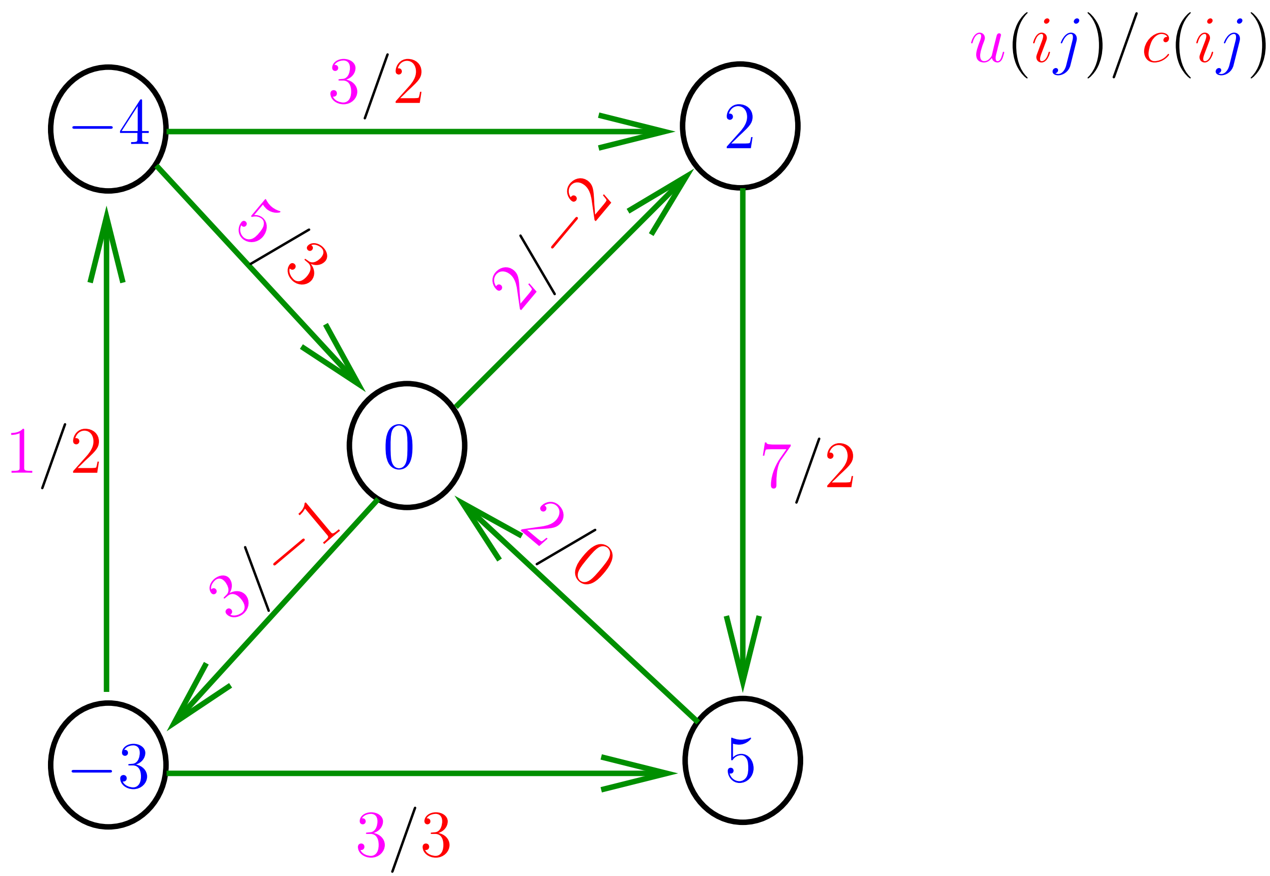
Melhores momentos

AULA PASSADA

Problema do fluxo viável de custo mínimo

Dada uma rede (N, A, u, b, c) com função-capacidade u, função-demanda b e função-custo c, encontrar um fluxo de custo mínimo que satisfaça b e respeite u.



Lema da dualidade

Se x é um fluxo viável então

$$cx \geq yb - wu.$$

para qualquer função-custo $w \geq 0$ e $(c + w)$-potencial y.

Chamaremos tal par (y, w) de solução dual-viável.

Conseqüência. Se x é um fluxo viável tal que $cx = yb - wu$ para alguma função-custo $w \geq 0$ e algum $(c + w)$-potencial y então x é um fluxo ótimo.

Folgas complementares (1)

Seja x um fluxo que respeita u.

Seja y um potencial.

Diremos que as folgas de x e y são complementares se, para cada arco ij,

$$x(ij) > 0 \Rightarrow y(j) - y(i) \geq c(ij) \quad \text{e}$$
$$x(ij) < u(ij) \Rightarrow y(j) - y(i) \leq c(ij) \; .$$

Fato. Se x é um fluxo viável e suas folgas são complementares às de algum potencial y então x é ótimo.

Folgas complementares (2)

Seja x um fluxo que respeita u.

Seja y um potencial.

Diremos que as folgas de x e y são complementares se, para cada arco ij,

$$y(j) - y(i) < c(ij) \Rightarrow x(ij) = 0 \quad \text{e}$$
$$y(j) - y(i) > c(ij) \Rightarrow x(ij) = u(ij) \ .$$

Fato. Se x é um fluxo viável e suas folgas são complementares às de algum potencial y então x é ótimo.

Fluxo viável de custo mínimo

Problema do fluxo viável de custo mínimo:

Dados

- uma matriz de incidências M de um grafo (N, A),
- uma função-demanda b ($N \to \mathbb{Z}$)
- uma função-custo c ($A \to \mathbb{Z}$) e
- uma função-capacidade u ($A \to \mathbb{Z}_{\geq}$)

encontrar um vetor x indexado por A que

$$
\begin{array}{rrcll}
\text{minimize} & cx & & & \\
\text{sob as restrições} & Mx & = & b & \\
& x(ij) & \leq & u(ij) & \text{para cada } ij \text{ em } A \\
& x(ij) & \geq & 0 & \text{para cada } ij \text{ em } A.
\end{array}
$$

Problema dual

O correspondente problema dual é: encontrar vetores y indexado por N e w indexado por A que

$$
\begin{array}{rrcll}
\text{maximize} & yb - wu & & & \\
\text{sob as restrições} & y(j) - y(i) + w(ij) & \geq & c(ij) & \text{para } ij \in A, \\
 & w(ij) & \geq & 0 & \text{para } ij \in A.
\end{array}
$$

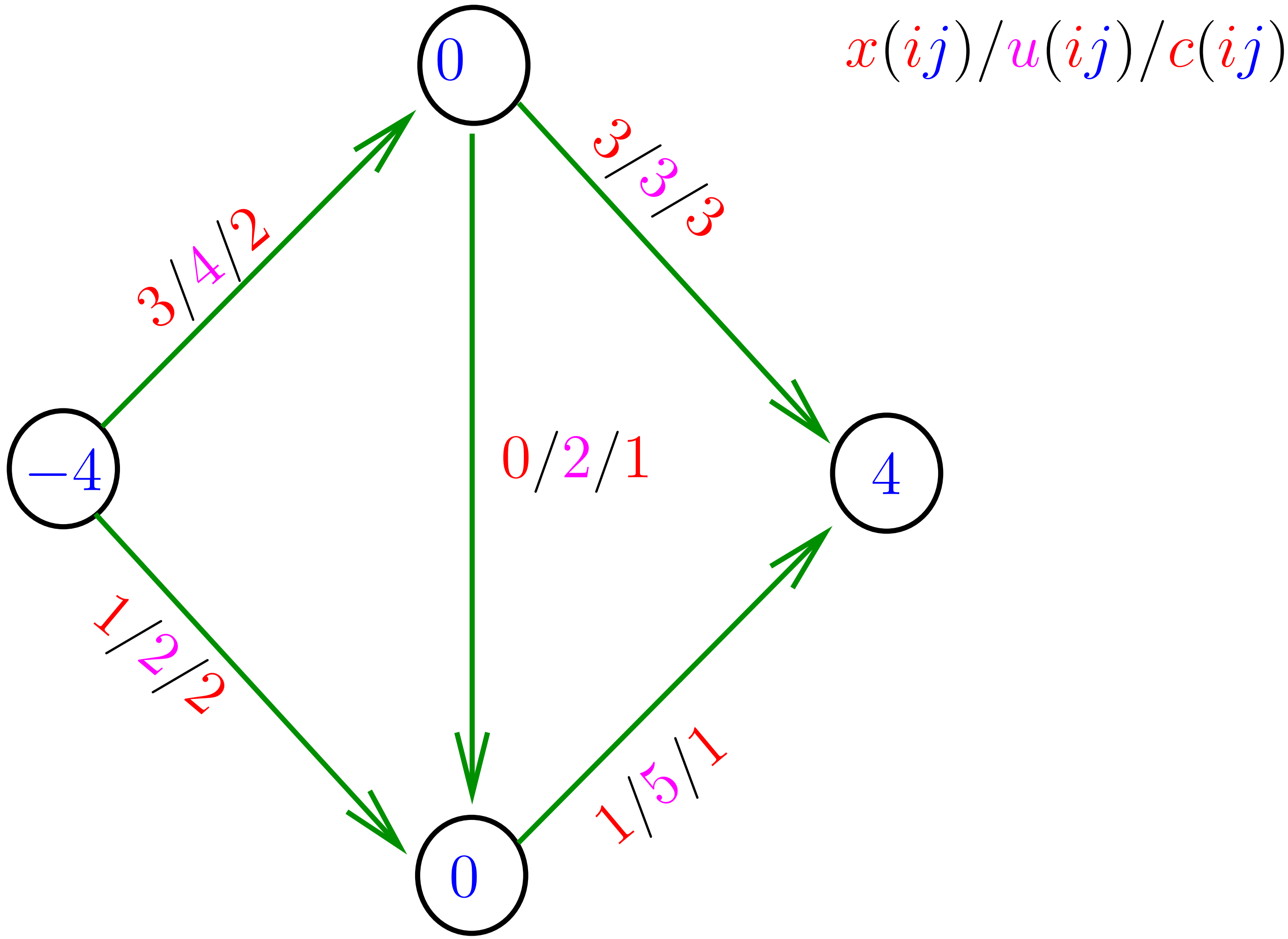
AULA 19

Algoritmo de Klein

PF 22.1, 22.2, 22.3

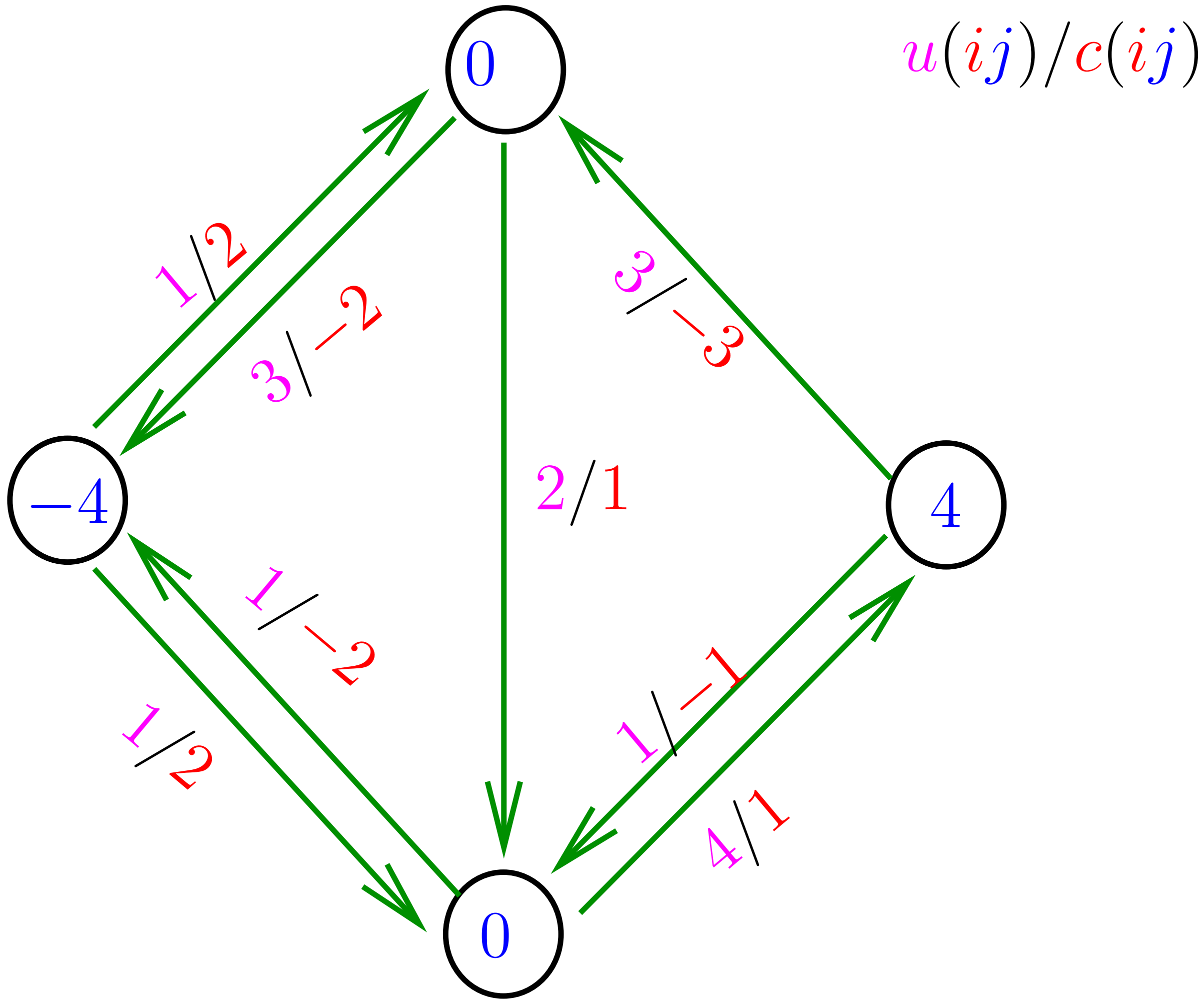
Cycle Cancelling Algorithm

É fluxo de custo mínimo?

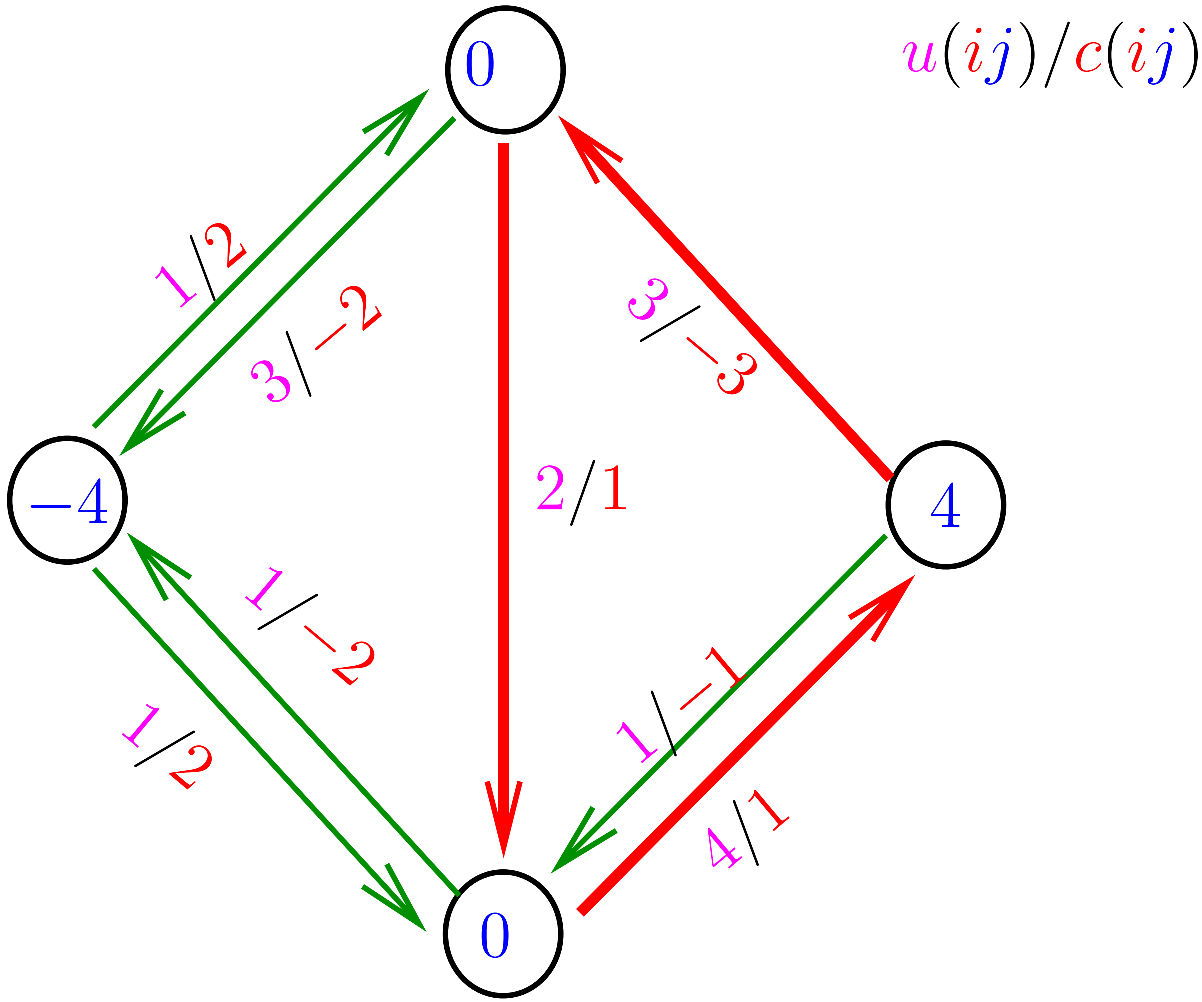


Custo $= 3 \times 2 + 1 \times 2 + 0 \times 1 + 3 \times 3 + 1 \times 1 = 18$

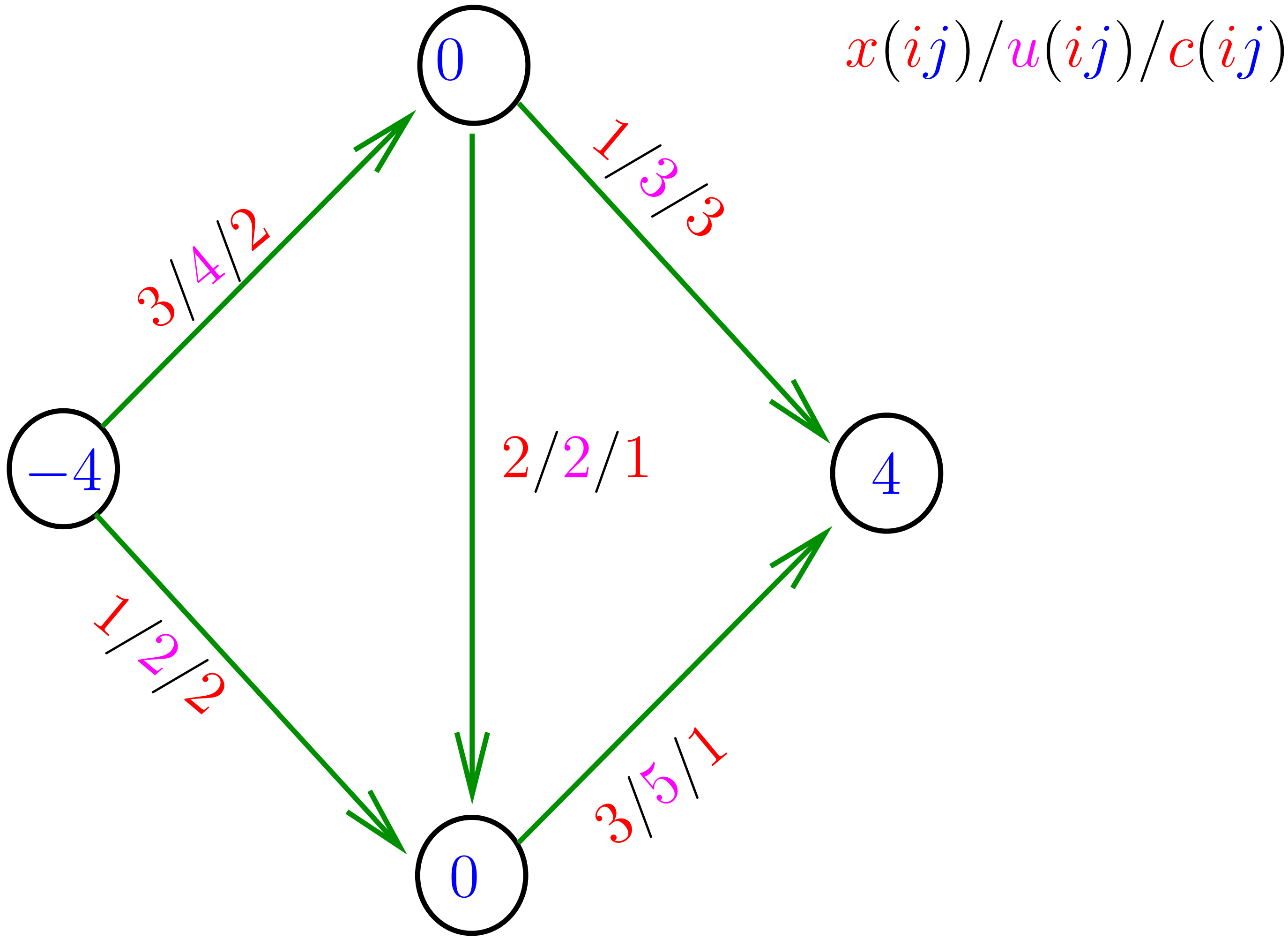
Rede residual



Ciclo negativo

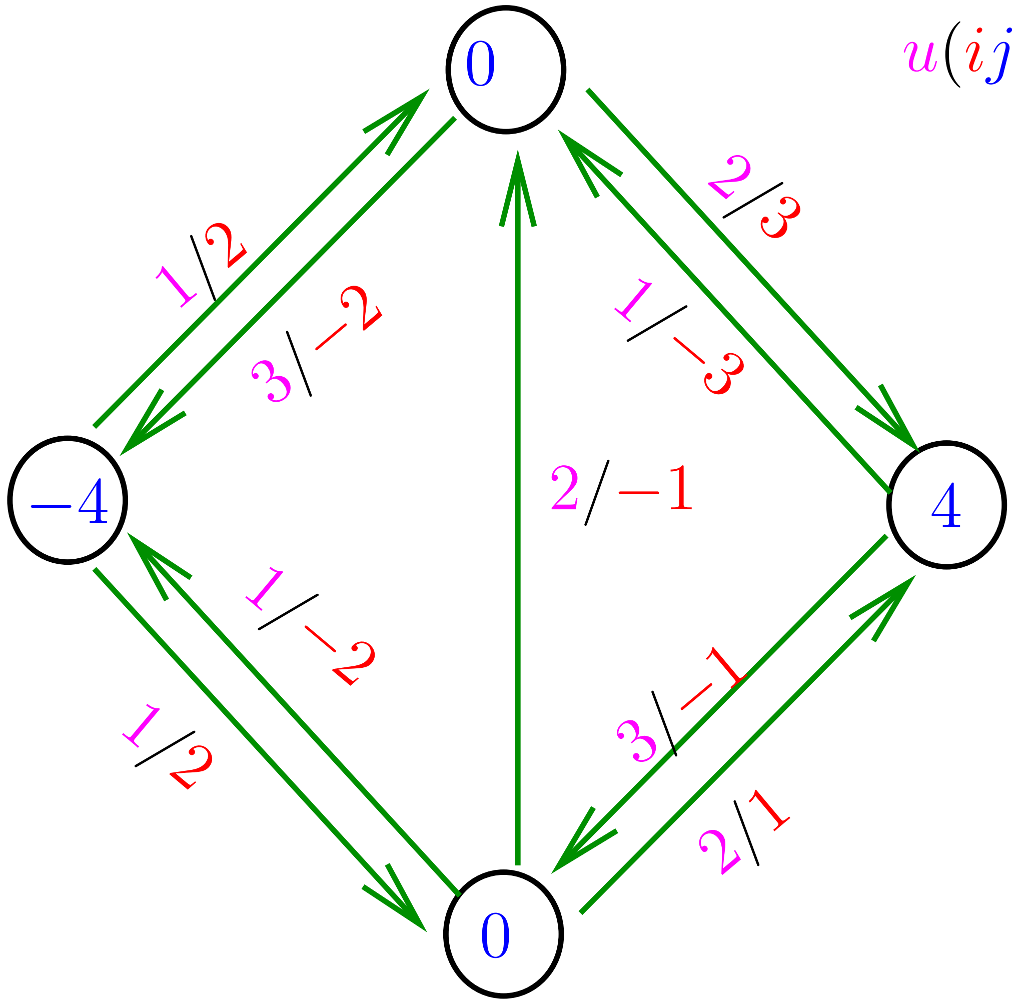


É fluxo de custo mínimo?



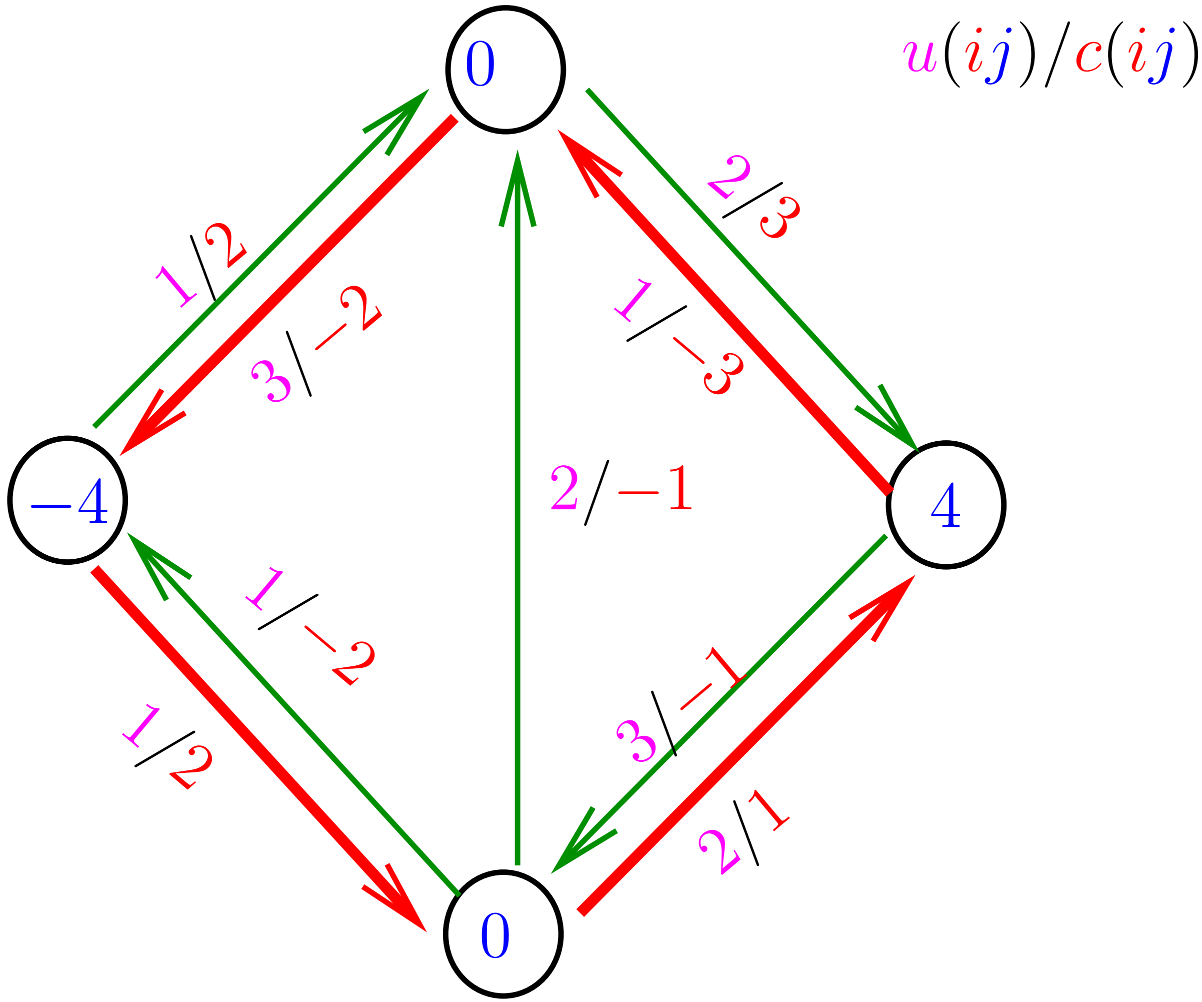
Custo $= 3 \times 2 + 1 \times 2 + 2 \times 1 + 1 \times 3 + 3 \times 1 = 16$

Rede residual

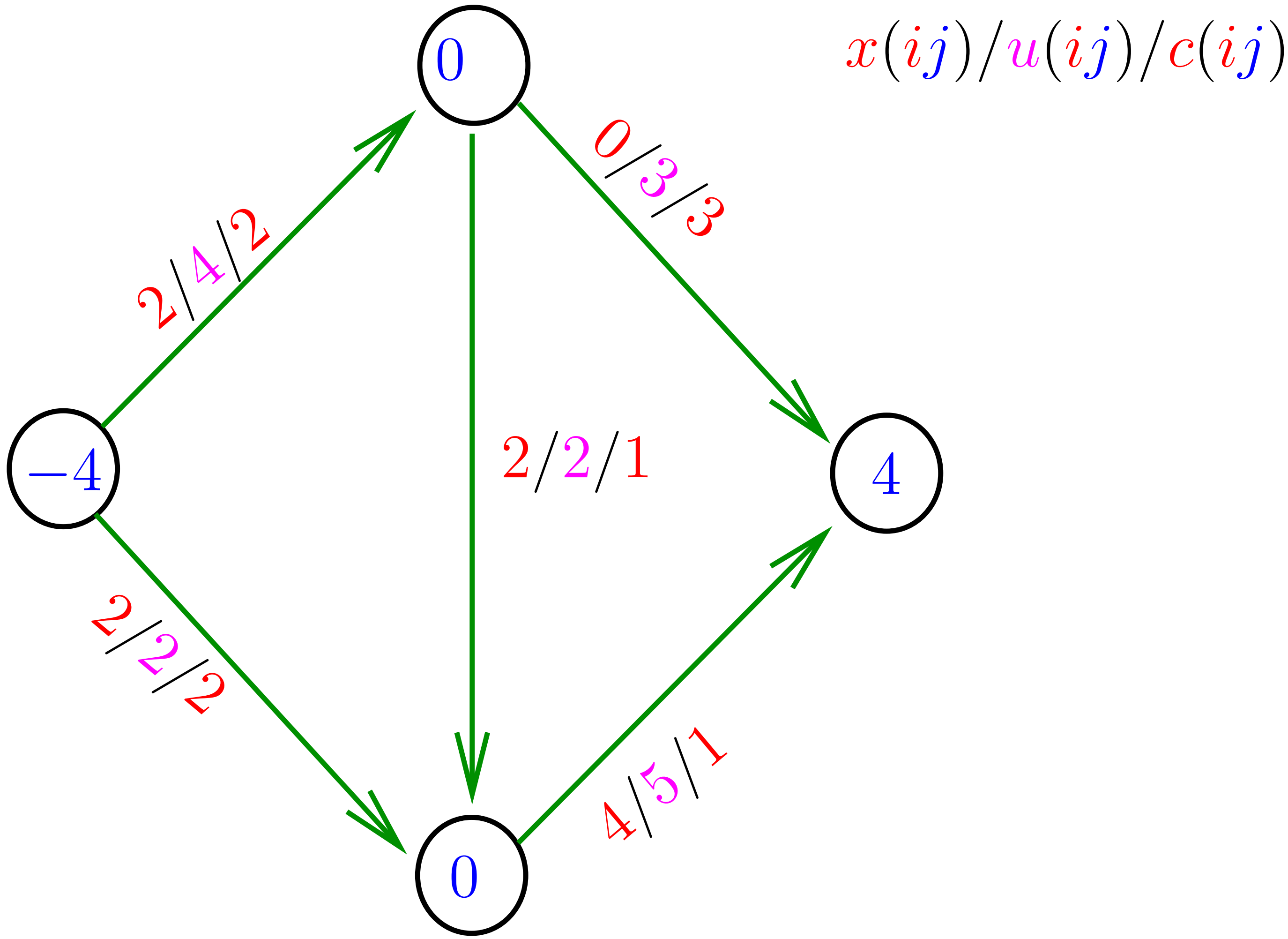


$u(ij)/c(ij)$

Rede residual

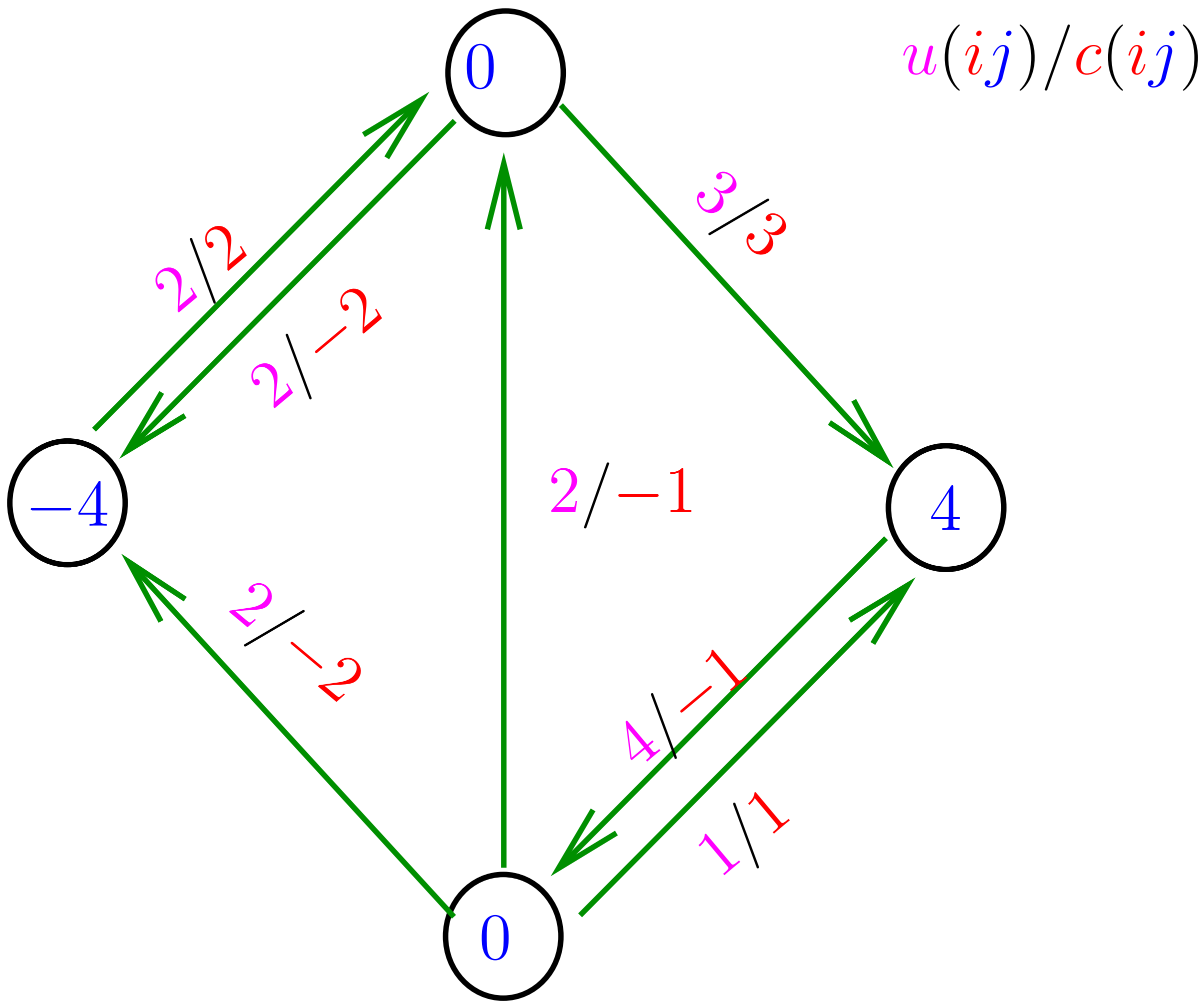


É fluxo de custo mínimo?

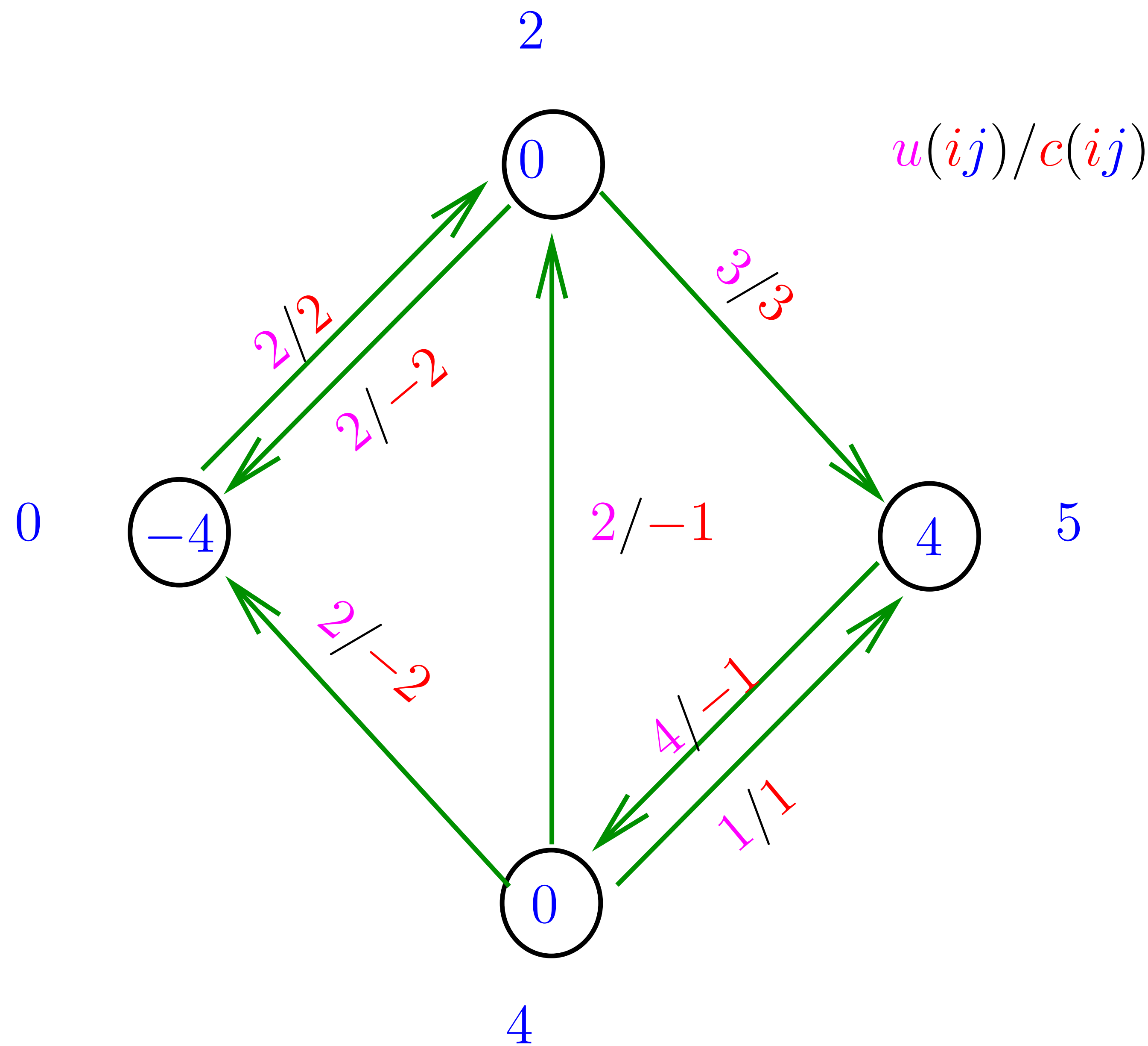


Custo $= 2 \times 2 + 2 \times 2 + 2 \times 1 + 0 \times 3 + 4 \times 1 = 14$

Rede residual



Potencial



Folgas complementares

Seja x o fluxo encontrado.

Seja y o potencial encontrado.

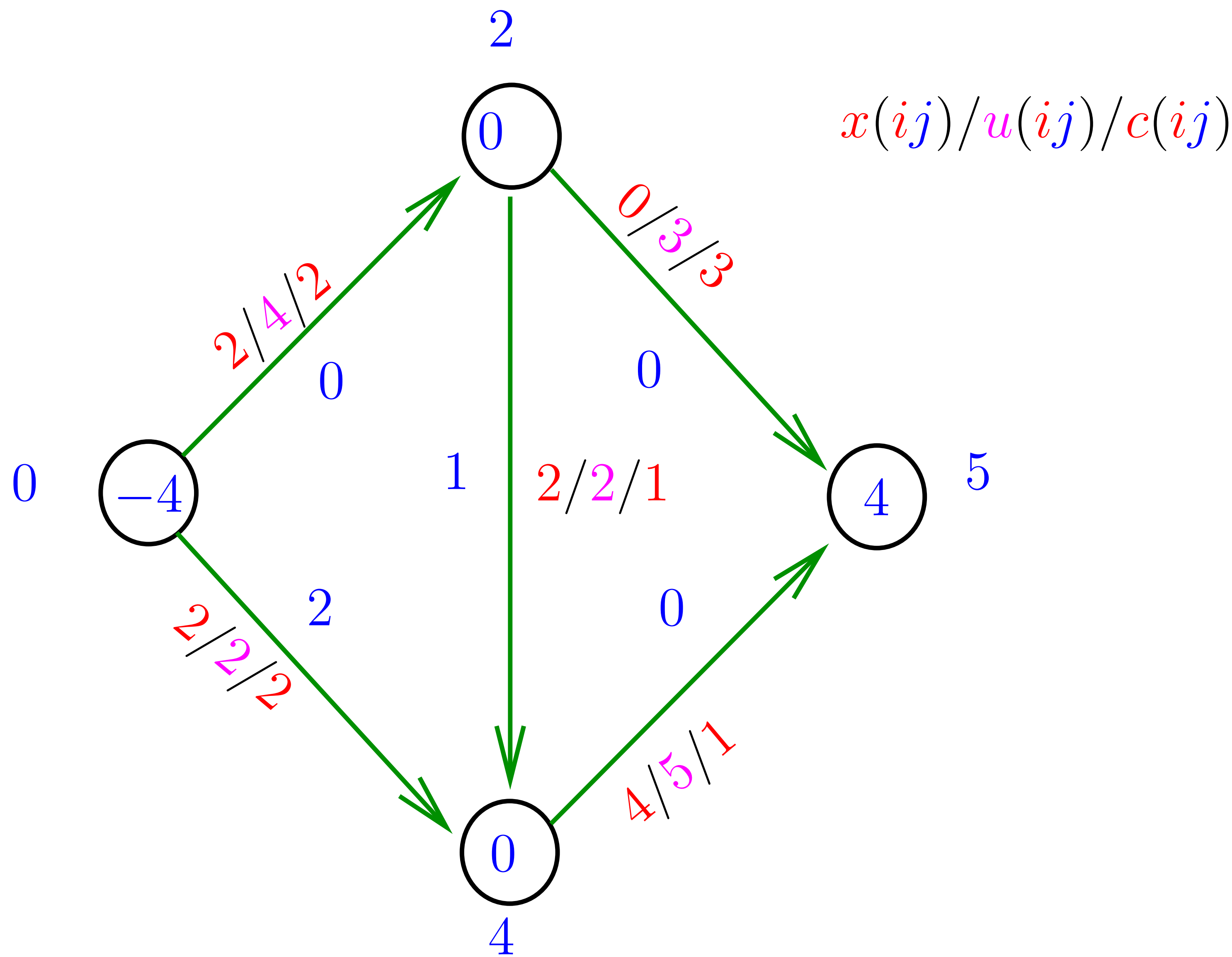
Temos as folgas de x e y são complementares já que,

$$y(j) - y(i) < c(ij) \Rightarrow x(ij) = 0 \quad \text{e}$$

$$y(j) - y(i) > c(ij) \Rightarrow x(ij) = u(ij)\ .$$

Conclusão: x é um fluxo viável de custo mínimo.

Solução dual viável



$$yb - wu = 4 \times 5 - 2 \times 2 - 1 \times 2 = 14$$

Algoritmo de Klein

KLEIN (N, A, u, b, c)

$\langle x, O\rangle \leftarrow$ FLUXO-VIÁVEL (N, A, u, b)
se x não está definido
    então devolva T

$\check{x} \leftarrow$ PSEUDOFLUXO(x)

repita

    $A_x \leftarrow \{ij \in A : \check{x}(ij) < u(ij)\}$
    $\langle O, y\rangle \leftarrow$ CICLO-NEGATIVO(N, A_x, c)
    se O está definido
        então $\check{x} \leftarrow$ BARATEIE-FLUXO$(\check{x}, O)$

até que O não está definido

$x \leftarrow$ FLUXO$(\check{x})$
devolva x e y

Barateie fluxo

BARATEIE-FLUXO $(\check{x}, O)$

$\delta \leftarrow \min\{u(ij) - x(ij) : ij$ é arco de $O\}$

para cada arco ij em O **faça**

  $\check{x}(ij) \leftarrow \check{x}(ij) + \delta$

  $\check{x}(ji) \leftarrow \check{x}(ji) - \delta$

devolva $\check{x}$

Invariantes

No início de cada iteração do bloco de linhas 6–9 valem as seguintes invariantes:

(i0) x é inteiro;

(i1) x é satisfaz b;

(i2) x respeita u.

onde $x :=$ FLUXO$(\check{x})$.

Correção

- Depois da última iteração das linhas 6–9, na linha 11, x é um fluxo que satisfaz b e respeita u;
- y definido na linha 7 é um c-potencial em $(N, A_{\check{x}})$.
- Como y é um c-potencial em $(N, A_{\check{x}})$ então

$$\check{x}(ij) < u(ij) \Rightarrow y(j) - y(i) \leq c(ij)$$

para cada arco ij em $A_{\check{x}}$ e portanto y tem folgas complementares às de x.

- se definirmos $w(ij) := \max\{0, y(j) - y(i) - c(ij)\}$, então o par (y, w) é solução dual-viável tal que

$$cx = yb - wu \ .$$

Conclusão: o algoritmo devolve um fluxo viável de custo mínimo.

Conclusões (1)

Os fatos a seguir são conseqüências da correção do algoritmo KLEIN.

Se (N, A, u, b, c) é um rede com função-capacidade u de A em $\mathbb{Z}_{\geq}$, função-demanda b de N em $\mathbb{Z}$ e função-custo c de A em $\mathbb{Z}$ que admite um fluxo viável, então existe um fluxo viável de custo mínimo com valores inteiros.

Se (N, A, u, b, c) e x é um fluxo viável de custo mínimo então existe uma função custo $w \geq 0$ e um $(c + w)$-potencial y tal que $cx = yb - wu$.

Conclusões (2)

Se x é um fluxo viável, então vale uma e apenas uma das afirmações:

- x é um fluxo viável de custo mínimo;
- existe um ciclo de custo negativo na rede residual.

Teorema do fluxo viável de custo mínimo

Teorema da dualidade. Para qualquer rede (N, A, u, b, c), se x é um fluxo que satisfaz b, respeita u e minimiza cx então existe uma função-custo $w \geq 0$ e um $(c+w)$-potencial y tais que

$$cx = yb - wu \ .$$

Consumo de tempo

O número de execuções do bloco de linhas 6–9 é

$$< 2mUC,$$

onde $U := \max\{u(ij) : ij \in A\}$ e $C := \max\{|c(ij)| : ij \in A\}$.

linha	consumo de todas as execuções da linha
1-3	$\mathrm{O}(n^2m)$
4	$\mathrm{O}(m)$
6	$2mUC\,\mathrm{O}(m) = \mathrm{O}(m^2UC)$
7	$2mUC\,\mathrm{O}(nm) = \mathrm{O}(nm^2UC)$
8-9	$2mUC\,\mathrm{O}(n) = \mathrm{O}(nmUC)$
11-12	$\mathrm{O}(m)$

total $\mathrm{O}(nm^2UC)$

Conclusão

$\boxed{\text{O consumo de tempo do algoritmo KLEIN é } O(nm^2UC).}$

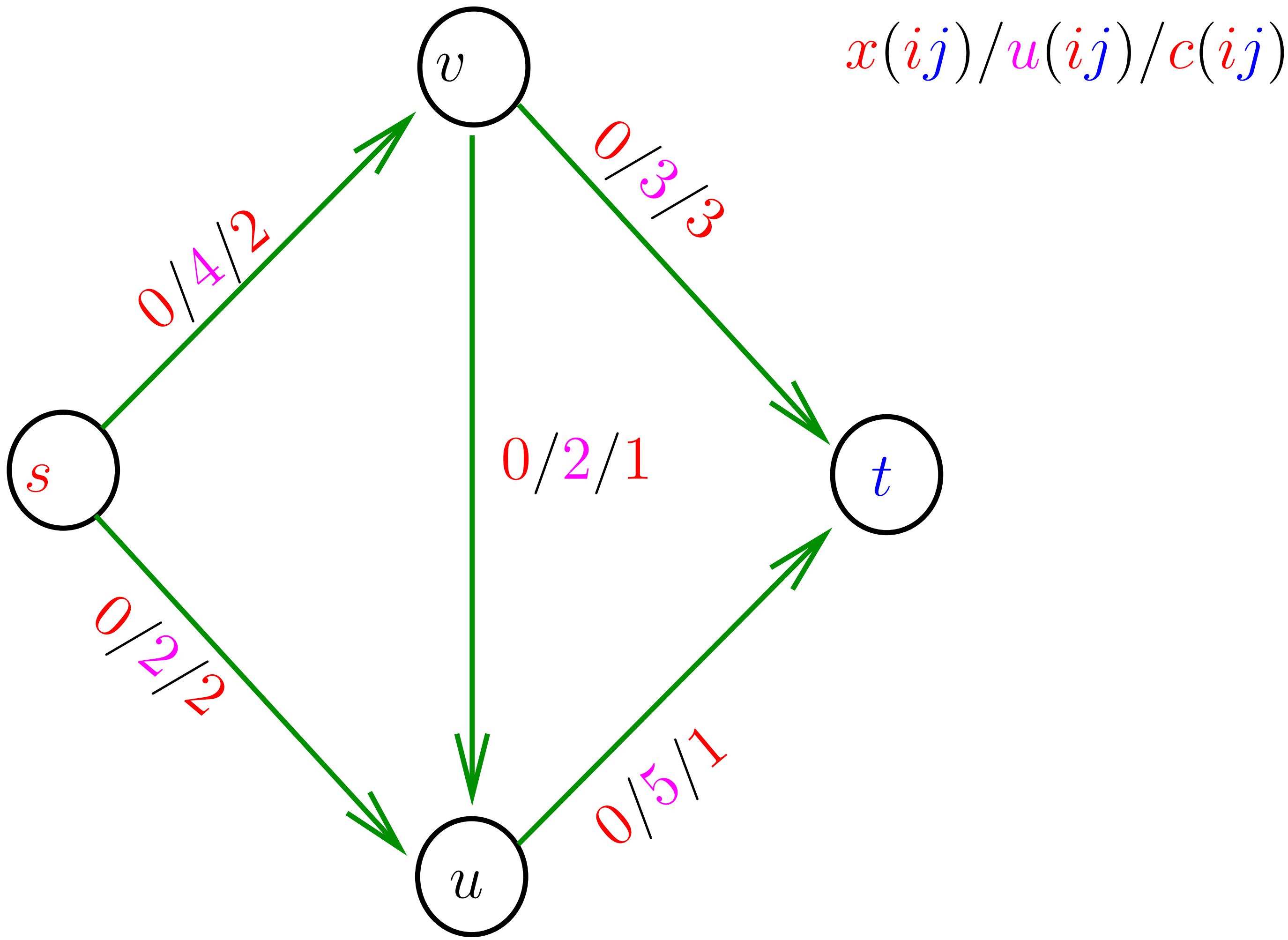
Este consumo de tempo não é polinomial.

Algoritmo de Jewell

PF 23.1, 23.2, 23.3

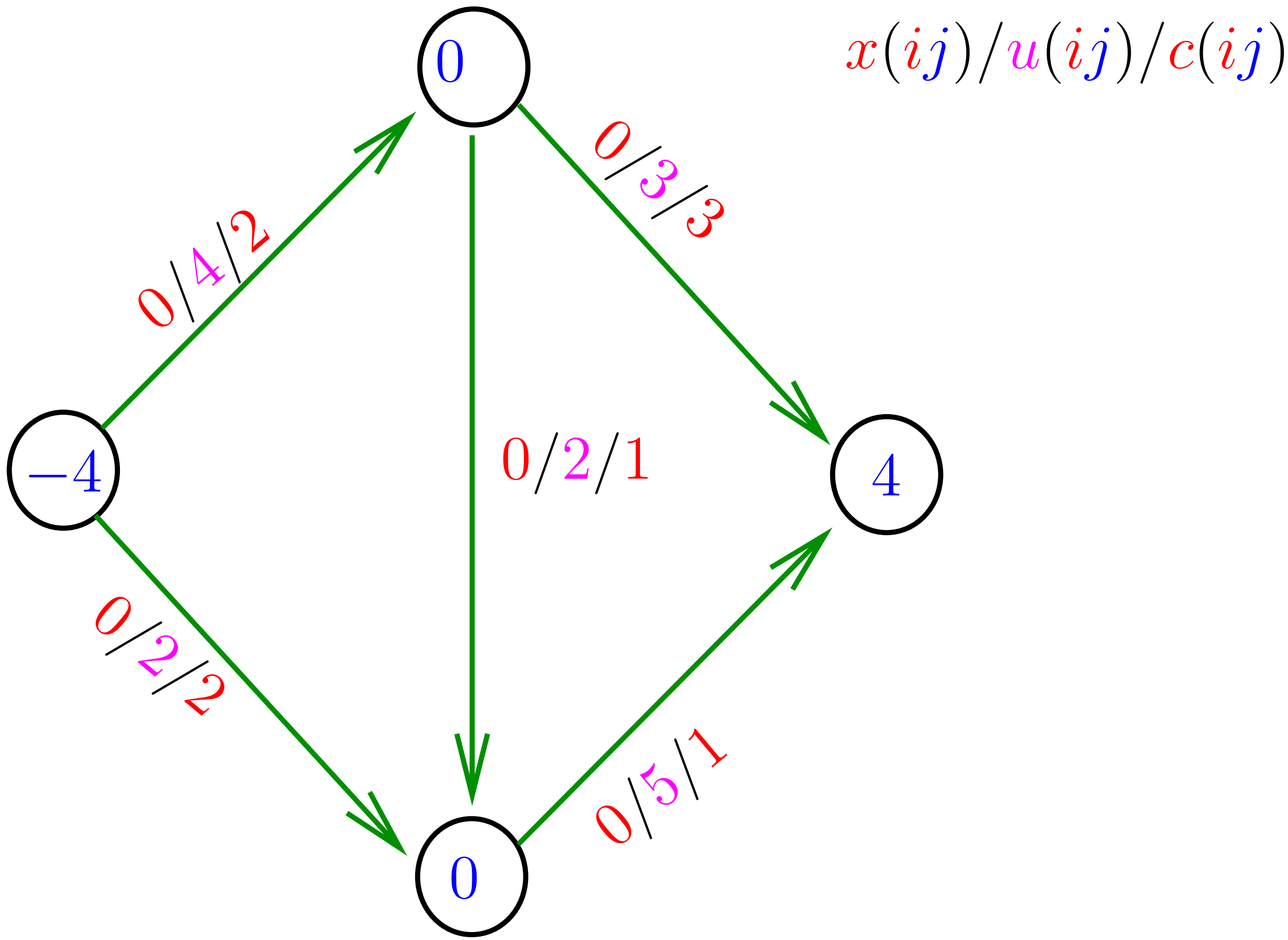
Sucessive Least-Cost Augmentating

Rede



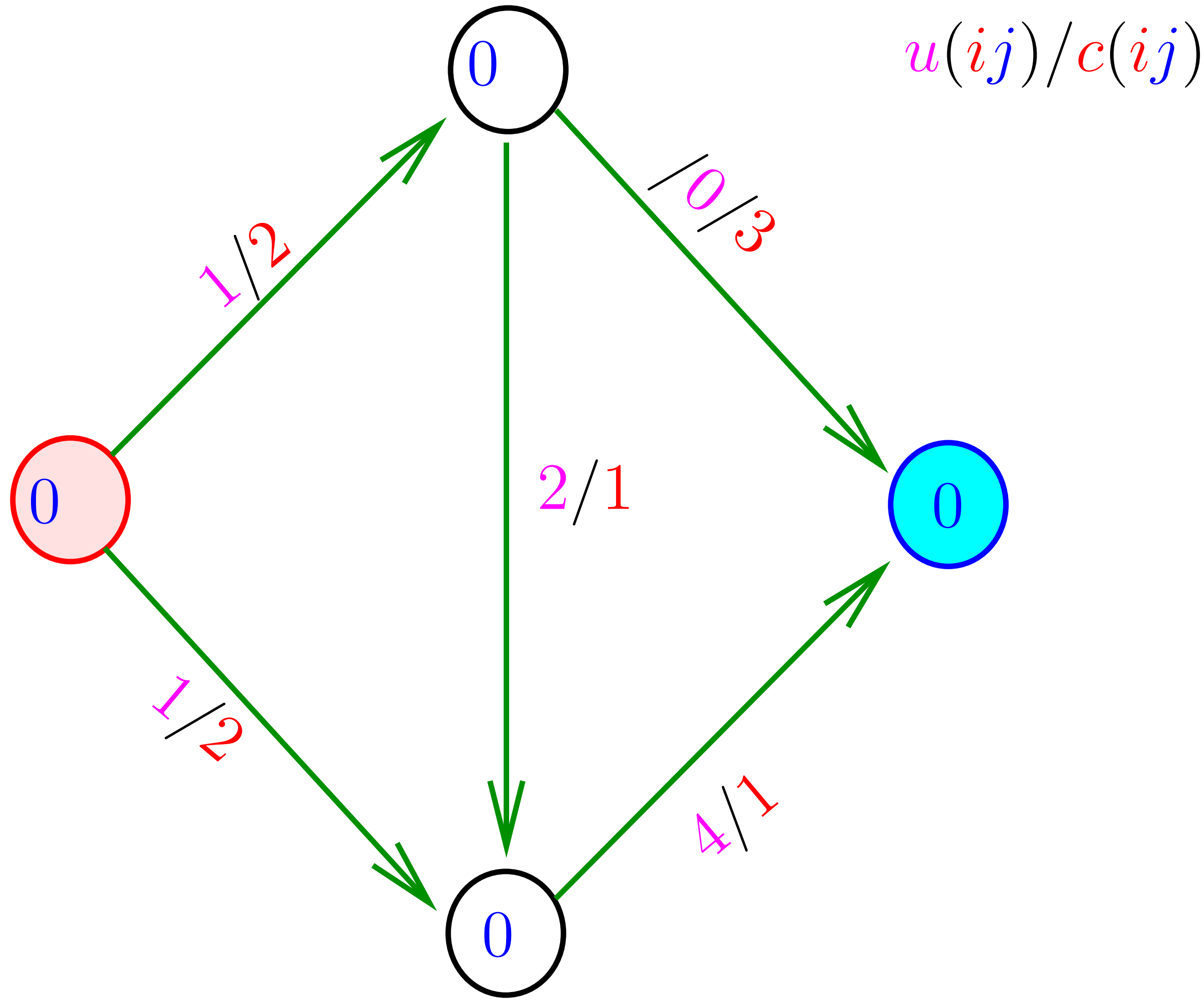
Custo $= 0 \times 2 + 0 \times 2 + 0 \times 1 + 0 \times 3 + 0 \times 1 = 0$

Rede (1)

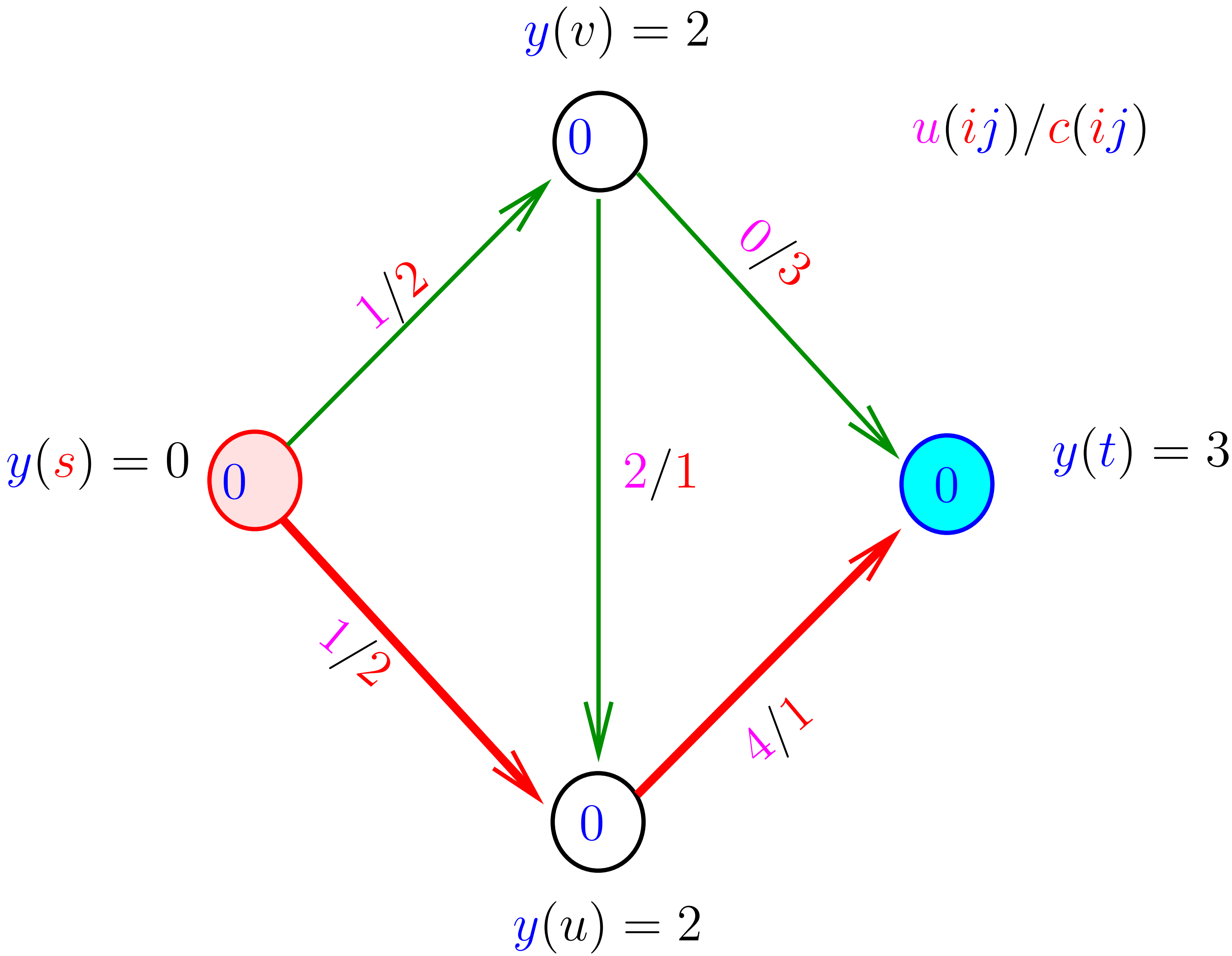


Custo $= 0 \times 2 + 0 \times 2 + 0 \times 1 + 0 \times 3 + 0 \times 1 = 0$

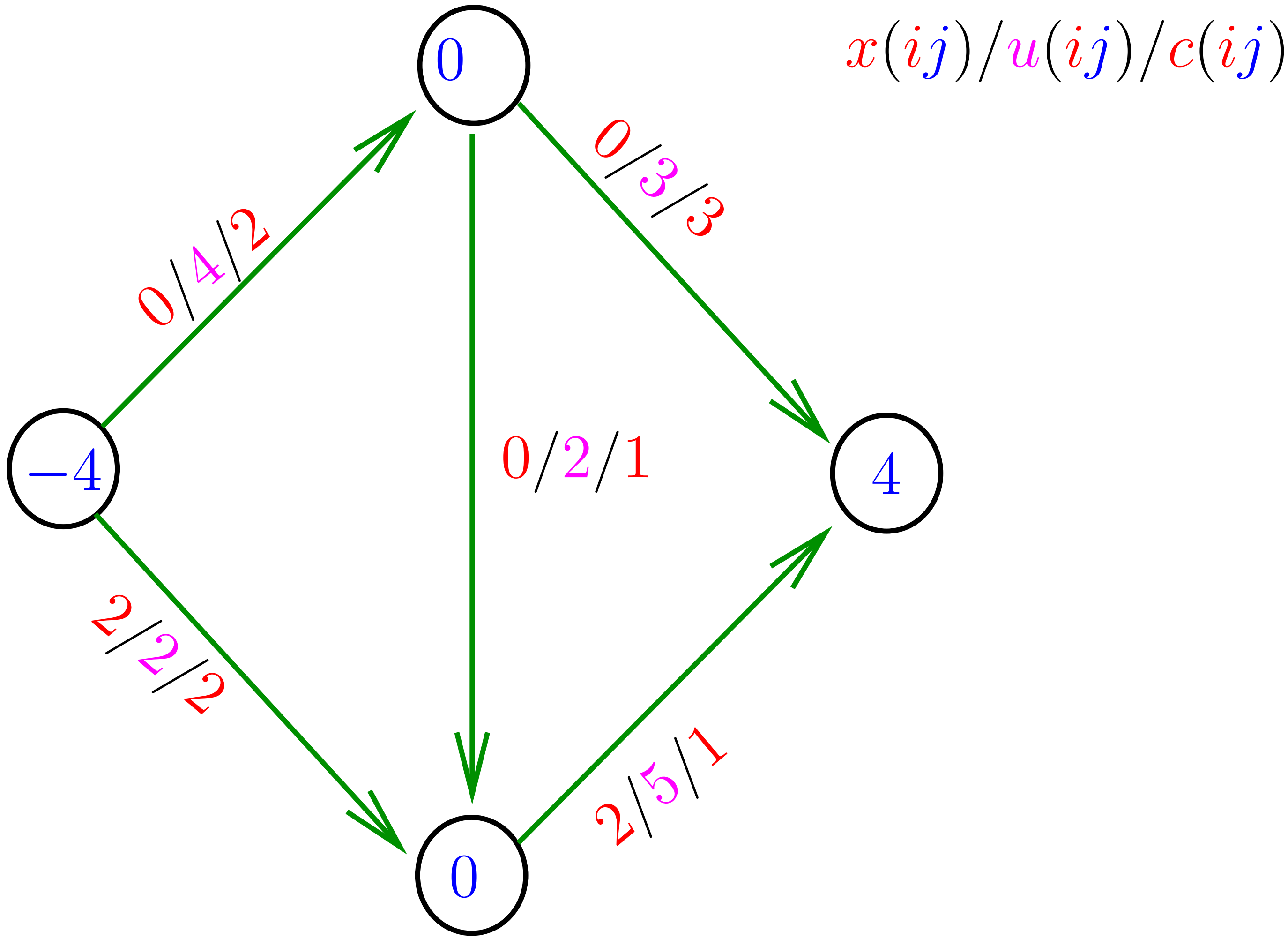
Rede residual (1)



Caminho de custo mínimo (1)

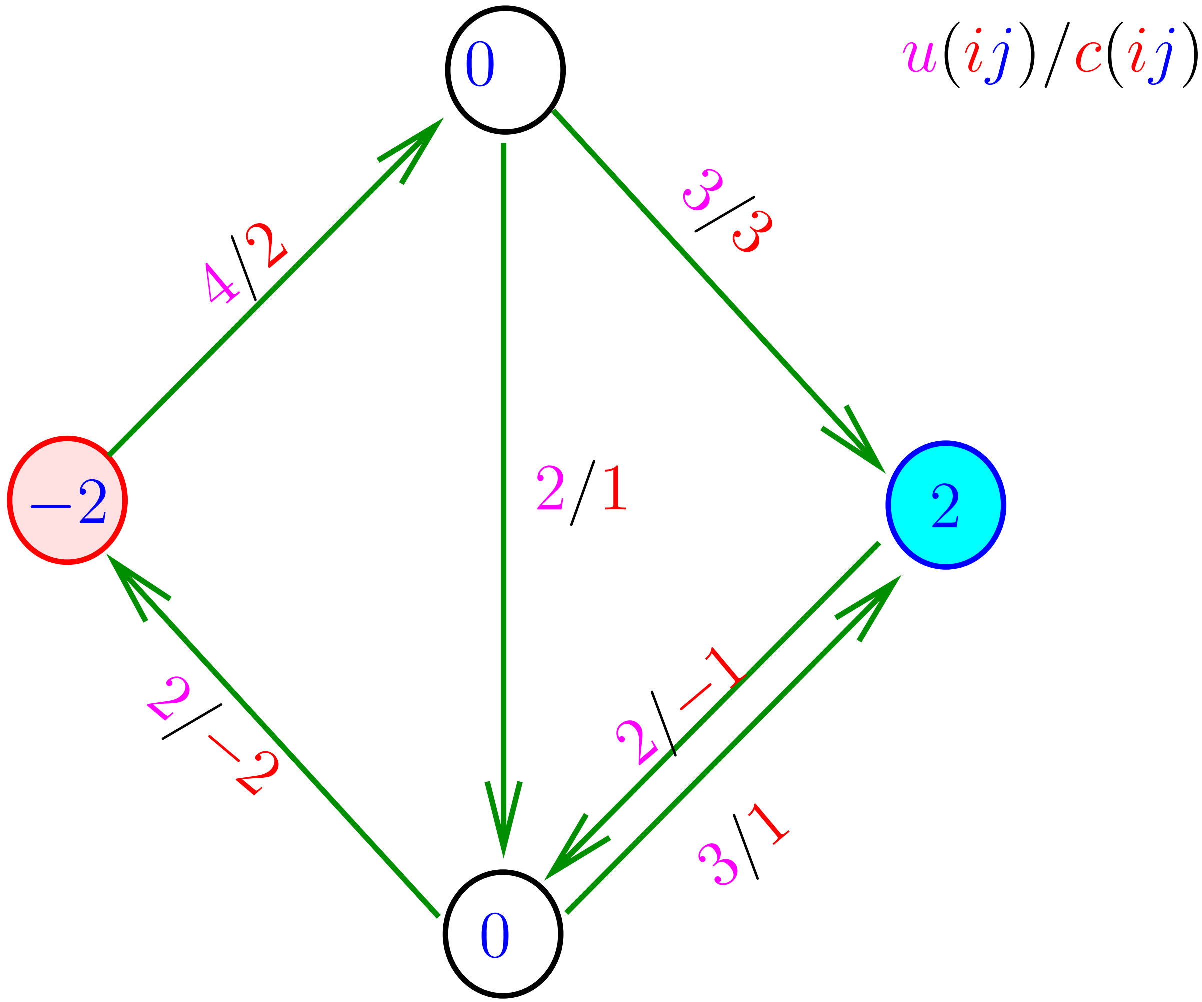


Rede (2)

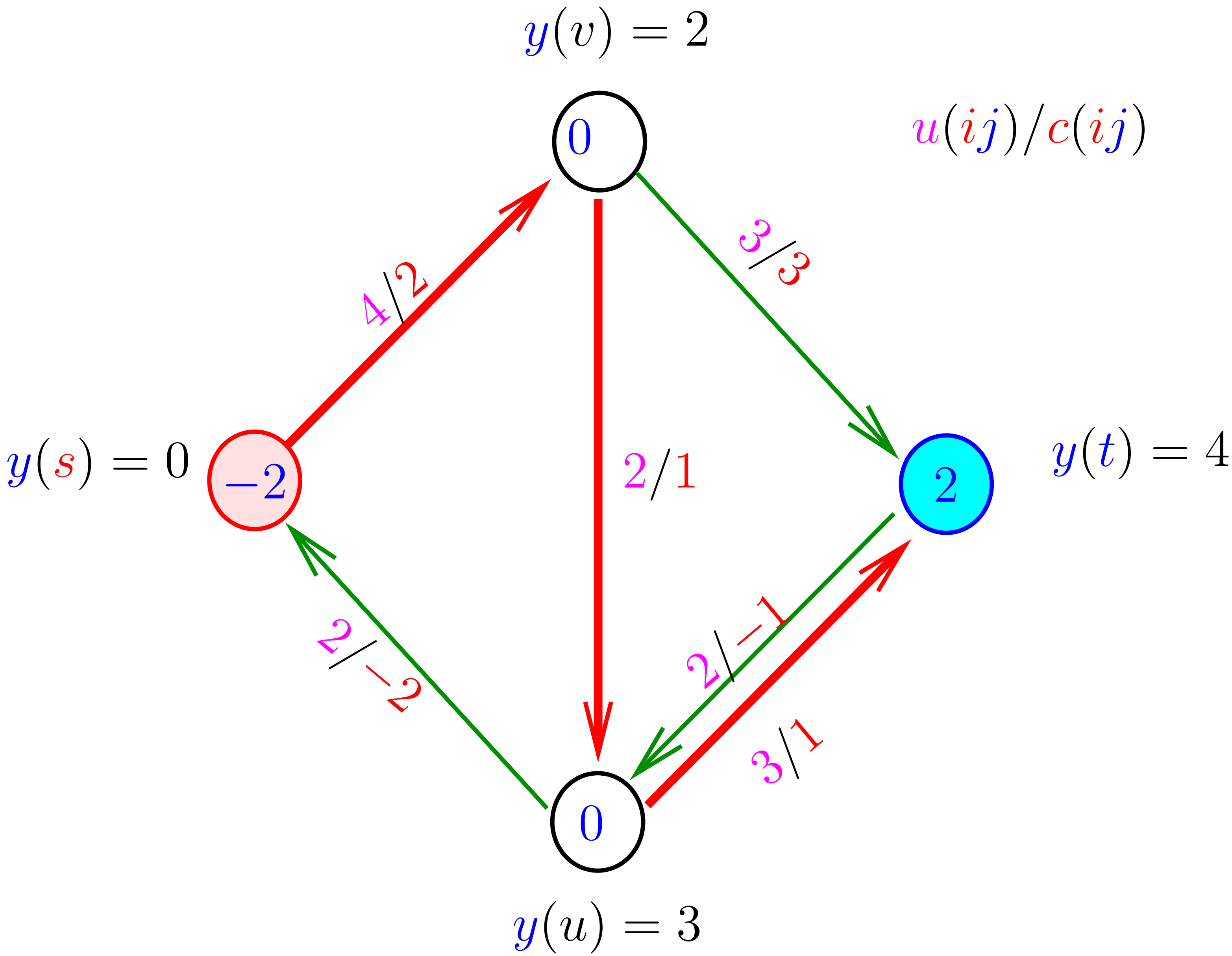


Custo $= 0 \times 2 + 2 \times 2 + 0 \times 1 + 0 \times 3 + 2 \times 1 = 6$

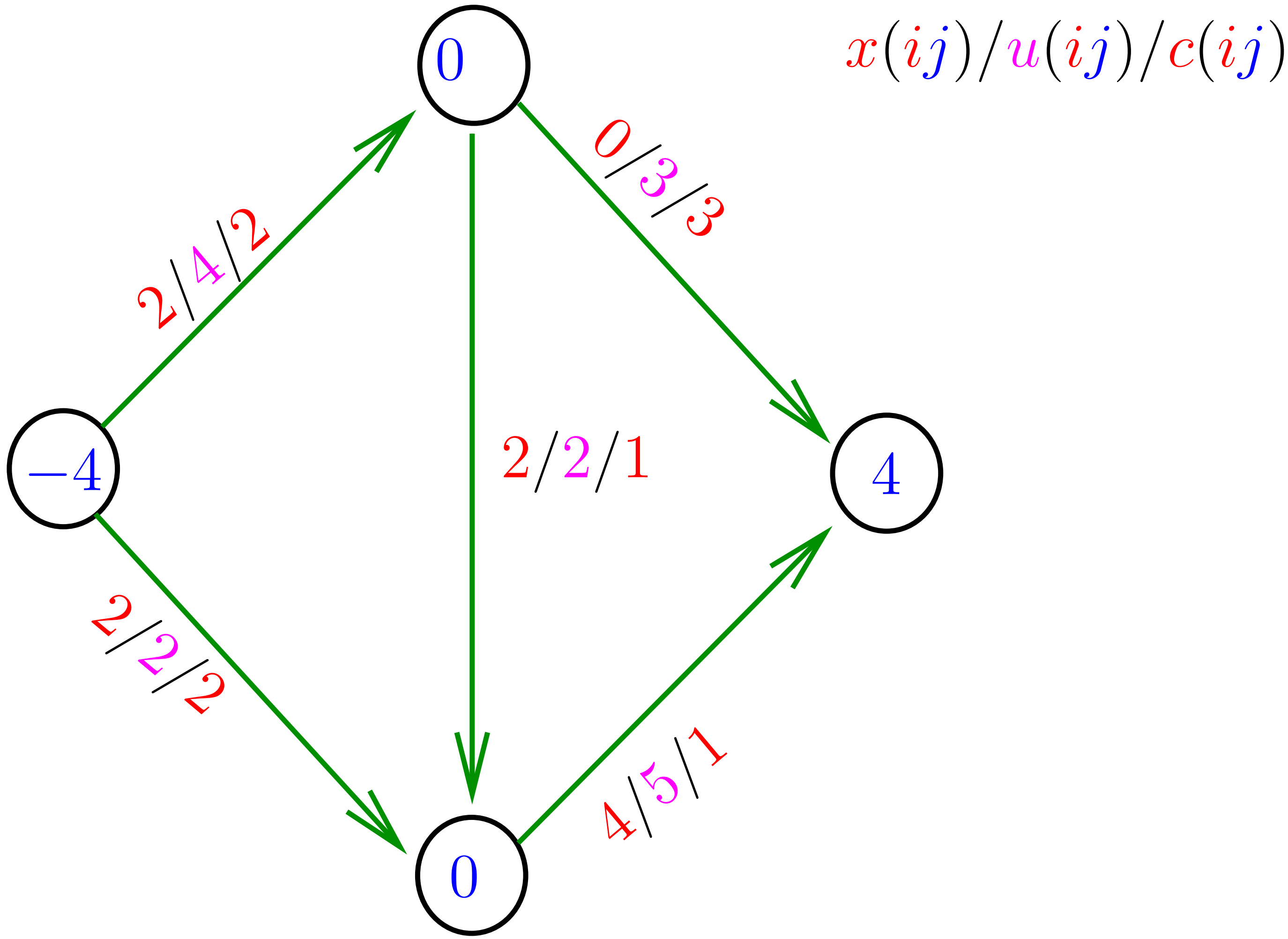
Rede residual (2)



Caminho de custo mínimo (2)

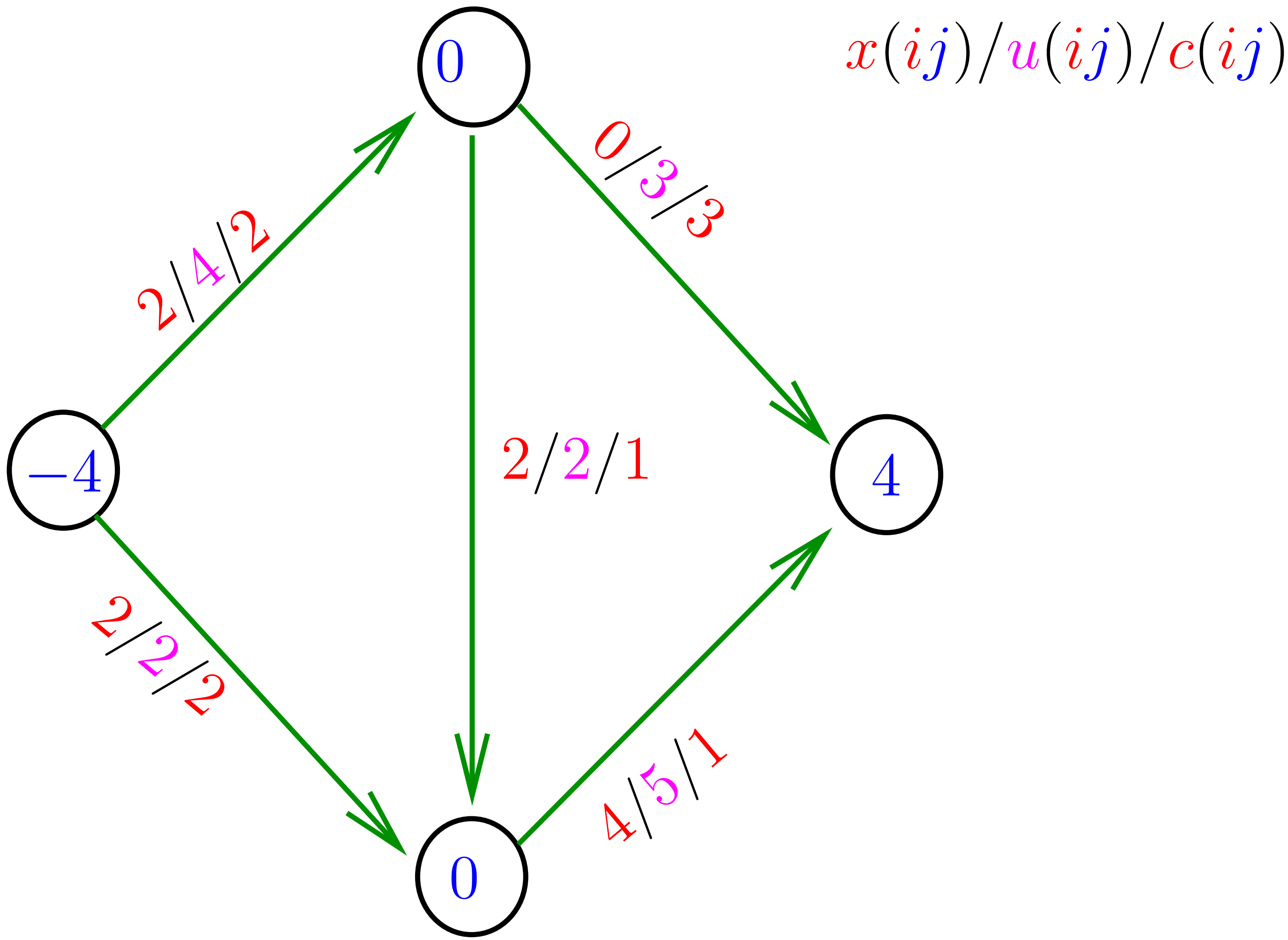


Rede (3)



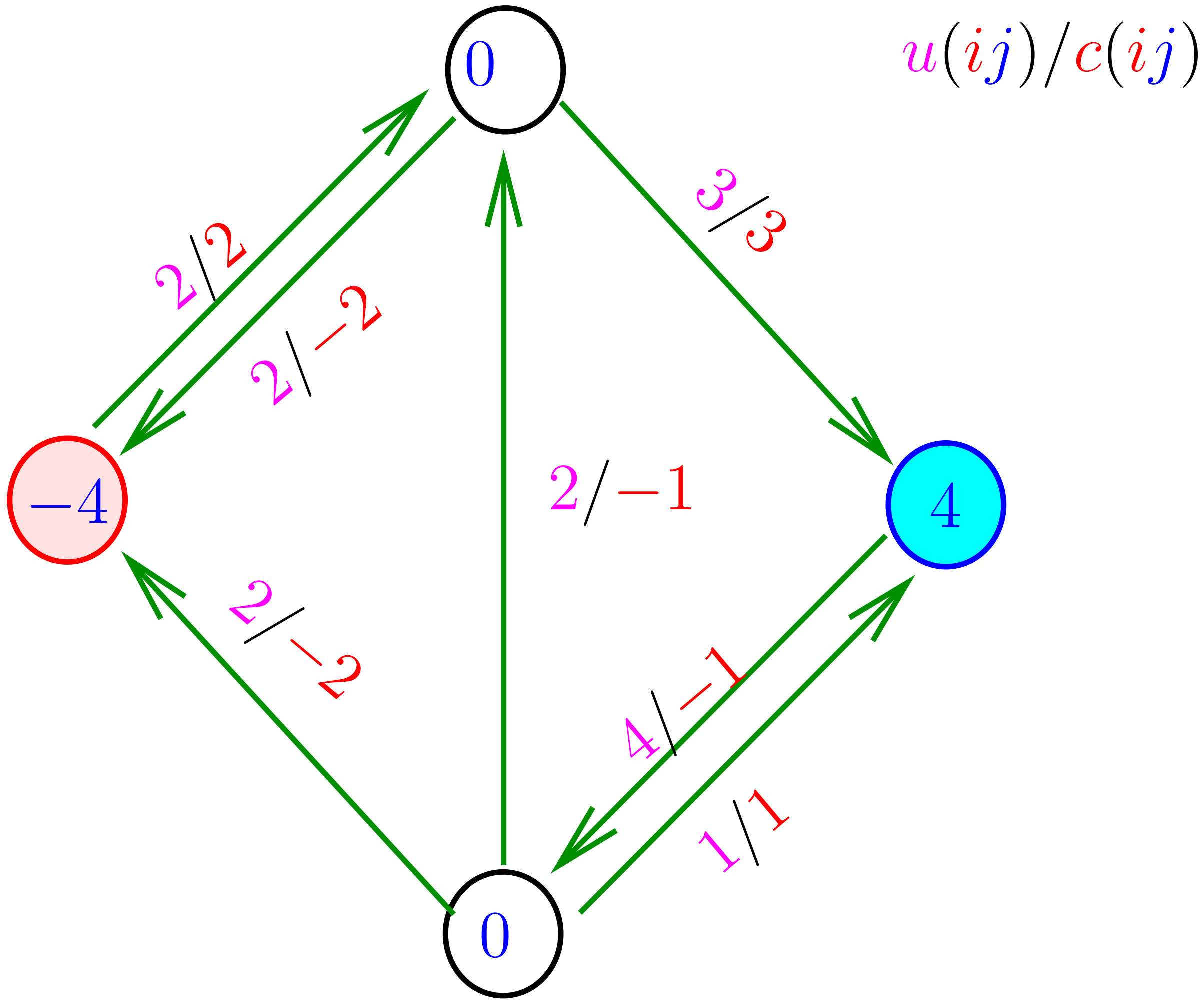
Custo $= 2 \times 2 + 2 \times 2 + 2 \times 1 + 0 \times 3 + 4 \times 1 = 14$

É fluxo de custo mínimo?

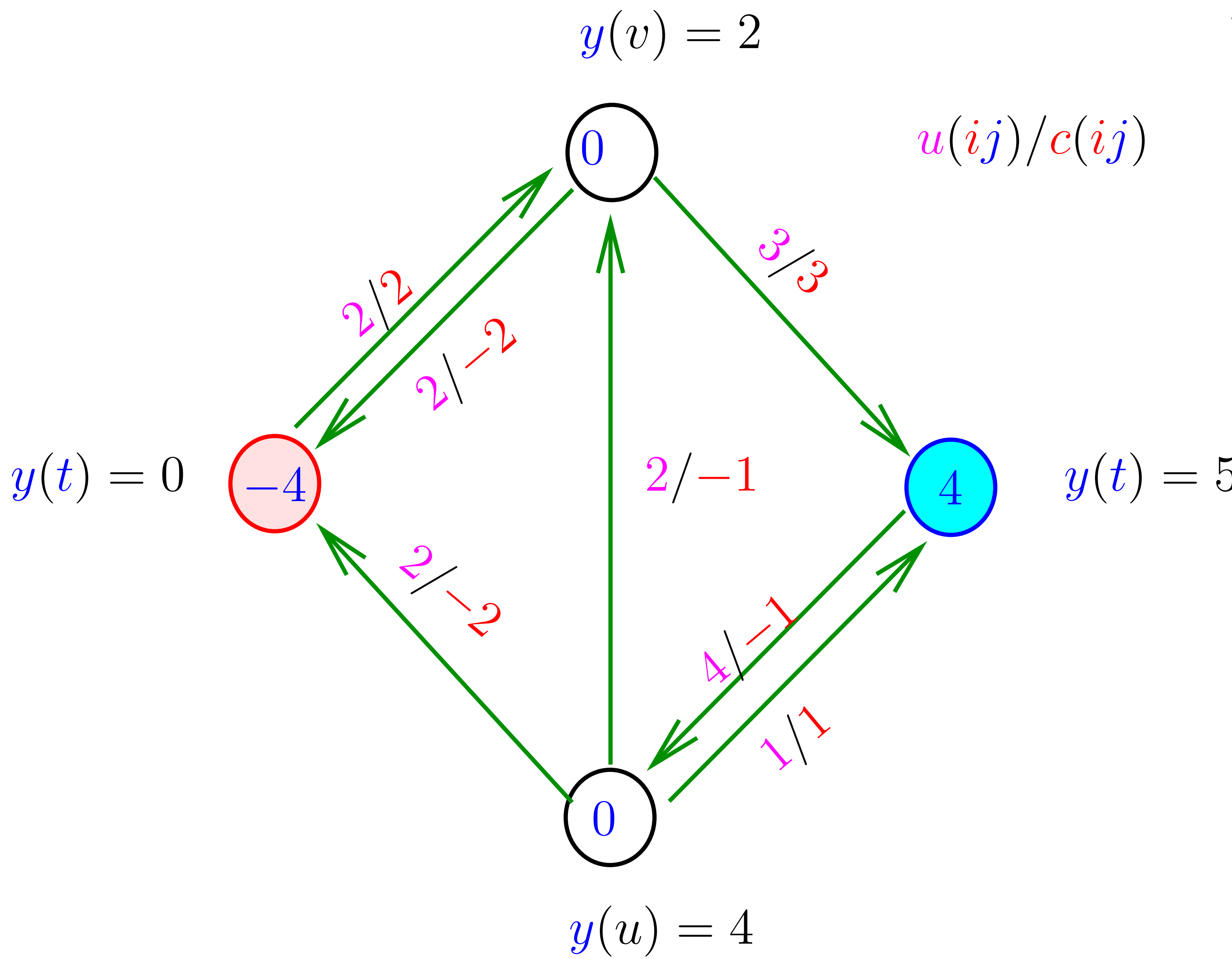


Custo $= 2 \times 2 + 2 \times 2 + 2 \times 1 + 0 \times 3 + 4 \times 1 = 14$

Rede residual



Potencial



Folgas complementares

Seja x o fluxo encontrado.

Seja y o potencial encontrado.

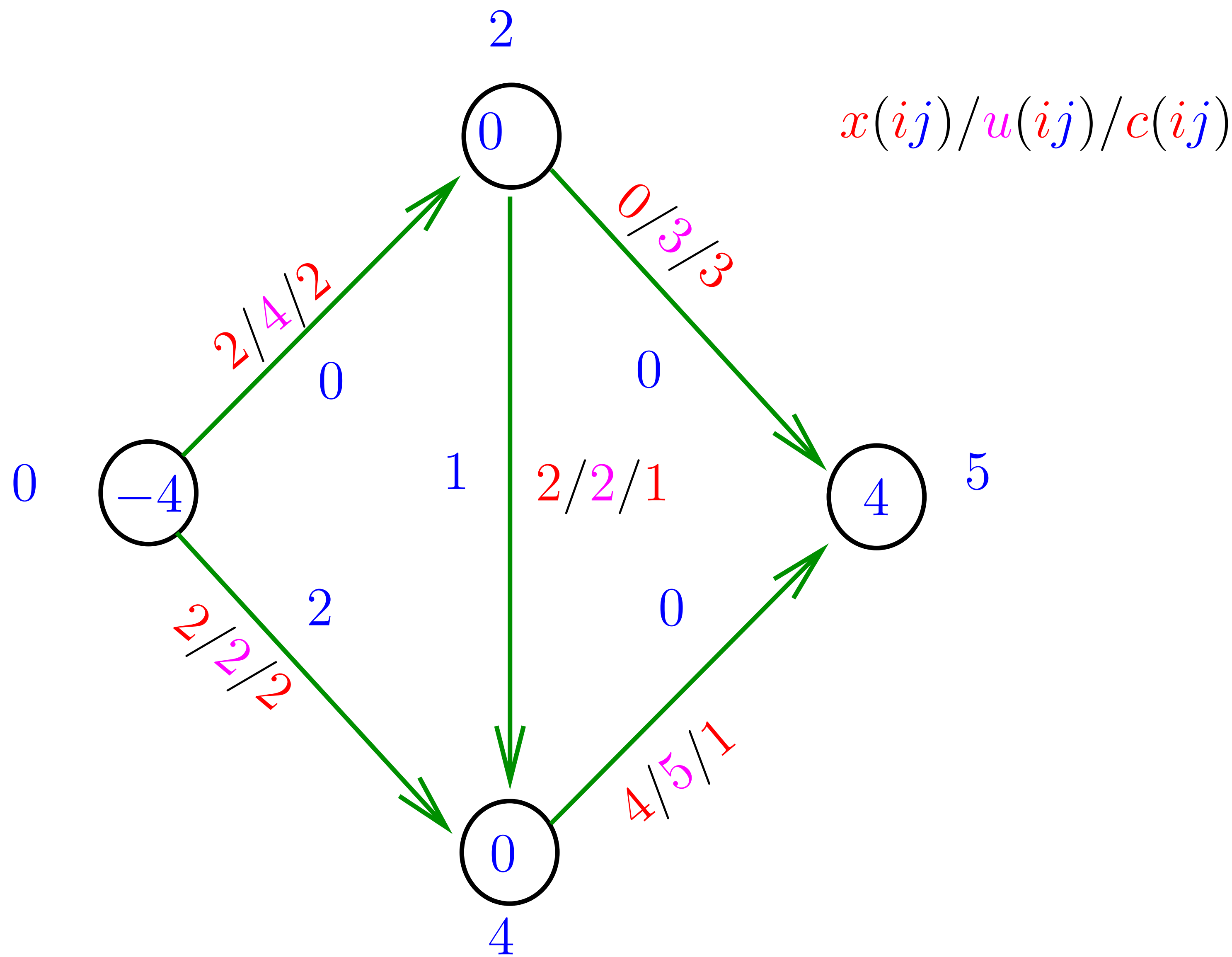
Temos as folgas de x e y são complementares já que,

$$y(j) - y(i) < c(ij) \Rightarrow x(ij) = 0 \quad \text{e}$$

$$y(j) - y(i) > c(ij) \Rightarrow x(ij) = u(ij) \; .$$

Conclusão: x é um fluxo viável de custo mínimo.

Solução dual viável



$$yb - wu = 4 \times 5 - 2 \times 2 - 1 \times 2 = 14$$

Algoritmo de Jewell

JEWEEL (N, A, u, b, c)

$\check{x} \leftarrow 0 \quad e \leftarrow 0$

enquanto existe s em N tal que $e(s) > b(s)$ **faça**

  $A_x \leftarrow \{ij \in A : \check{x}(ij) < u(ij)\}$

  $\langle y, \pi \rangle \leftarrow$ CAMINHO-MÍNIMO(N, A_x, s, c)

  se existe t em N tal que $\pi(t) \neq \text{NIL}$ e $e(t) < b(t)$

    então INCREMENTE-FLUXO-VIÁVEL$(\check{x}, \pi, s, t)$

    senão $T \leftarrow \{j \in N : \pi(j) = \text{NIL}\}$

      devolva T $\quad \triangleright$ conjunto de Gale

$x \leftarrow$ FLUXO$(\check{x})$

devolva x e y

Incremente fluxo viável

INCREMENTE-FLUXO-VIÁVEL $(\check{x}, \pi, s, t)$

Seja P o st-caminho determinado por π

$\delta \leftarrow \min\{u(ij) - x(ij) : ij$ é arco de $P\}$

para cada arco ij em P **faça**

$\quad\quad \check{x}(ij) \leftarrow \check{x}(ij) + \delta$

$\quad\quad \check{x}(ji) \leftarrow \check{x}(ji) - \delta$

$e(s) \leftarrow e(s) - \delta$

$e(t) \leftarrow e(t) + \delta$

Algoritmo de Jewell

JEWEEL (N, A, u, b, c) $\quad \triangleright\ u(ij) > 0 \Rightarrow c(ij) \geq 0$

$\check{x} \leftarrow 0 \quad e \leftarrow 0 \quad y \leftarrow 0$

enquanto existe s em N tal que $e(s) > b(s)$ **faça**

$\quad A_x \leftarrow \{ij \in A : \check{x}(ij) < u(ij)\}$

$\quad c' \leftarrow$ CUSTO-REDUZIDO $(A_{\check{x}}, c, y)$

$\quad \langle y', \pi \rangle \leftarrow$ DIJKSTRA (N, A_x, s, c')

$\quad$ **se** existe t em N tal que $\pi(t) \neq \text{NIL}$ e $e(t) < b(t)$

$\quad\quad$ **então** INCREMENTE-FLUXO-VIÁVEL$(\check{x}, \pi, s, t)$

$\quad\quad\quad y \leftarrow y + y'$

$\quad\quad$ **senão** $T \leftarrow \{j \in N : \pi(j) = \text{NIL}\}$

$\quad\quad\quad$ **devolva** T $\quad \triangleright$ conjunto de Gale

$x \leftarrow$ FLUXO$(\check{x})$

devolva x e y

Custo Reduzido

CUSTO-REDUZIDO (A, c, y)

para cada arco ij em $A_{\check{x}}$ **faça**

$\qquad c'(ij) \leftarrow c(ij) - (y(j) - y(i))$

devolva c'

Fato. Qualquer caminho que tem custo mínimo em (N, A, c') também tem custo mínimo na rede (N, A, c).

Invariantes (1)

No início de cada iteração do bloco de linhas 6–9 valem as seguintes invariantes:

(i1) $e(i) = x(\bar{i}, i) - x(i, \bar{i})$ para cada nó i;

(i2) $\sum_i (b(i) - e(i)) = 0$; (Supondo que $b(N) = 0$)

(i3) x respeita u.

(i4) $\check{x}(ij) < u(ij) \Rightarrow y(j) - y(i) \leq c(ij)$ para cada arco ij.

(i4) y é um c-potencial no grafo $(N, A_{\check{x}})$.

(i4) não existe ciclo de custo negativo na rede $(N, A_{\check{x}}, c)$.

onde $x :=$ FLUXO$(\check{x})$.

Invariantes (2)

De (i1), (i3) e (i4) segue que

(i5) x é um fluxo de custo mínimo que satisfaz $e(i)$ e respeita u.

Consumo de tempo

O número de execuções do bloco de linhas 2–8 é

$$< nB,$$

onde $B := \max\{|b(i)| : i \in N\}$.

linha	consumo de todas as execuções da linha
1	$\mathrm{O}(n+m)$
2	$nB\,\mathrm{O}(n) = \mathrm{O}(n^2B)$
3	$nB\,\mathrm{O}(m) = \mathrm{O}(nmB)$
4	$nB\,\mathrm{O}(n^2) = \mathrm{O}(n^3B)$
5-8	$nB\,\mathrm{O}(n) = \mathrm{O}(n^2B)$
9-10	$\mathrm{O}(m)$
total	$\mathrm{O}(n^3B)$

Conclusão

O consumo de tempo do algoritmo JEWEEL é $\mathrm{O}(n^3 B)$.

Este consumo de tempo não é polinomial.

Unimodularidade

CCPS 6.5

Regra de Cramer

Seja B uma matriz indexada por $M \times M$ tal que $\det(B) \neq 0$.

Se b é um vetor indexado por M então a única solução do sistema de equações

$$Bx = b$$

é dada por

$$x_j = \frac{\det(B_j)}{\det(B)}$$

onde B_j é a matriz obtida de B substituindo a coluna j de B por b.

Conseqüência

Se B é uma matriz indexada por $M \times M$ tal que $\det(B)$ é $+1$ ou -1 e b é um vetor inteiro indexado por M então a única solução do sistema de equações

$$Bx = b$$

é inteira.

Unimodularidade

Um matriz inteira A de “posto pleno” é unimodular se o determinante de cada base de A é $+1$ ou -1.

Se A é uma matriz unimodular então o sistema de equações

$$Ax = b$$

tem uma solução básica inteira para cada vetor inteiro b.

Unimodularidade total

Uma matriz é totalmente unimodular se o determinante de qualquer de suas submatrizes é $0, -1$ ou $+1$.

Se M é uma matriz de incidências, então M é totalmente unimodular.

Demonstração: Por indução na dimensão da submatriz...

Exemplo

	vw	wz	zt	tv	sv	su	sw	uw	uz	wt
v	-1			$+1$	$+1$					
w	$+1$	-1					$+1$	$+1$		-1
z		$+1$	-1						$+1$	
t			$+1$	-1						$+1$
s					-1	-1	-1			
u						$+1$			-1	-1

A

N