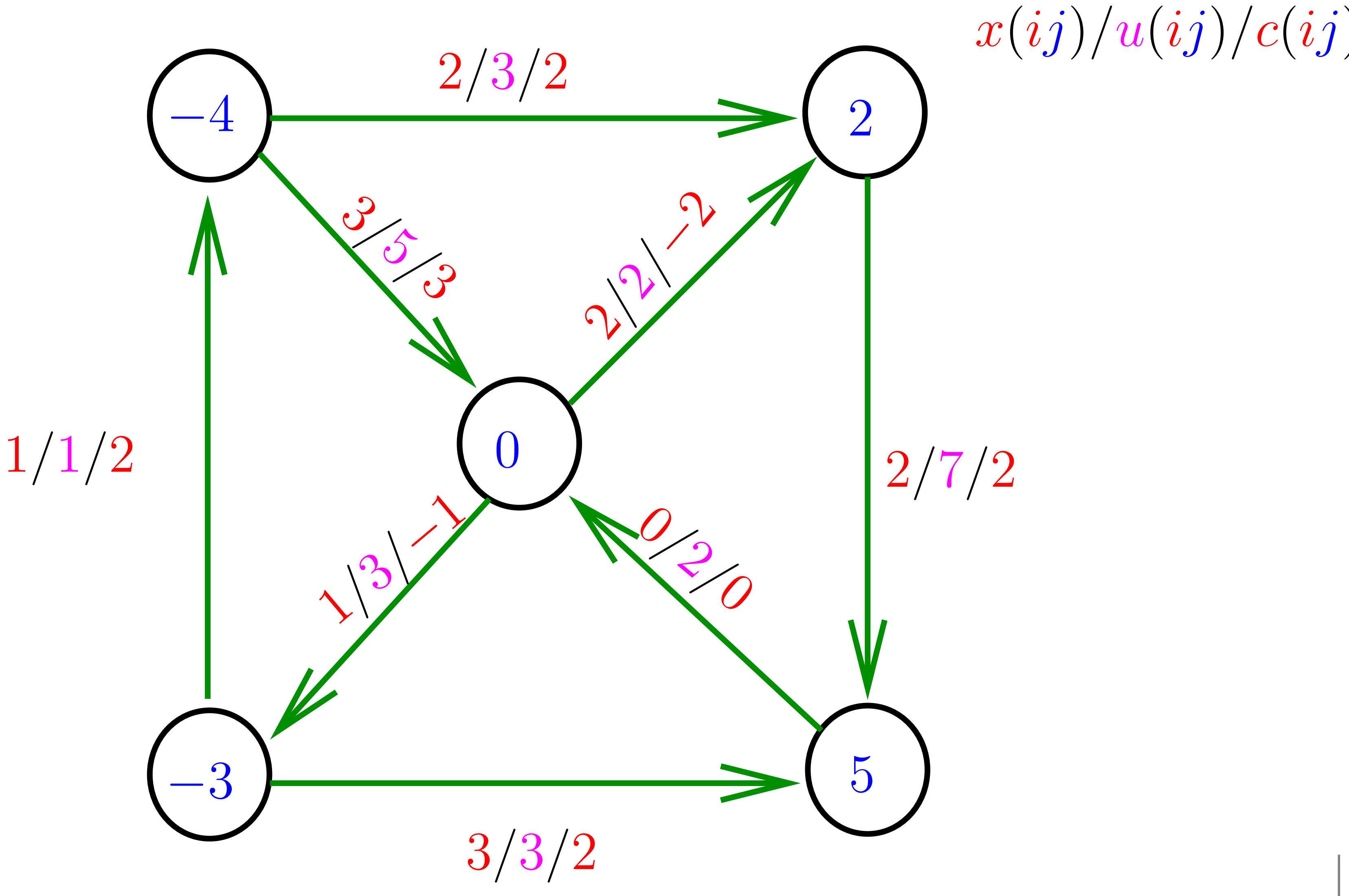


# Problema do fluxo viável de custo mínimo

Dada uma rede $(N, A, u, b, c)$ com função-capacidade $u$, função-demanda $b$ e função-custo $c$, encontrar um fluxo de custo mínimo que satisfaça $b$ e respeite $u$.



# É fluxo de custo mínimo?



# Lema da dualidade

Se $x$ é um fluxo viável então

$$cx \geq yb - wu.$$

para qualquer função-custo $w \geq 0$ e $(c + w)$-potencial $y$.

Chamaremos tal par $(y, w)$ de solução dual-viável.

Conseqüência. Se $x$ é um fluxo viável tal que $cx = yb - wu$ para alguma função-custo $w \geq 0$ e algum $(c + w)$-potencial $y$ então $x$ é um fluxo ótimo.

# Demonstração

$$
\begin{aligned}
yb &= \sum_{i} y(i)b(i) \\
&= \sum_{i} y(i)(x(\bar{i}, i) - x(i, \bar{i})) \\
&= \sum_{j} y(j)x(\bar{i}, i) - \sum_{i} y(i)x(ij) \\
&= \sum_{ij} y(j)x(ij) - \sum_{ij} y(i)x(ij) \\
&= \sum_{ij} (y(j) - y(i))x(ij) \\
&\leq \sum_{ij} (c(ij) + w(ij))x(ij) \\
&= (c + w)x \quad \leq \quad cx + wu\ .
\end{aligned}
$$

# Folgas complementares (1)

Seja $x$ um fluxo que respeita $u$.

Seja $y$ um potencial.

Diremos que as folgas de $x$ e $y$ são complementares se, para cada arco $ij$,

$$x(ij) > 0 \Rightarrow y(j) - y(i) \geq c(ij) \quad \text{e}$$
$$x(ij) < u(ij) \Rightarrow y(j) - y(i) \leq c(ij) \; .$$

# Folgas complementares (2)

Seja $x$ um fluxo que respeita $u$.

Seja $y$ um potencial.

Diremos que as folgas de $x$ e $y$ são complementares se, para cada arco $ij$,

$$y(j) - y(i) < c(ij) \Rightarrow x(ij) = 0 \quad \text{e}$$

$$y(j) - y(i) > c(ij) \Rightarrow x(ij) = u(ij) \ .$$