Melhores momentos

AULA PASSADA

Algoritmos

- KLEIN: mantém um fluxo viável e em cada iteração procura um ciclo negativo.
- JEWEEL: mantém um fluxo que respeita u e tem custo mínimo (dentre as fluxos que respeita u e satisfazem e) e em cada iteração procura um caminho de incremento de custo mínimo.
- COST-SCALING: mantém um fluxo viável e uma função potencial que têm folgas ϵ-complementares. Em cada iteração resolve um problema de fluxo usando o algoritmo PREFLOW-PUSH$_\epsilon$.
- MIN-MEAN-KLEIN: mantém um fluxo viável e em cada iteração procura um ciclo (negativo) de custo médio mínimo.

Consumos de tempo

Algoritmo	consumo de tempo
KLEIN	$O(nm^2UC)$
JEWEEL	$O(n^3B)$
COST-SCALING	$O(n^2m \lg(nC))$
MIN-MEAN-KLEIN	$O(n^2m^3 \lg n)$

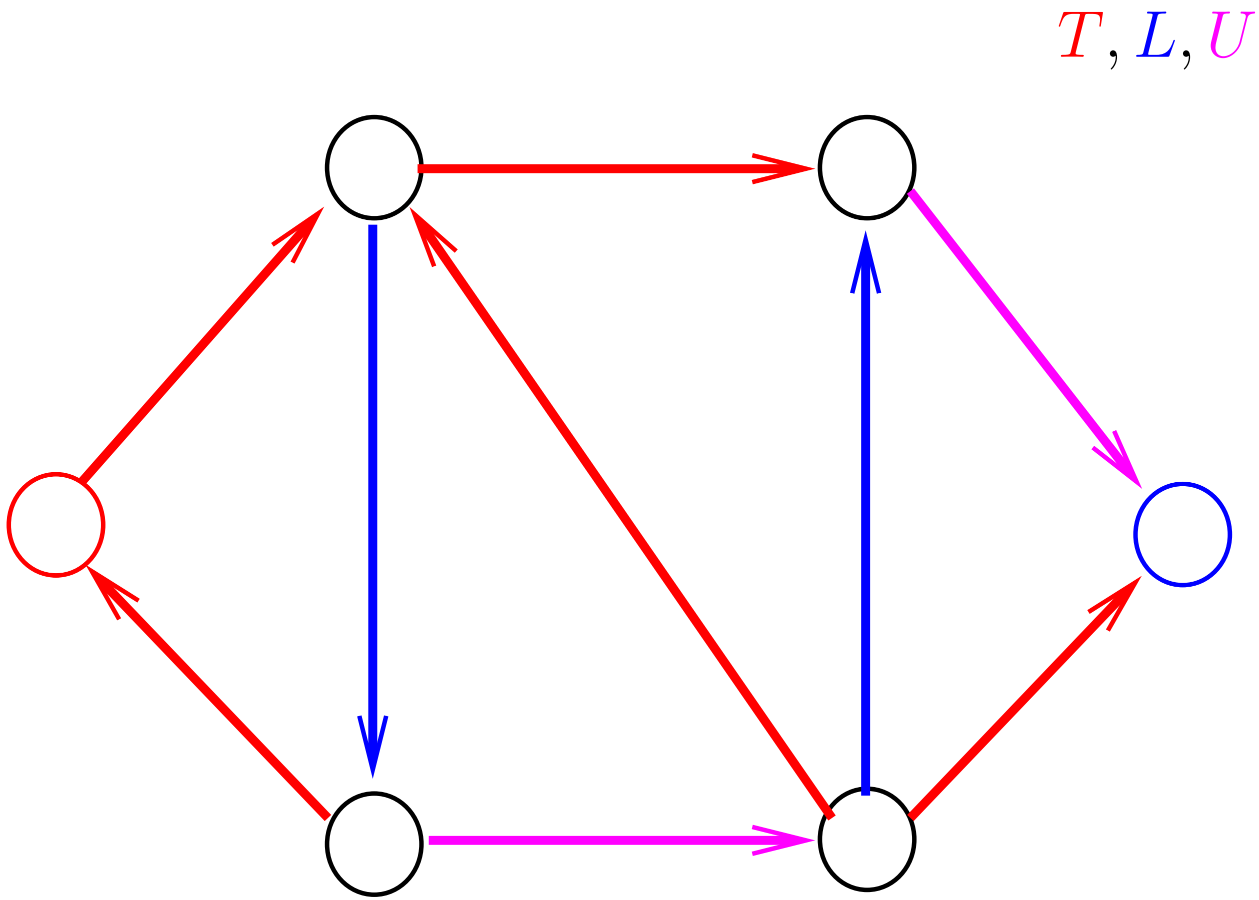
AULA 23

Simplex para redes

AMO 11.1, 11.2, 11.3, 11.5, 11.6

Estruturas arbóreas

Uma estrutura arbórea num grafo (N, A) é uma tripartição T, L, U de A tal que (N, T) é uma árvore.

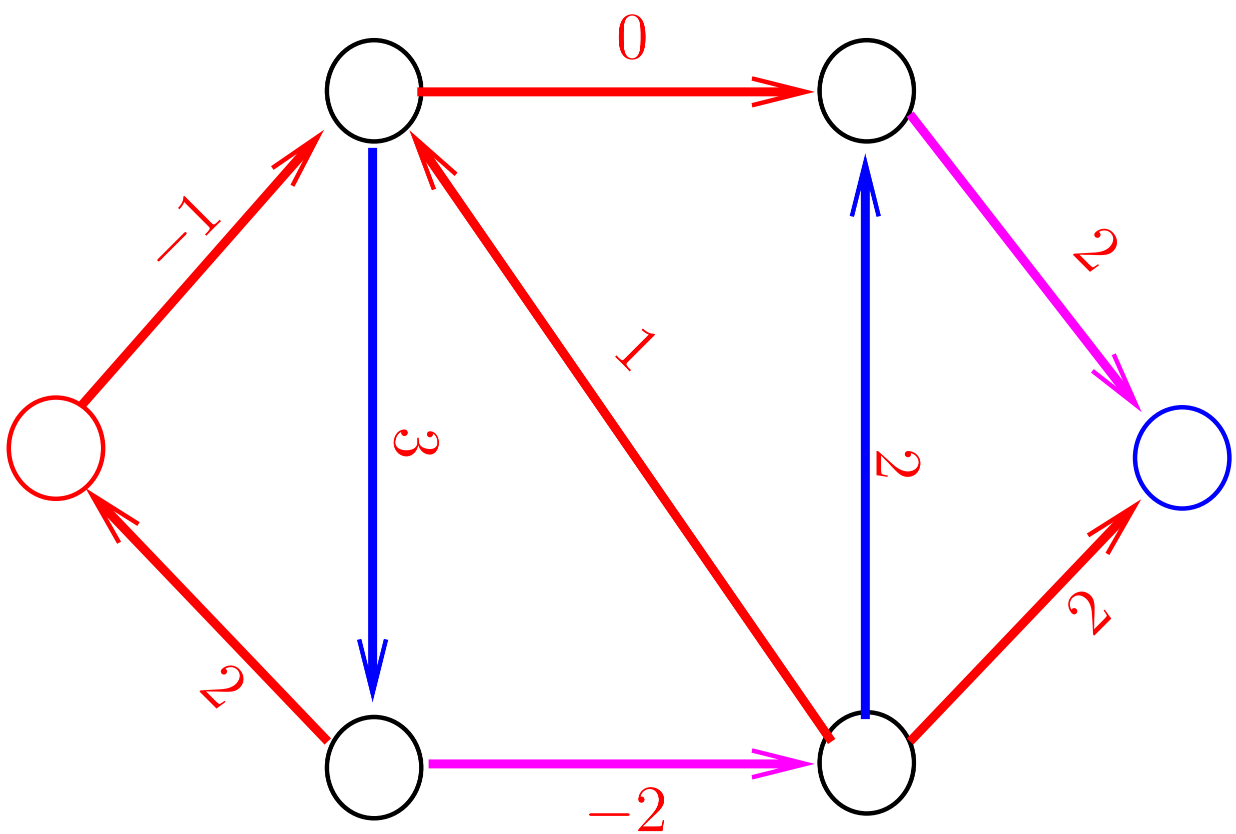


Estruturas arbóreas e potenciais (1)

Suponha que T, L, U é uma estrutura arbórea de (N, A, c).

Dizemos que uma função potencial y é determinada por T, c se, para cada ij em T,

$$y(j) - y(i) = c(ij) \; .$$

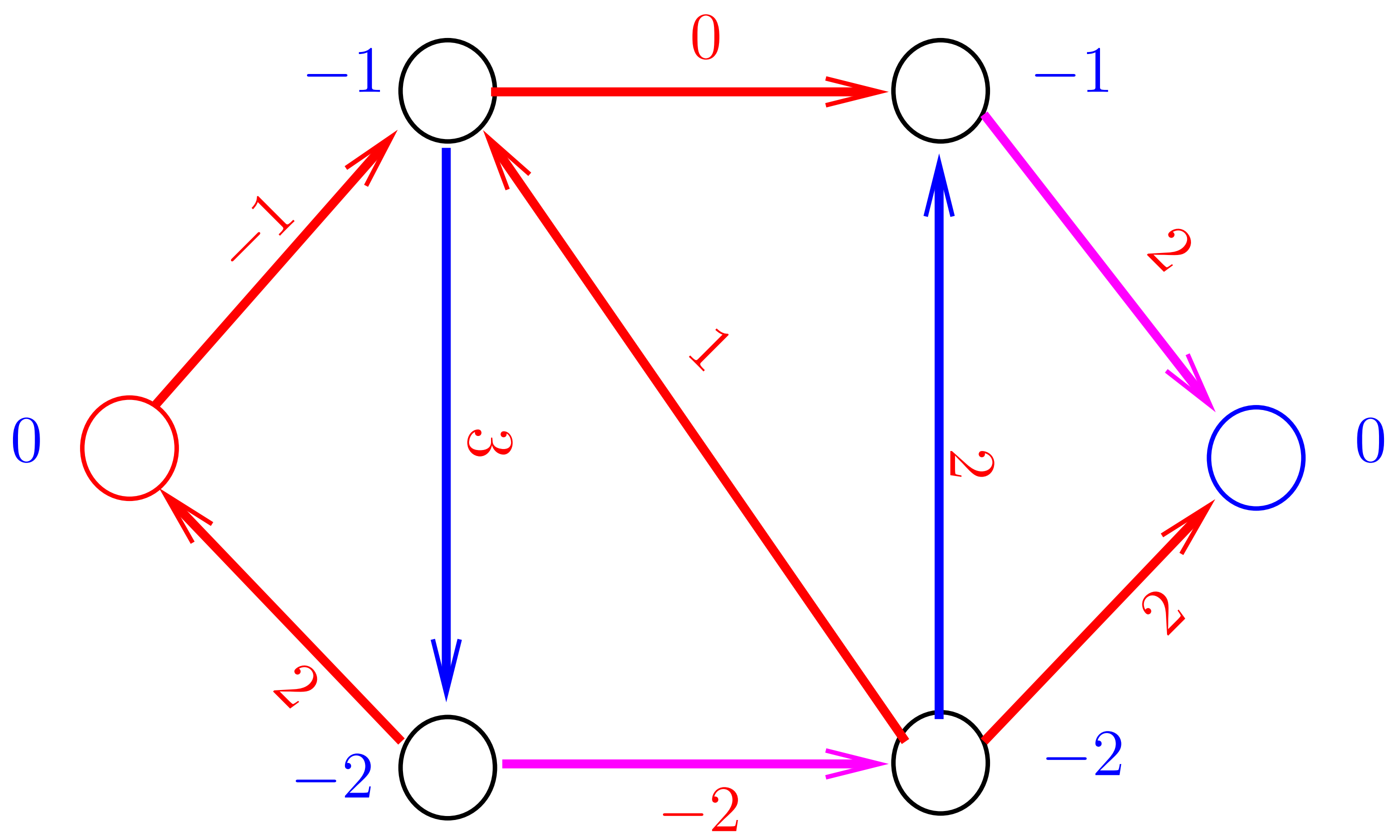


Estruturas arbóreas e potenciais (1)

Suponha que T, L, U é uma estrutura arbórea de (N, A, c).

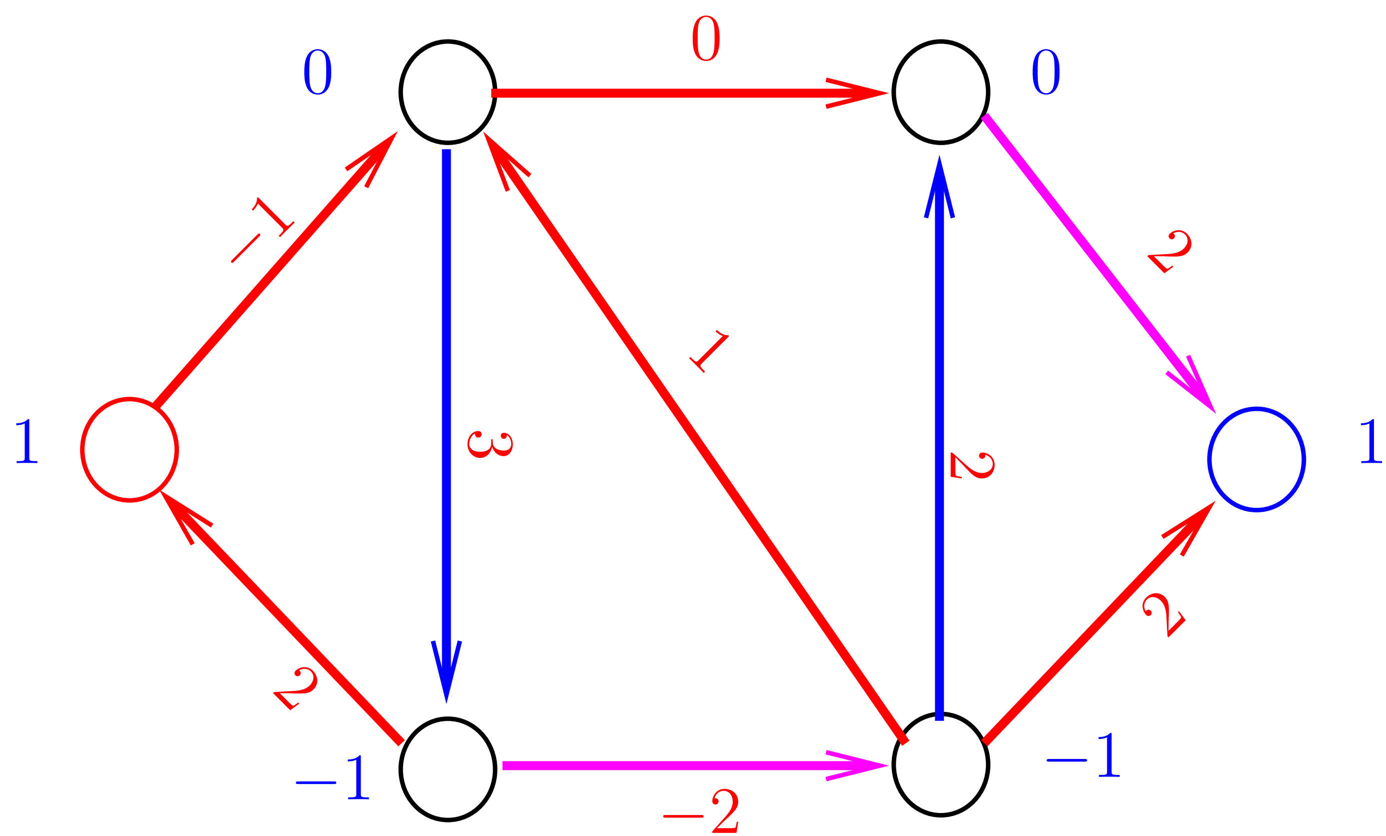
Dizemos que uma função potencial y é determinada por T, c se, para cada ij em T,

$$y(j) - y(i) = c(ij) \ .$$



Estruturas arbóreas e potenciais (2)

Quantas funções potenciais determinadas por T, c existem? Em geral muitas! Essencialmente uma!



Estruturas arbóreas e fluxos (1)

Suponha que x é um fluxo que respeita u.

Uma estrutura arbórea T, L, U está associada ao fluxo x se

$$\begin{aligned} ij \in L &\quad \Rightarrow x(ij) = 0 \\ ij \in U &\quad \Rightarrow x(ij) = u(ij) \end{aligned}$$

Logo, todo arco ij tal que $0 < x(ij) < u(ij)$ está em T.

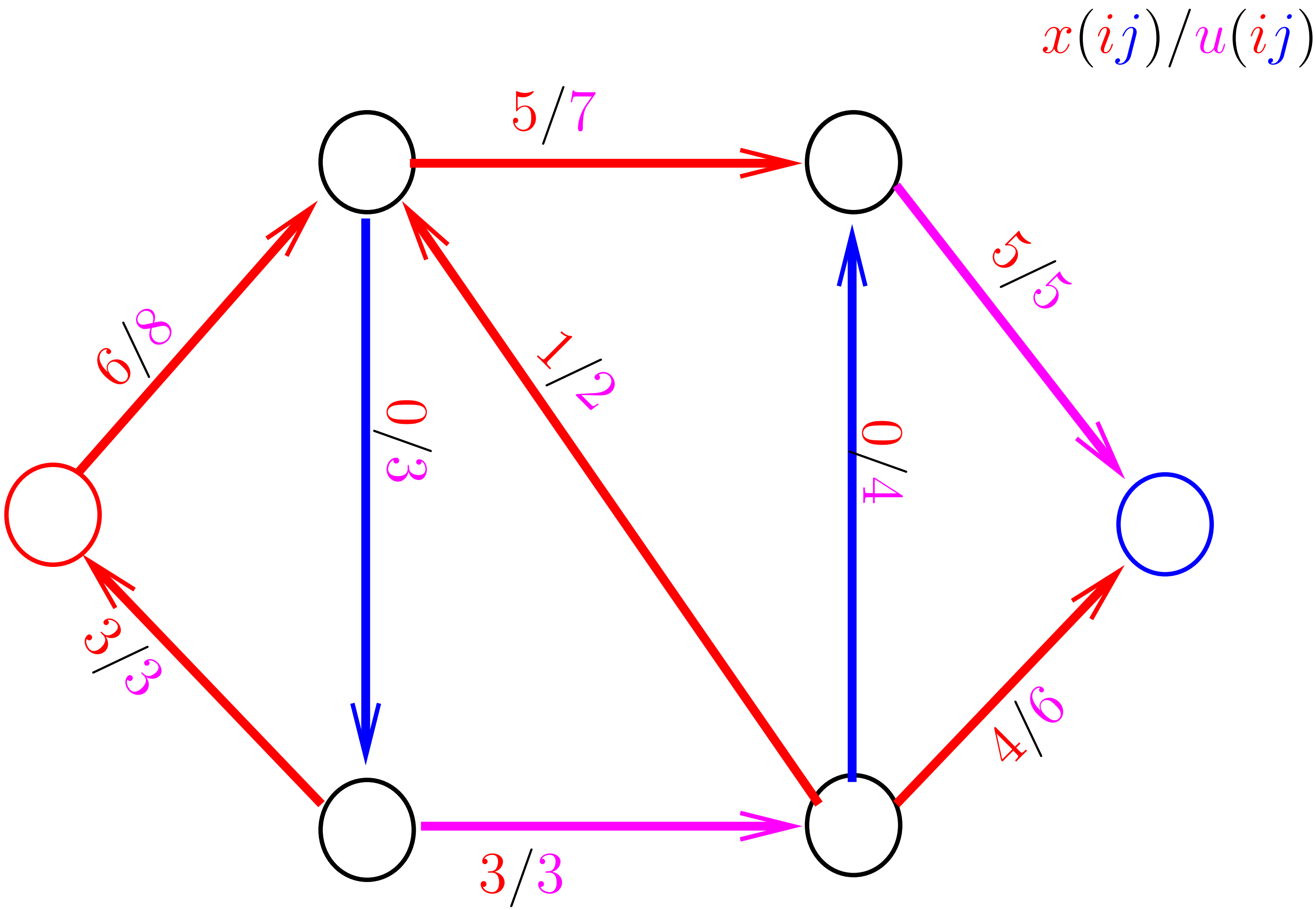
Não é verdade que existe uma estrutura arbórea associada a qualquer fluxo que respita u.

Um arco ij tal que $0 < x(ij) < u(ij)$ é dito livre.

Um fluxo é acíclico se o conjunto de seus arcos livres é acíclico.

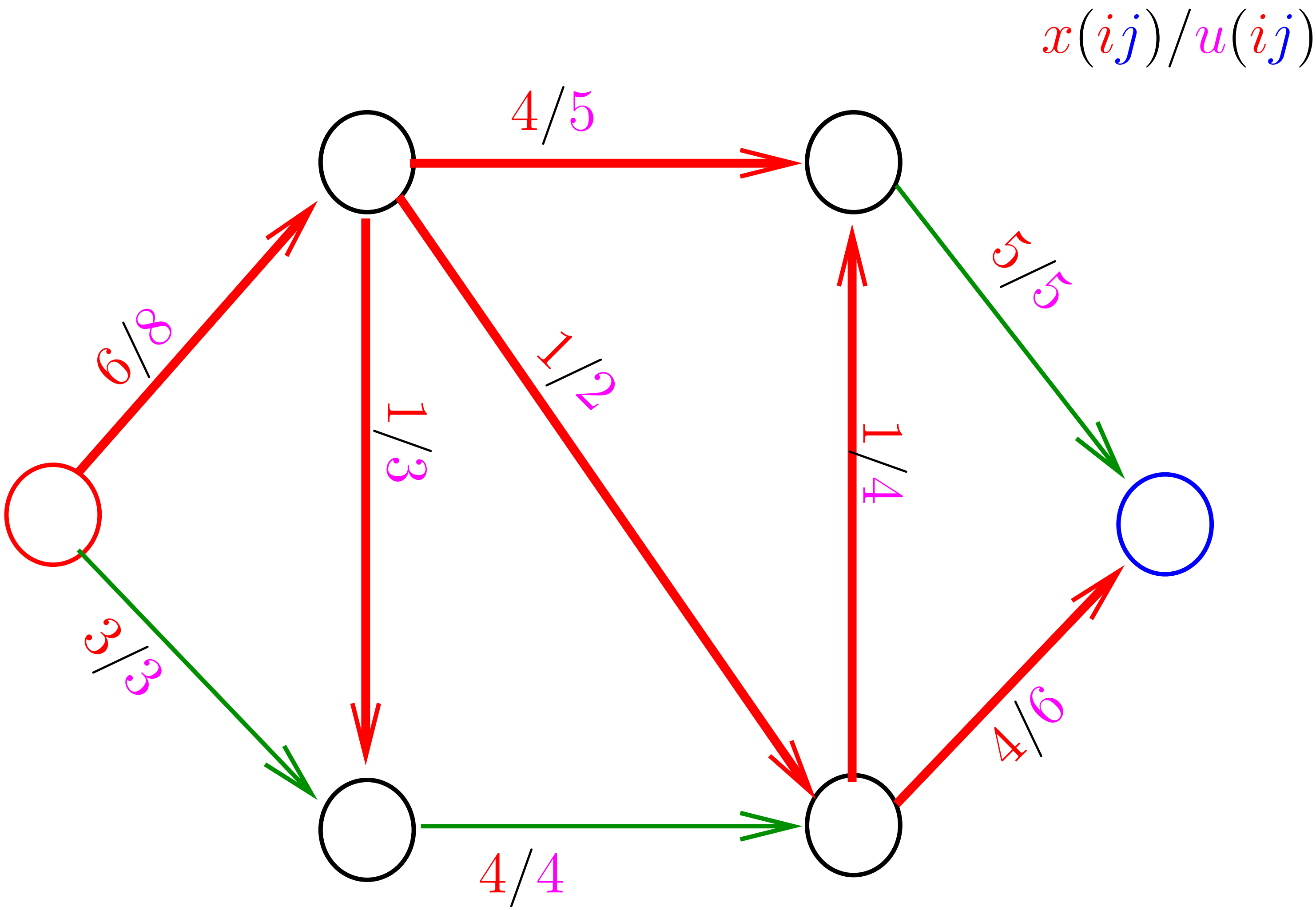
Estruturas arbóreas e fluxos (2)

Eis um exemplo de uma estrutura arbórea T, L, U associada a um fluxo x.



Estruturas arbóreas e fluxos (3)

Eis um exemplo de fluxo que não possui uma estrutura arbórea associada.



Estruturas arbóreas e fluxos (4)

Fato. Se x é um fluxo viável, então existe um fluxo viável **acíclico** x' tal que $cx' \leq cx$. A demonstração é algorítmica.

FLUXO-ACÍCLICO (N, A, u, c, x)

repita
  $A' \leftarrow \{ij \in A : 0 < x(ij) < u(ij)\}$
  $O \leftarrow$ PSEUDO-CICLO(N, A')
  se O está definido
    se $c(O) > 0$
      então $O \leftarrow$ “pseudo-ciclo reverso de O”
    $x \leftarrow$ BARATEIE-FLUXO(x, O, u)
até que O não está definido
devolva x

Barateie fluxo (esboço)

Recebe um fluxo x que respeita u e um pseudo-ciclo de custo não-negativo O e devolve o fluxo x após enviar "δ unidades de fluxo através de O".

BARATEIE-FLUXO (x, O, u)

$\delta_1 \leftarrow \min\{x(ij) : ij$ é arco de $\overleftarrow{O}\}$

$\delta_2 \leftarrow \min\{u(ij) - x(ij) : ij$ é arco de $\overrightarrow{O}\}$

$\delta \leftarrow \min\{\delta_1, \delta_2\}$

para cada arco ij em O **faça**

    se $ij \in \overrightarrow{O}$

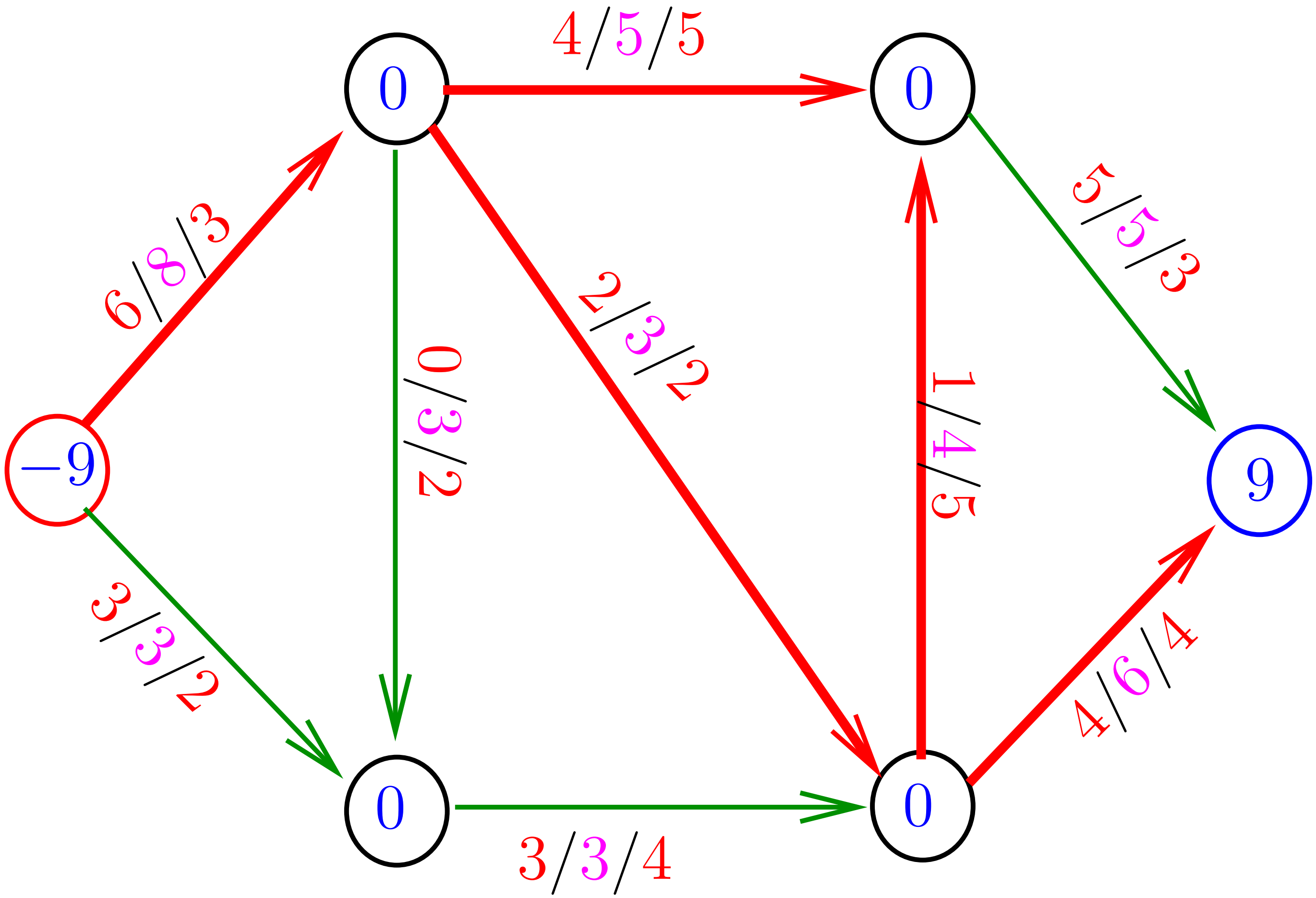
        então $x(ij) \leftarrow x(ij) + \delta$

        senão $x(ij) \leftarrow x(ij) - \delta$

devolva x

Simulação

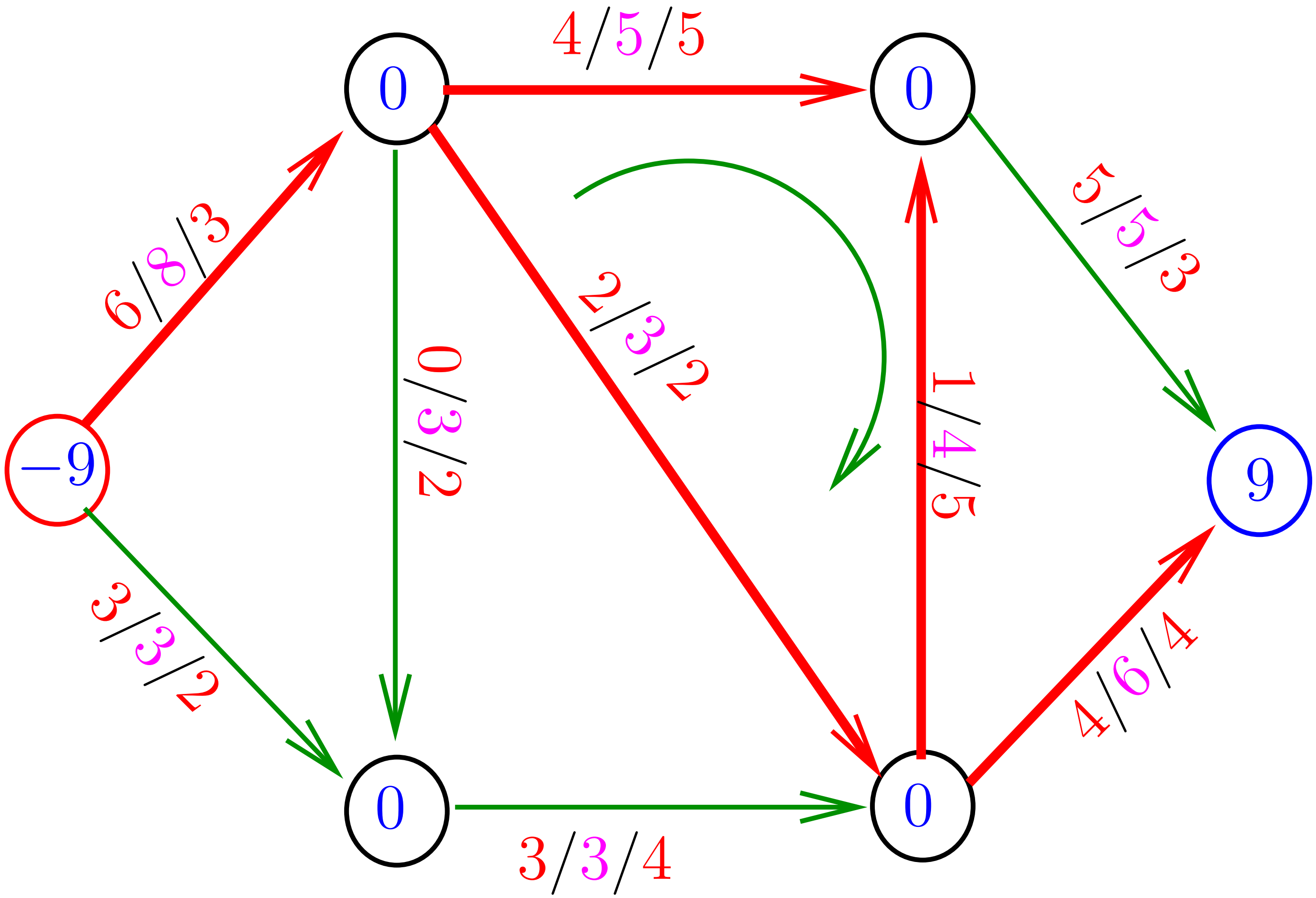
$x(ij)/u(ij)/c(ij)$



custo $= 96$

Simulação

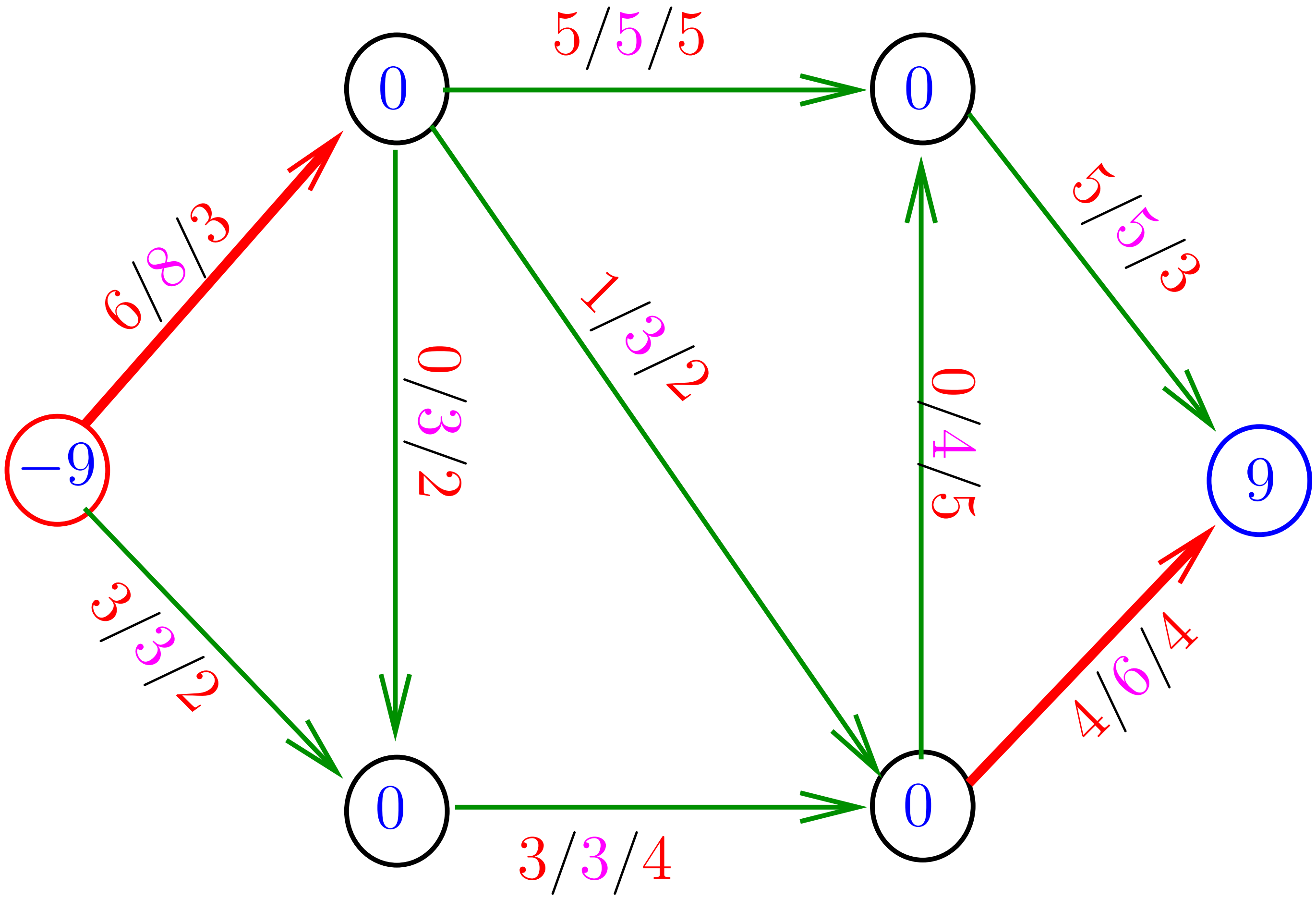
$x(ij)/u(ij)/c(ij)$



custo $= 96$

Simulação

$x(ij)/u(ij)/c(ij)$



custo $= 94$

Estrutura arbórea e fluxos acíclicos

Recebe uma rede (N, A, u) e um fluxo acíclico x e devolve uma estrutura arbórea associada a x.

ESTRUTURA-ARBÓREA (N, A, u, b, c, x)

$T \leftarrow \{ij : 0 < x(ij) < u(ij)\}$
para cada ij em A **faça**
    se $(N, T \cup \{ij\})$ é acíclico
        então $T \leftarrow T \cup \{ij\}$
$L \leftarrow \{ij \notin T : x(ij) = 0\}$
$U \leftarrow \{ij \notin T : x(ij) = u(ij)\}$
devolva T, L, U

Conclusões

Existe uma estrutura arbórea associada a um fluxo se e somente se o fluxo é acíclico.

Toda rede que admite um fluxo viável, admite um fluxo víável acíclico de custo mínimo.

Assim, podemos nos restringir a procurar fluxos viáveis acíclicos de custo mínimo.

Custo mínimo e ciclo negativo

Se x é um fluxo viável, então vale uma e apenas uma das afirmações:

- x é um fluxo viável de custo mínimo;
- existe um ciclo de custo negativo na rede residual.

Se x é um fluxo viável, então vale uma e apenas uma das afirmações:

- existe uma "certa" função potencial y na rede residual;
- existe um ciclo de custo negativo na rede residual.

Folgas complementares (1)

Seja x um fluxo viável.

Seja y uma função potencial.

As folgas de x e y são complementares se

$$y(j) - y(i) < c(ij) \Rightarrow x(ij) = 0 \quad \text{e}$$
$$y(j) - y(i) > c(ij) \Rightarrow x(ij) = u(ij) \ .$$

Fato. Se as folgas de x e y são complementares então x é um fluxo viável de custo mínimo (é y é alguma-coisa máximo).

Folgas complementares (2)

Equivalentemente:

Seja x um fluxo viável.

Seja y uma função potencial.

As folgas de x e y são complementares se

$$
\begin{array}{ll}
x(ij) = 0 & \Rightarrow y(j) - y(i) \leq c(ij) \\
0 < x(ij) < u(ij) & \Rightarrow y(j) - y(i) = c(ij) \ \text{ e} \\
x(ij) = u(ij) & \Rightarrow y(j) - y(i) \geq c(ij) \ .
\end{array}
$$

Fato. Se as folgas de x e y são complementares então x é um fluxo viável de custo mínimo (é y é alguma-coisa máximo).

Estruturas arbóreas e potencias ótimos

Seja (N, A, u, b, c) uma rede com função capacidade u...

$x =$ fluxo viável

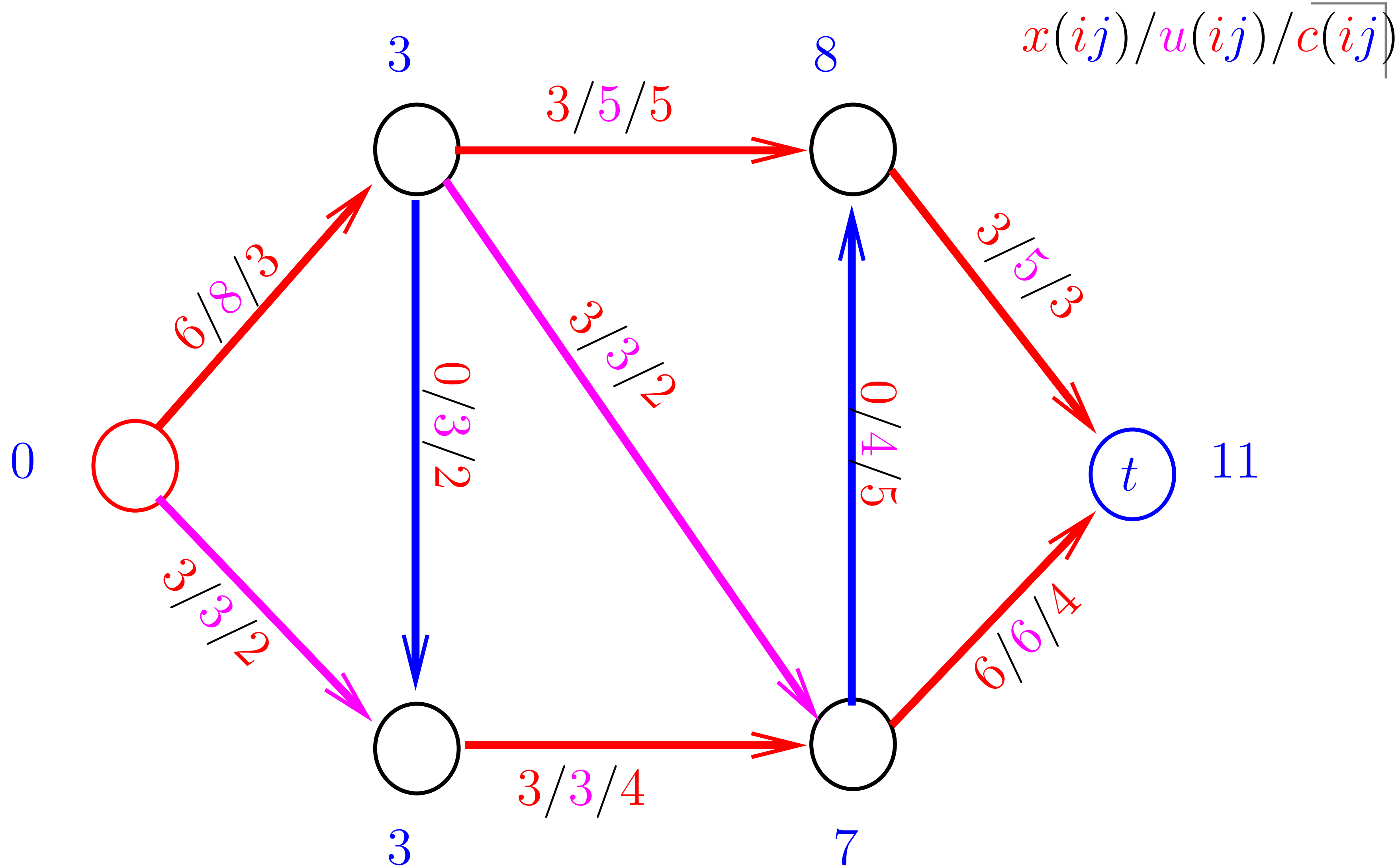
$T, L, U =$ estrutura arbórea associada a x

Dizemos que uma função potencial y determinada por T, c é ótima se

$$\begin{array}{ll} ij \text{ em } L & \Rightarrow y(j) - y(i) \leq c(ij) \quad \text{e} \\ ij \text{ em } U & \Rightarrow y(j) - y(i) \geq c(ij) \ . \end{array}$$

Fato. Se x é um fluxo viável e y é uma função potencial ótima então x é um fluxo viável de custo mínimo.

Exemplo



custo $= 92$

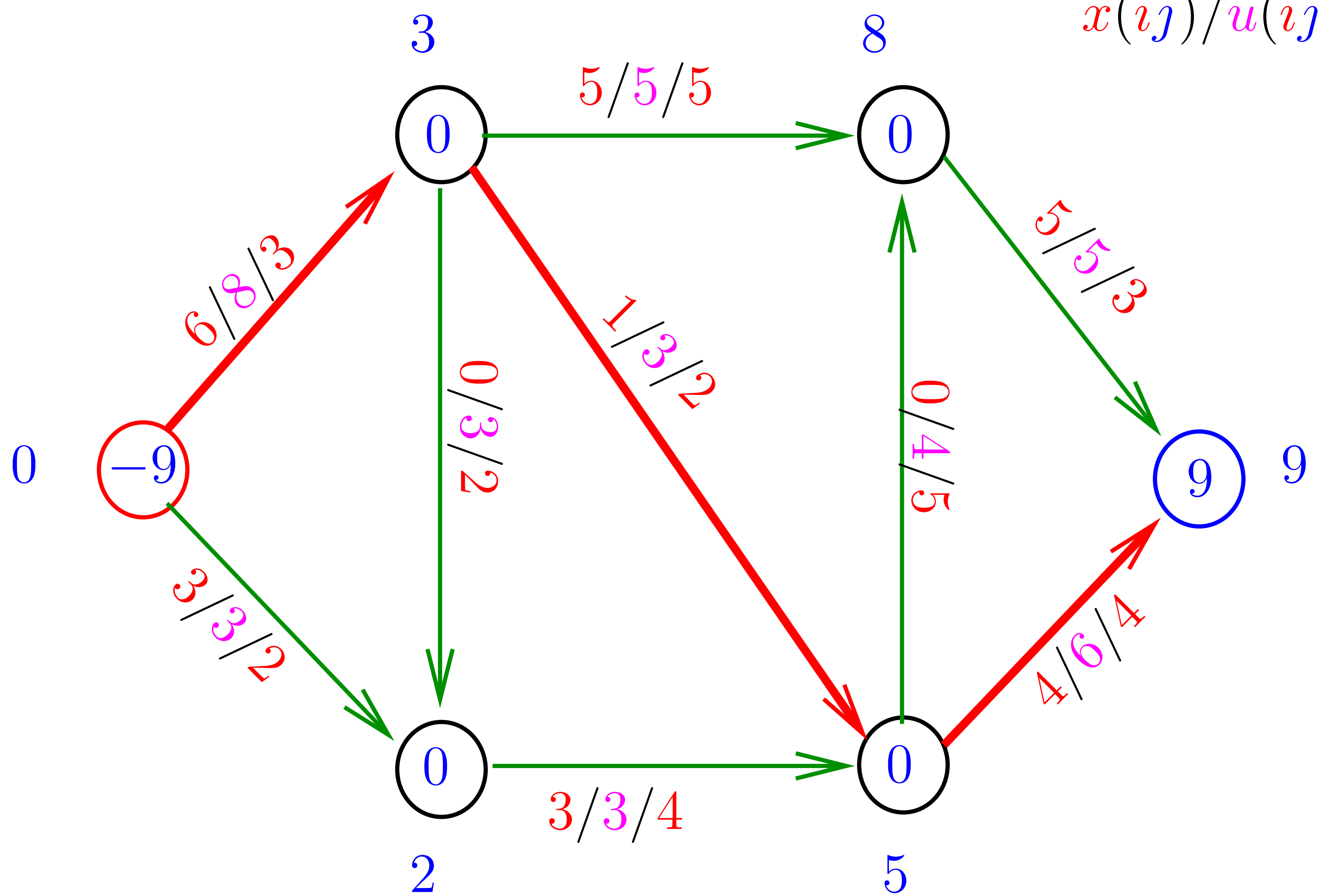
Estruturas arbóreas e potencias ótimos

Suponha que x é uma fluxo viável e seja T, L, U uma estrutura arbórea associada a x. Se a função potencial y determinada por c, T é ótima, então o para x, y tem folgas complementares e, portanto, x é um fluxo viável de custo mínimo.

Estratégia do simplex para redes: procurar uma estrutura arbórea associada am fluxo viável x tal que a função potencial y determinada por T e c seja ótima.

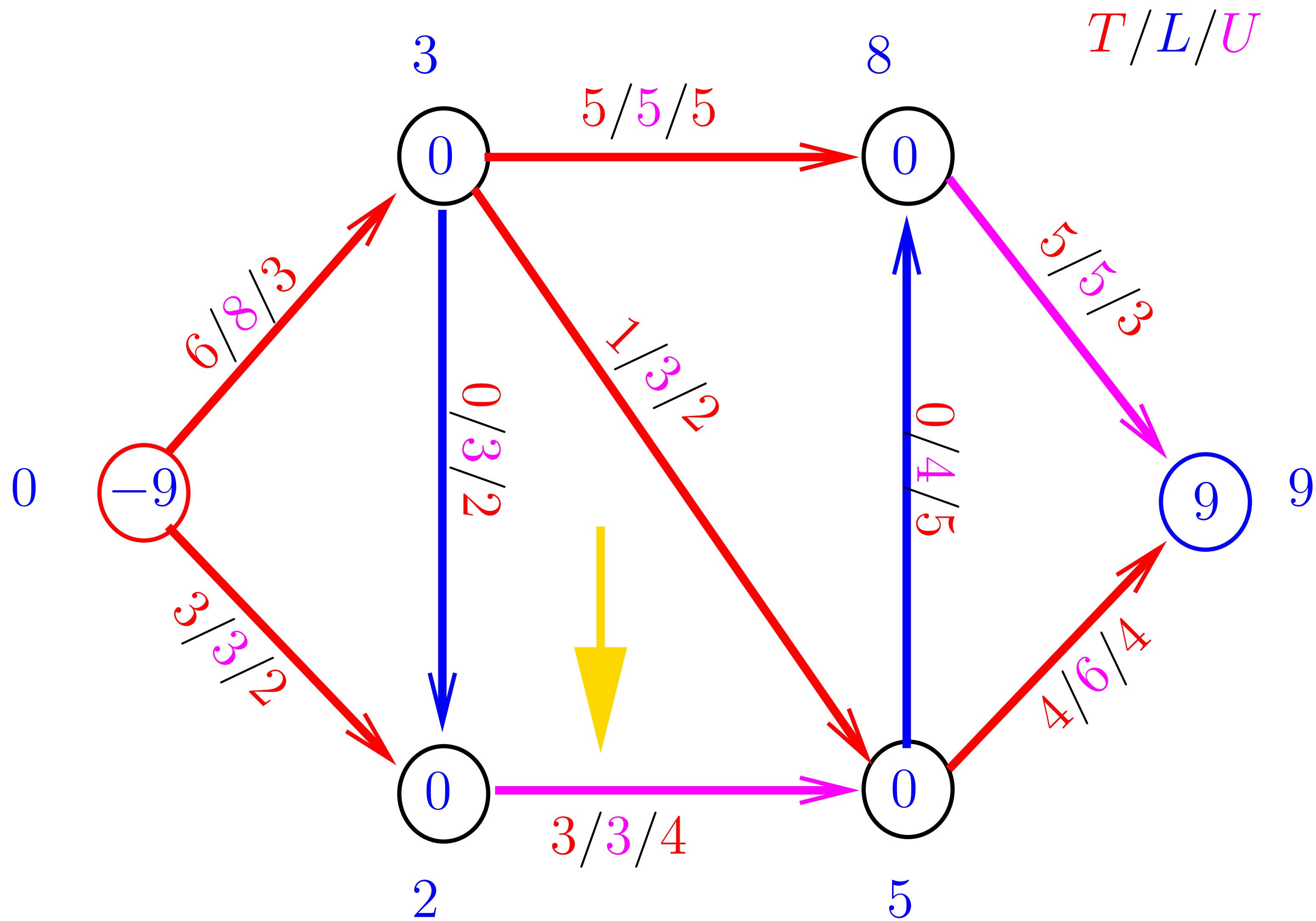
Fluxo viável acíclico

$x(ij)/u(ij)/c(ij)$



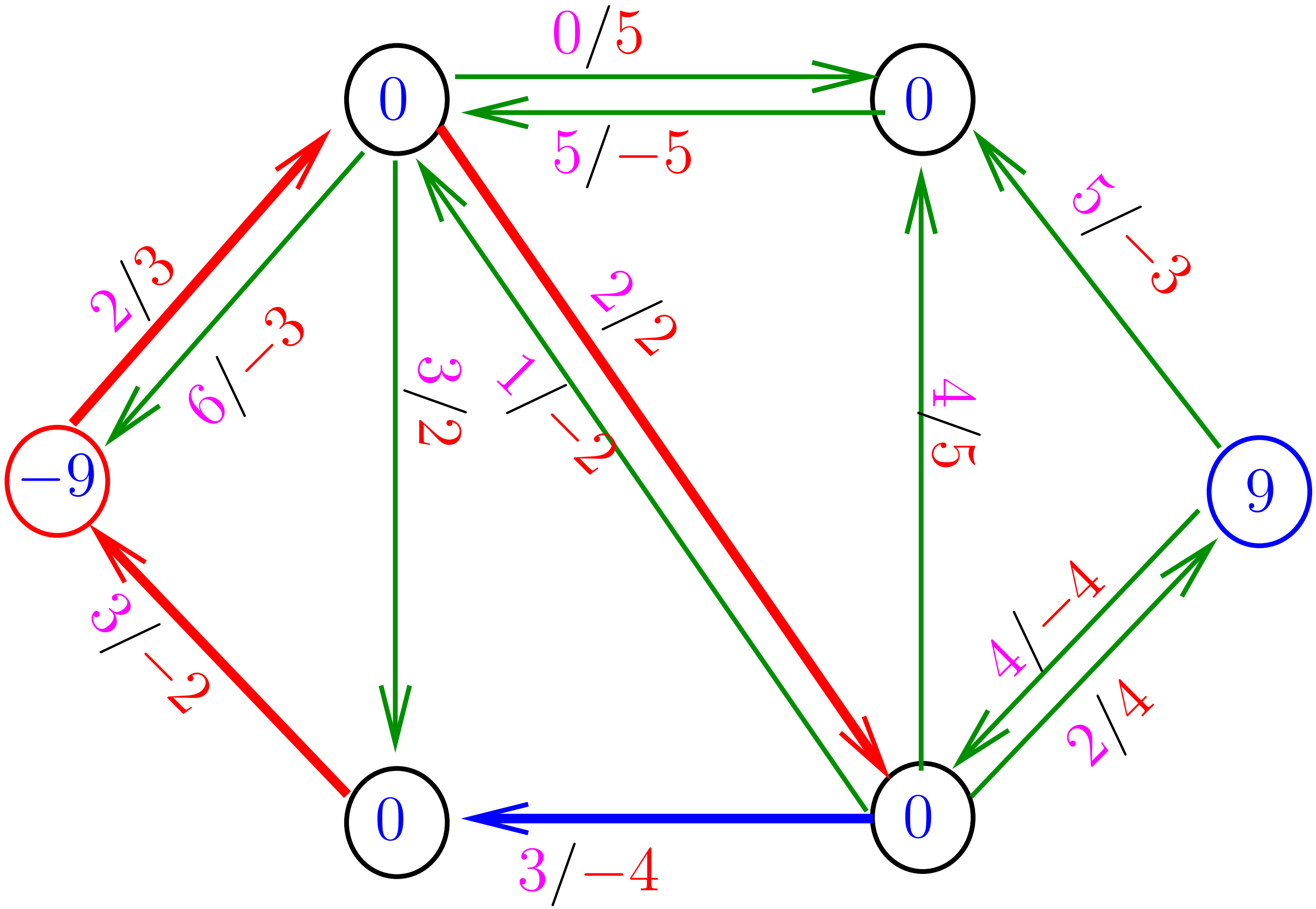
custo $= 94$

Estrutura arbórea (1)

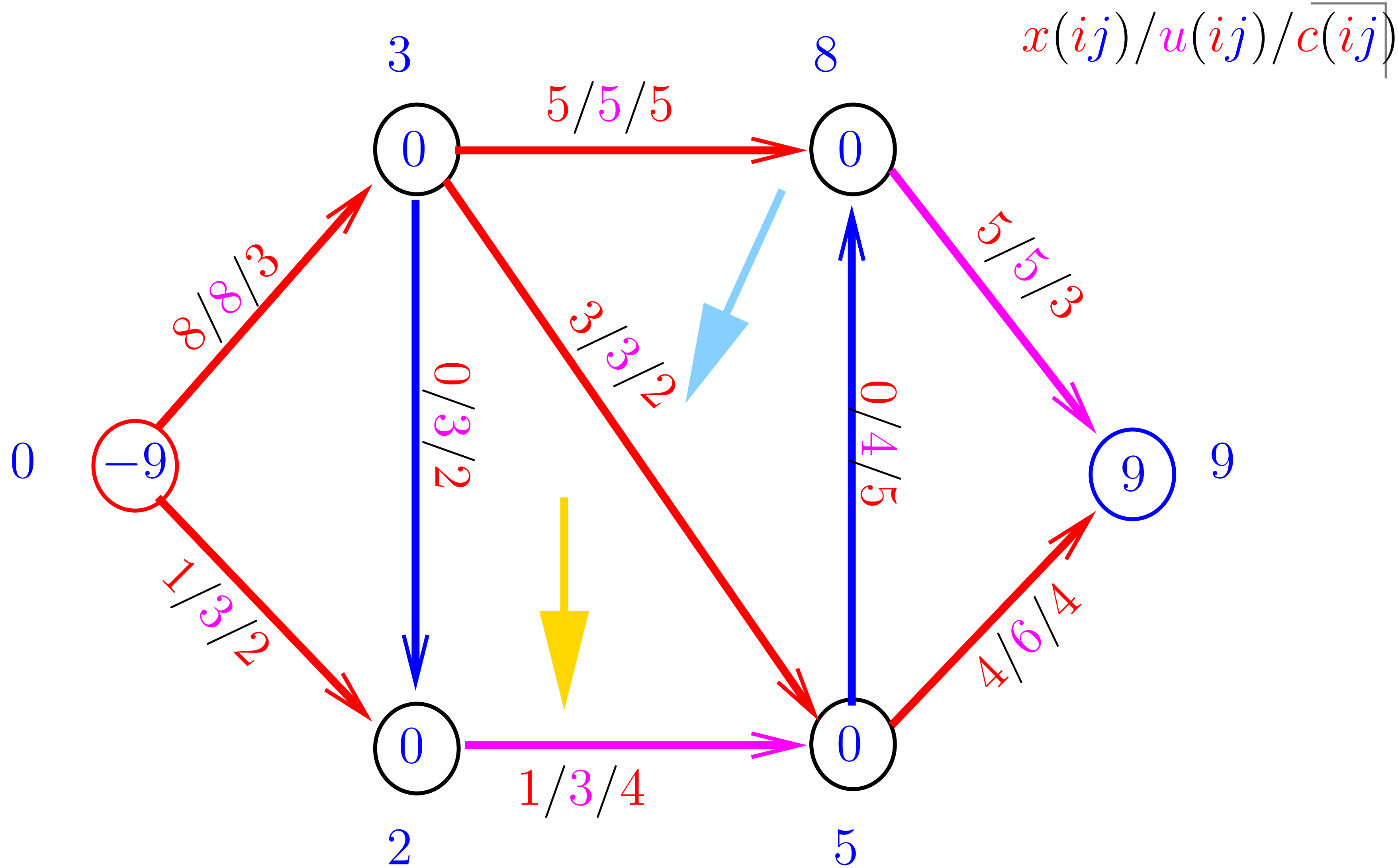


custo $= 94$

Rede residual (1)

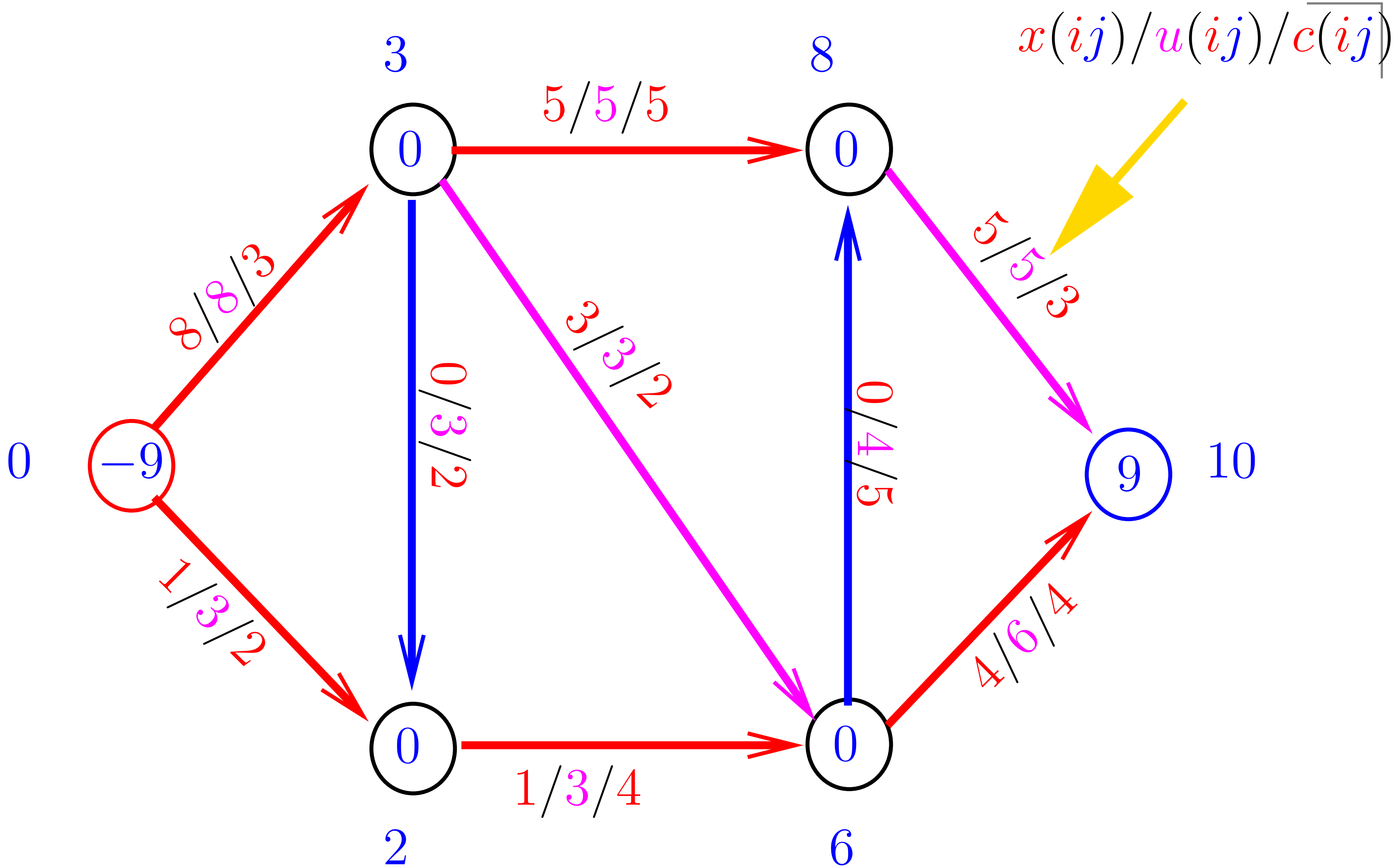


Fluxo viável (2)



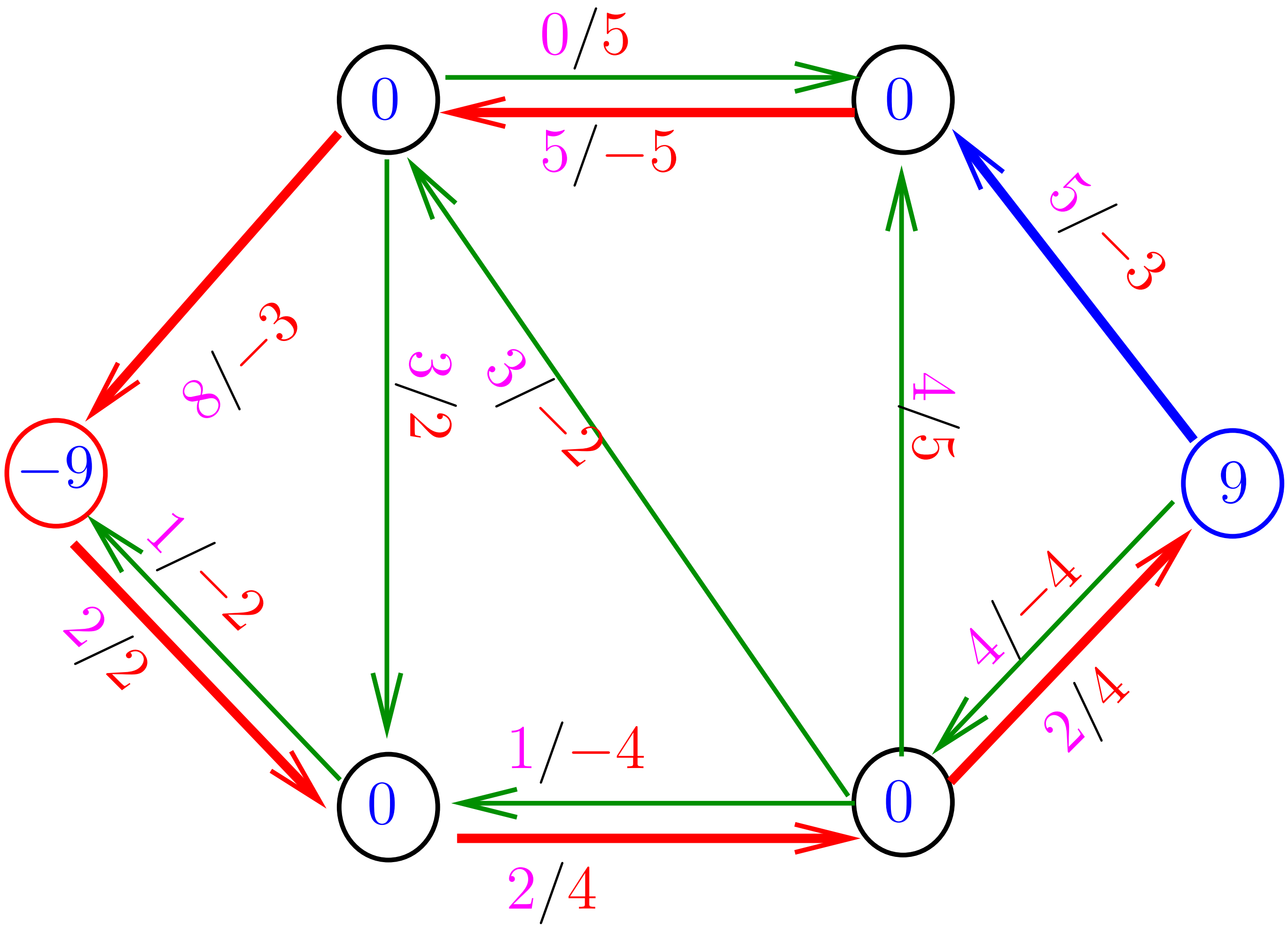
custo $= 92$

Estrutura arbórea (2)

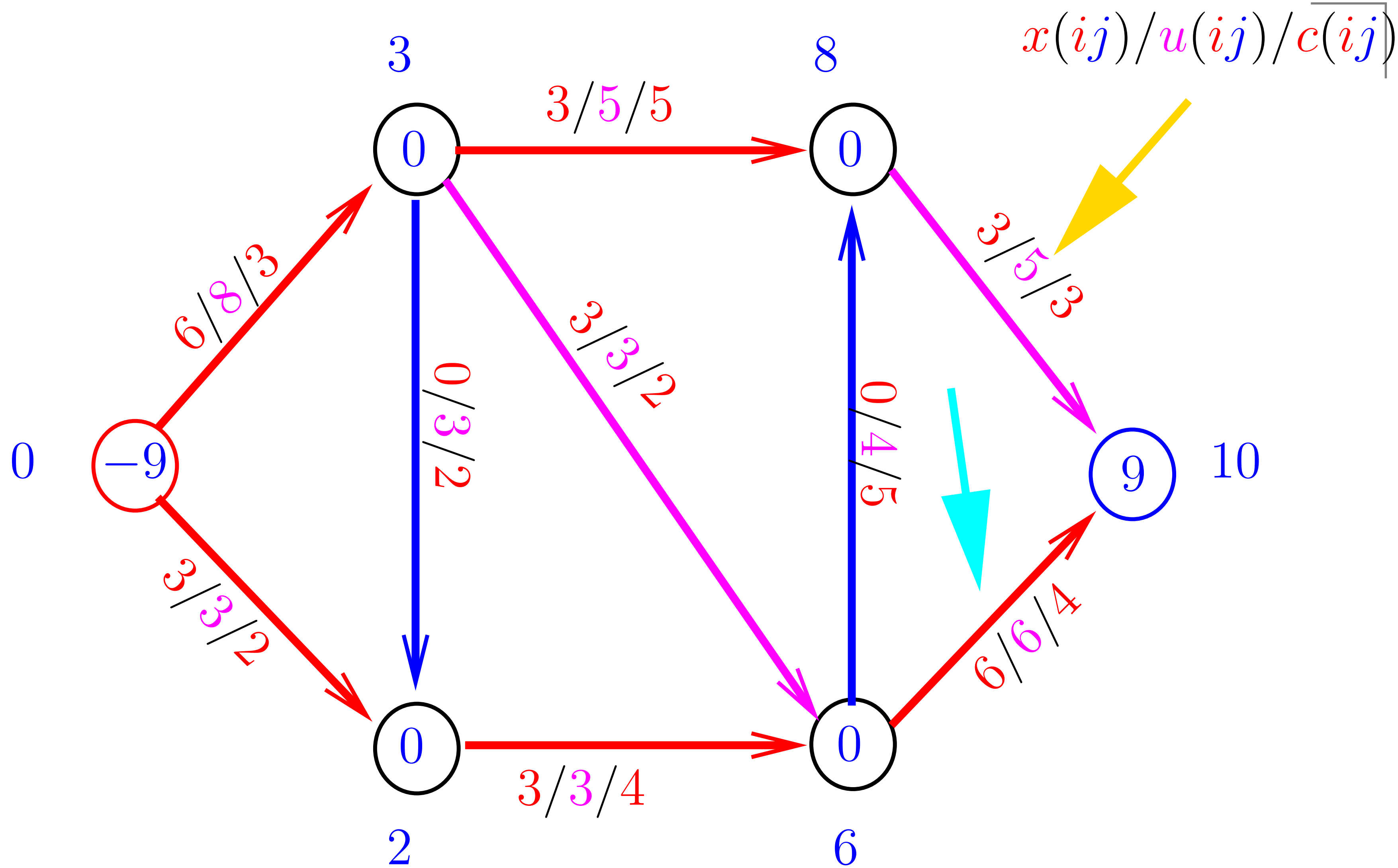


custo $= 92$

Rede residual (2)

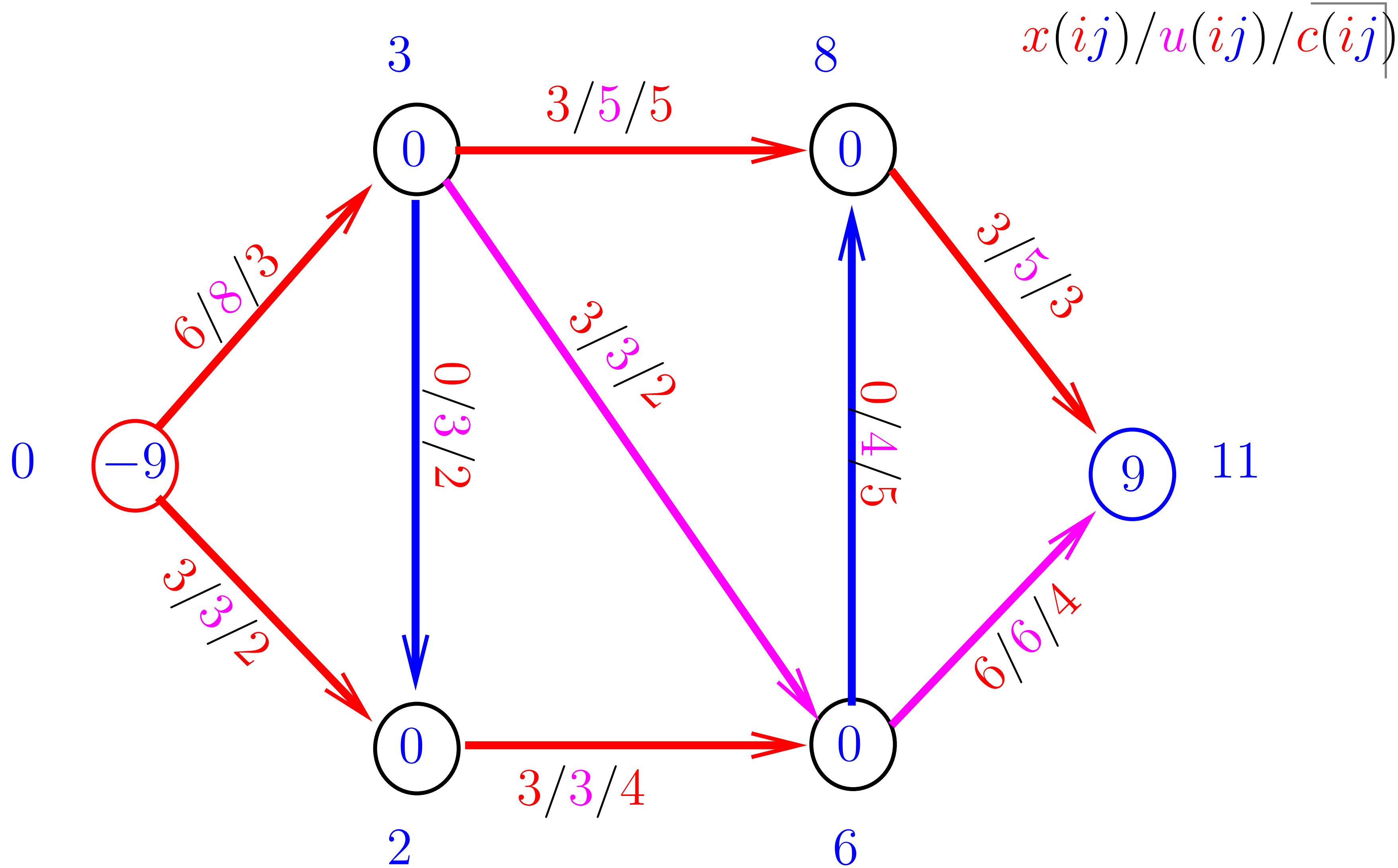


Fluxo viável (3)



custo $= 92$

Estrutura ótima



custo $= 92$

Simplex para redes (esboço)

O esboço supõe que a rede dada possui um fluxo viável.

NETWORK-SIMPLEX (N, A, u, b, c)

```
x ← FLUXO-VIÁVEL (N, A, u, b)
x ← FLUXO-ACÍCLICO (N, A, c, x)
⟨T, L, U⟩ ← ESTRUTURA-ARBÓREA (N, A, u, x)
y ← POTENCIAL-ARBÓREO (T, c)
enquanto existe ij em L ∪ U "insatisfeito" faça
        O ← ciclo negativo determinado por T ∪ {ij}
        x ← BARATEIE-FLUXO (x, O, u)
        ⟨T, L, U⟩ ← PIVOTAÇÃO (ij, x, O, T, L, U)
        y ← POTENCIAL-ARBÓREO (T, c)
devolva x e y
```

Pivotação (esboço)

PIVOTAÇÃO (ij, x, O, T, L, U)

$O_L \leftarrow \{ij \in O : x(ij) = 0\}$
$O_U \leftarrow \{ij \in O : x(ij) = u(ij)\}$
$pq \leftarrow$ um arco em $O_L \cup O_U$
se ij está em L
    então $L \leftarrow L - \{ij\}$
    senão $U \leftarrow U - \{ij\}$
$T \leftarrow (T - \{pq\}) + \{ij\}$
se pq está em O_L
    então $L \leftarrow L \cup \{pq\}$
    senão $U \leftarrow U \cup \{pq\}$
devolva T, L, U

Invariantes

No início de cada iteração do bloco de linhas 6–9 valem as seguintes invariantes:

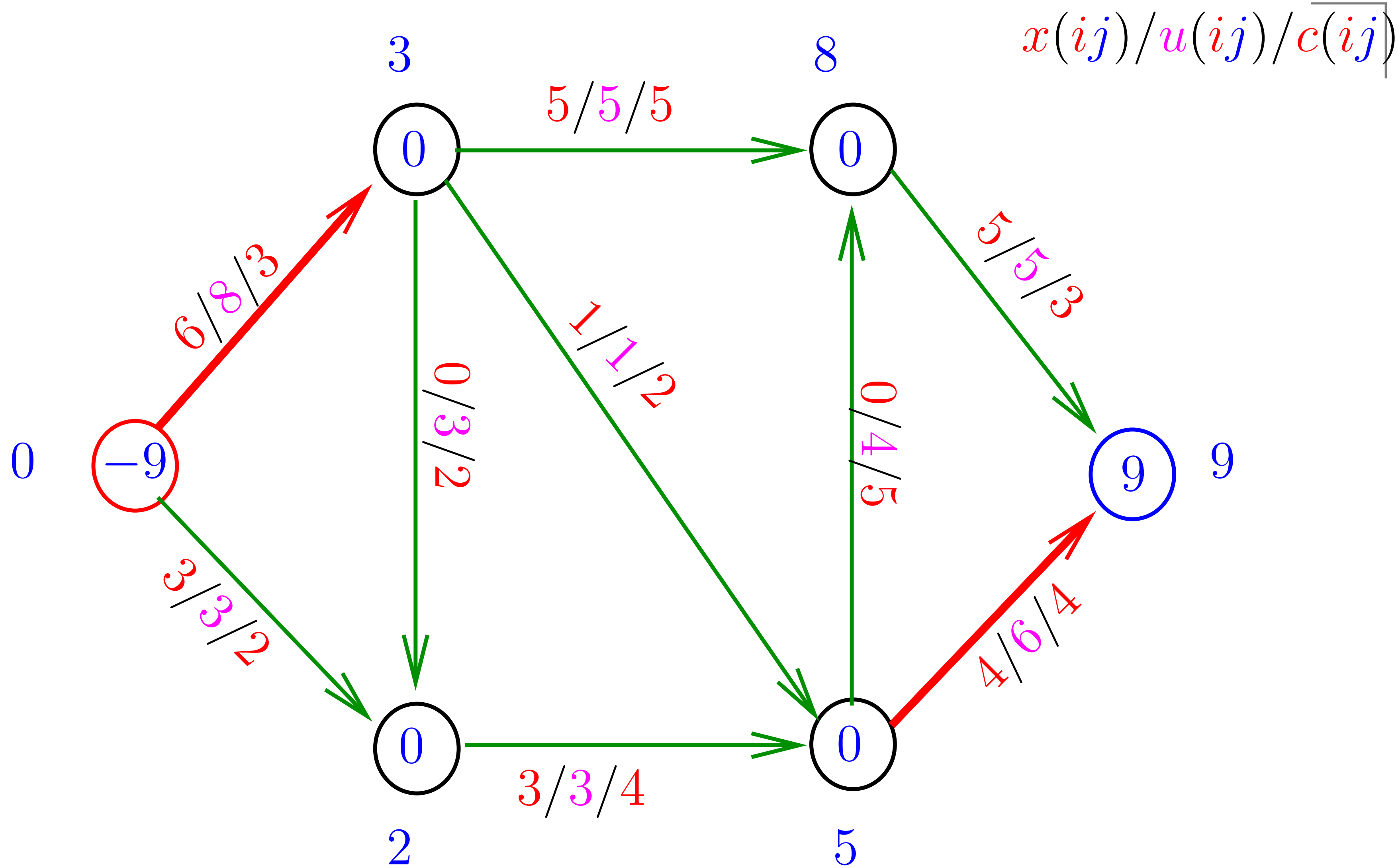
(i0) x é um fluxo viável;

(i1) T, L, U é uma estrutura arbórea associada a x;

(i2) y é uma função potencial determinada por T, c.

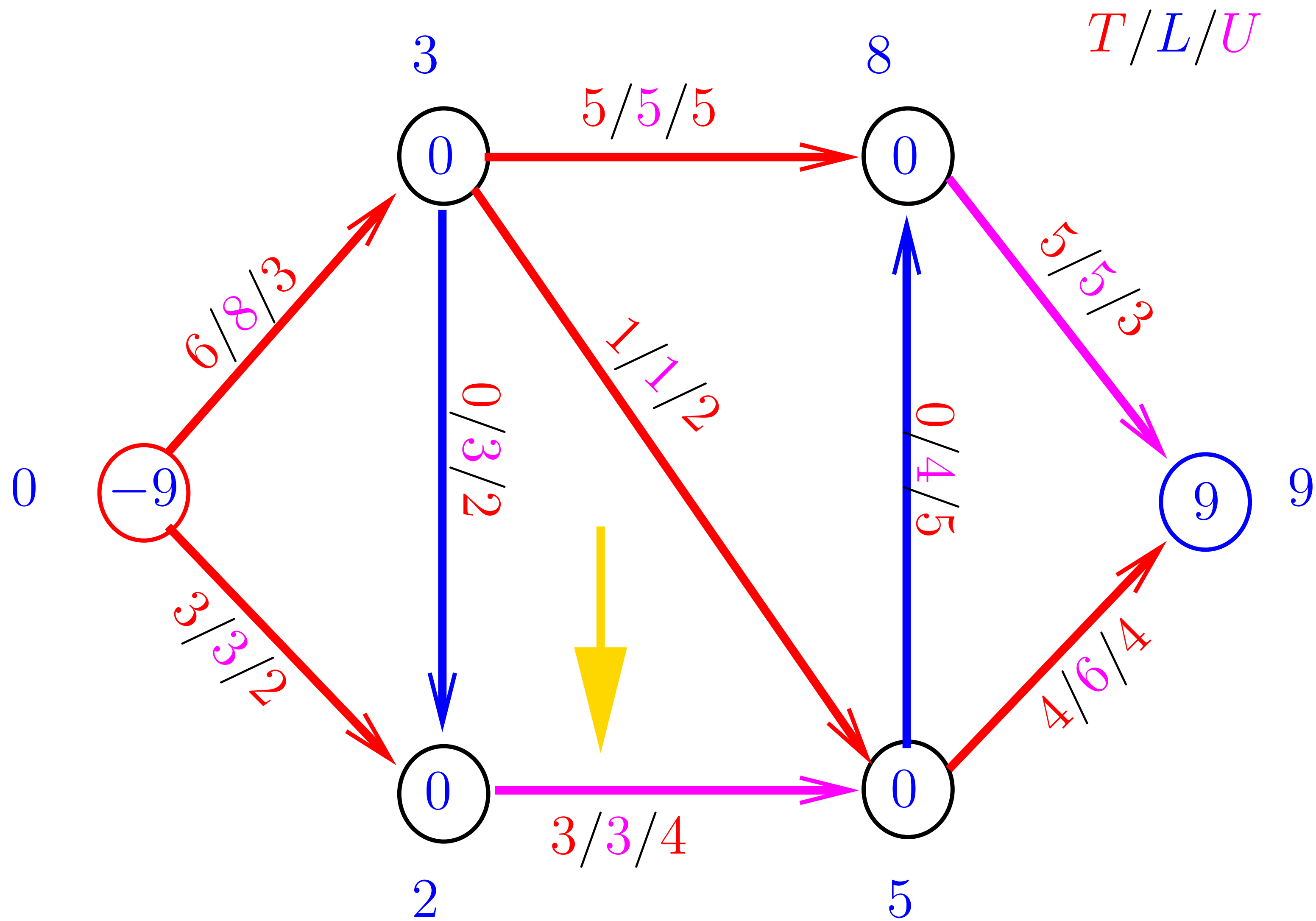
Dessas relações invariantes tem-se que quando o algoritmo pára y é uma função potencial ótima determinada por T, c e portanto x é um fluxo viável (acíclico) de custo mínimo.

Fluxo viável acíclico



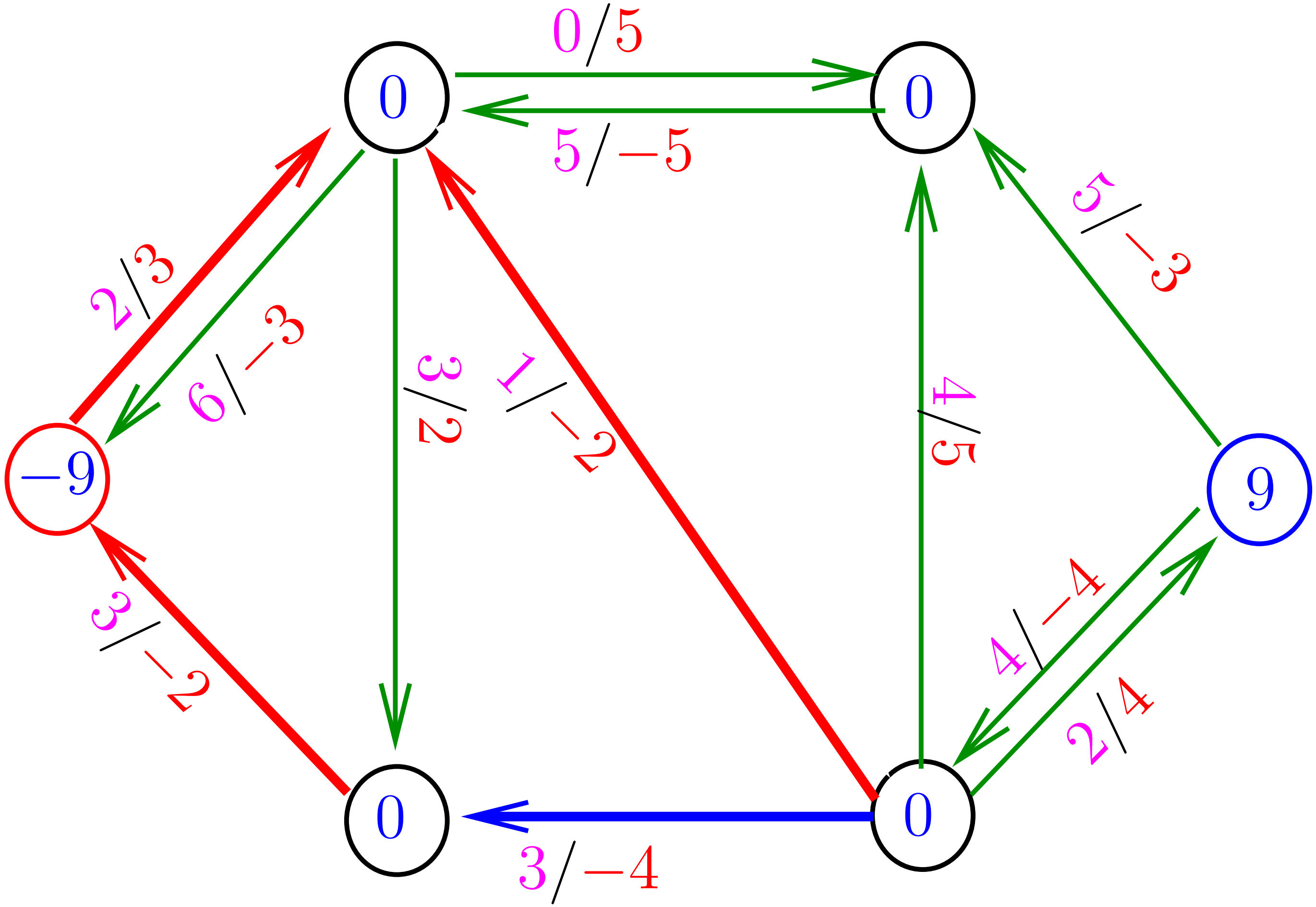
custo $= 94$

Estrutura arbórea (1)

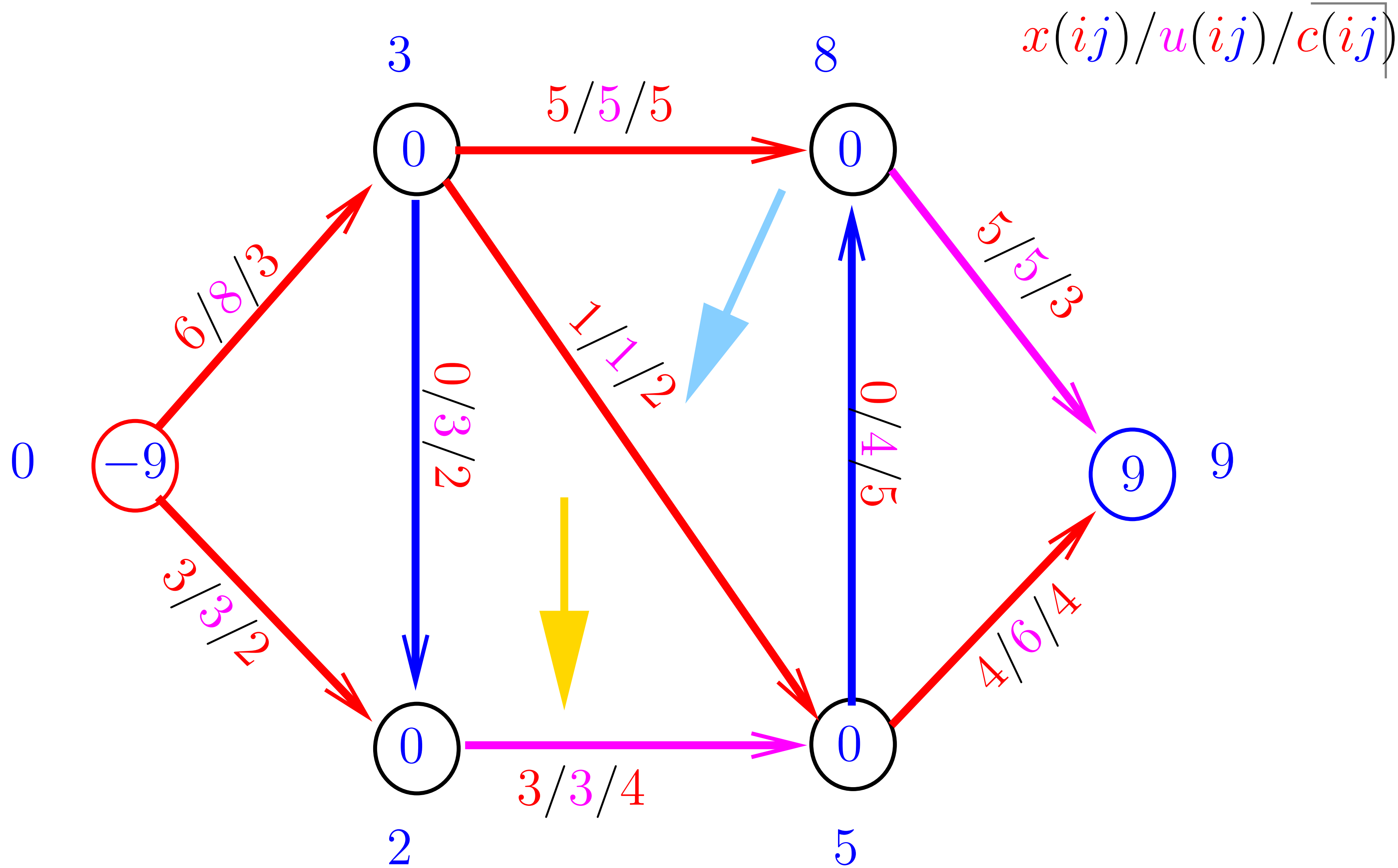


custo $= 94$

Rede residual (1)

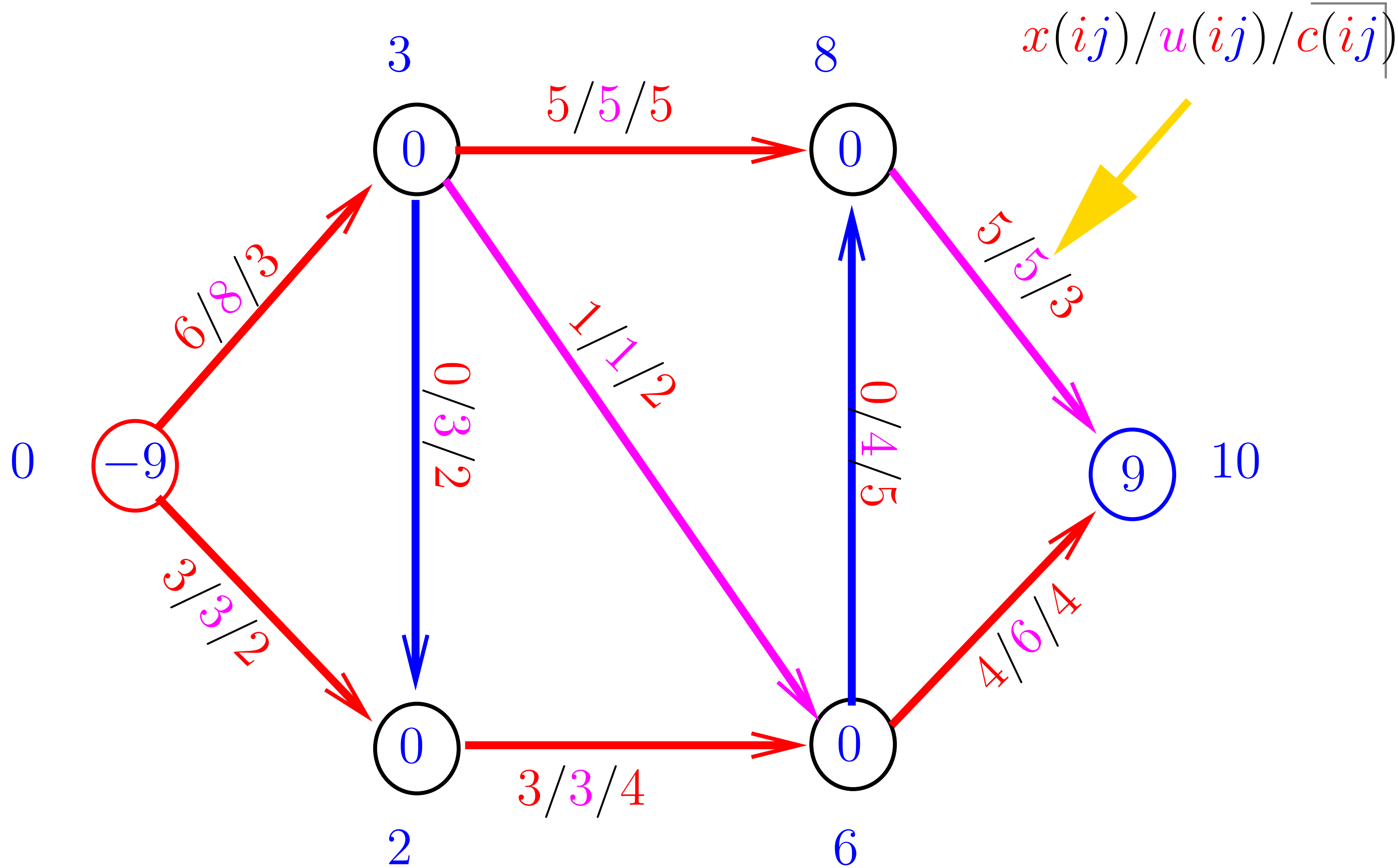


Fluxo viável (2)



custo $= 94$

Estrutura arbórea (2)

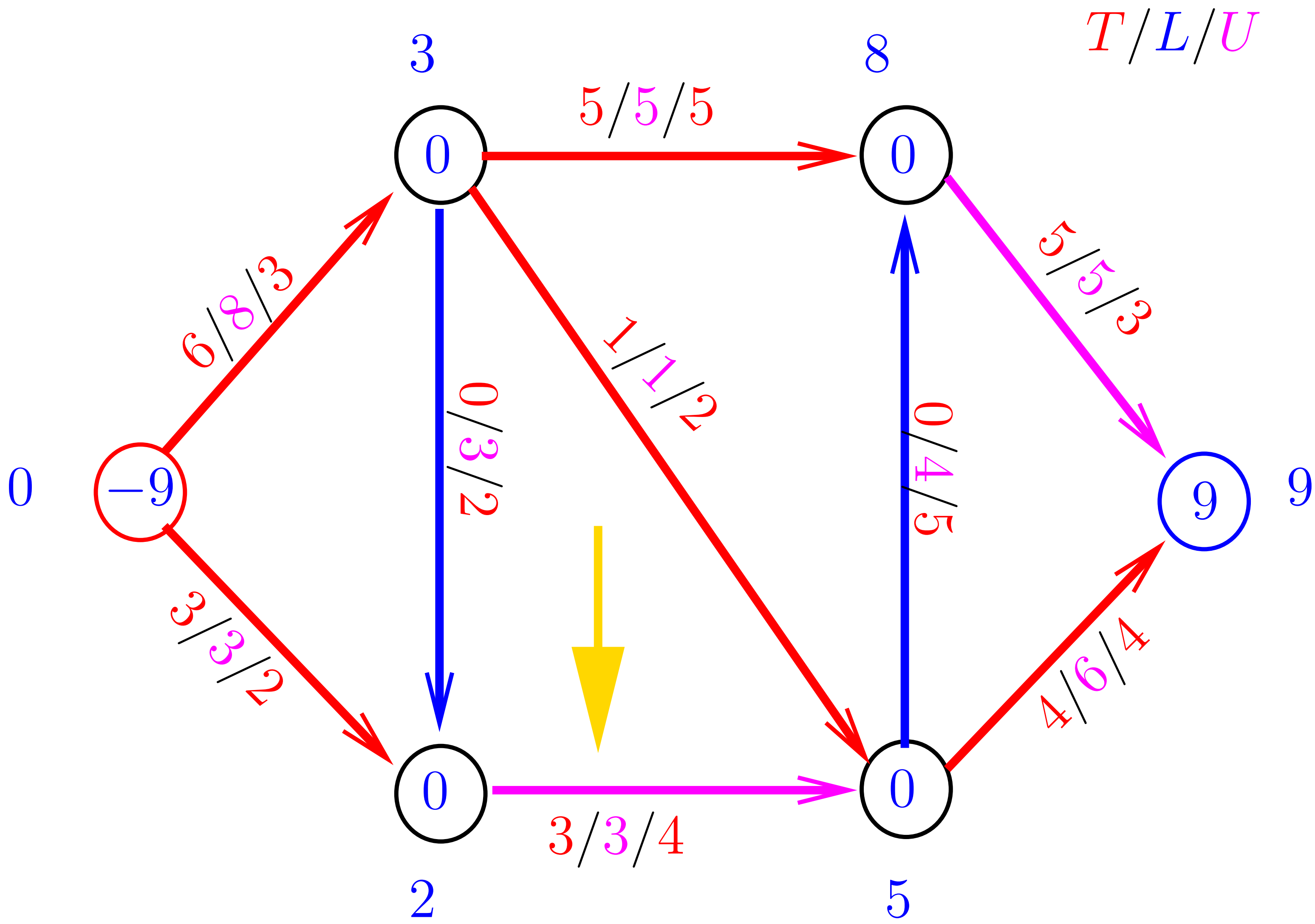


custo $= 94$

Iteração degenerada

Estrutura degenerada

Dizemos que uma estrutura arbórea é degenerada se $x(ij) = 0$ ou $x(ij) = u(ij)$ para algum árco ij em T.



Estruturas arbóreas fortes

Se o algoritmo NETWORK-SIMPLEX não realiza iterações degeneradas então o número de iterações é $< mCU$.

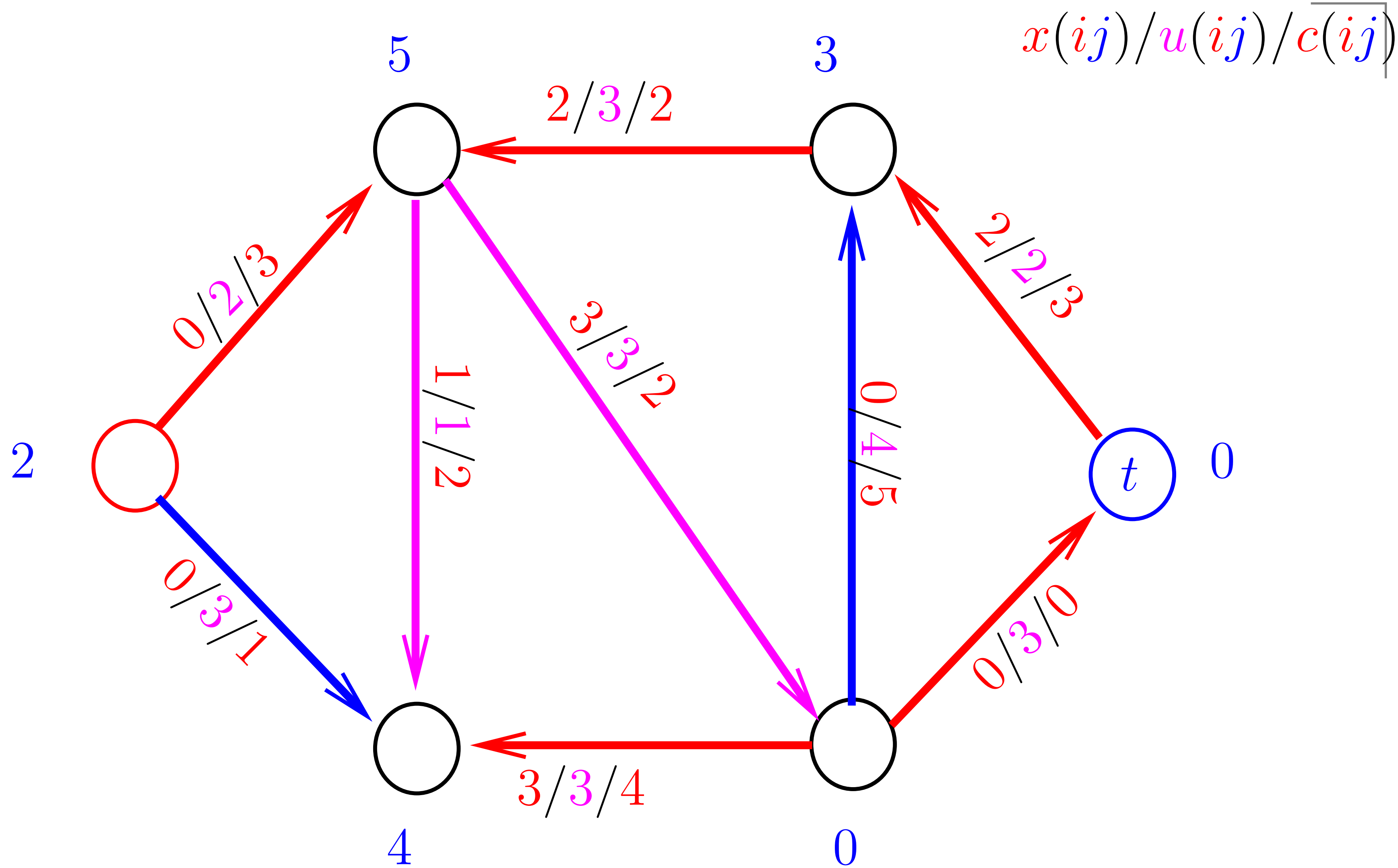
É possível forçar a convergência do algoritmo se trabalharmos com "estruturas arbóreas fortes".

Uma estrutura arbórea T, L, U associada a um fluxo x é forte em relação a um certo nó t (raiz) se

- todo arco ij em T tal que $x(ij) = 0$ aponta em direção a r e
- todo arco ij em T tal que $x(ij) = u(ij)$ aponta na direção oposta a r.

Em outras palavras: existe um pseudo-caminho de incremento em T de qualquer nó a r. em T a r

Estrutura arbórea forte



custo $= 30$

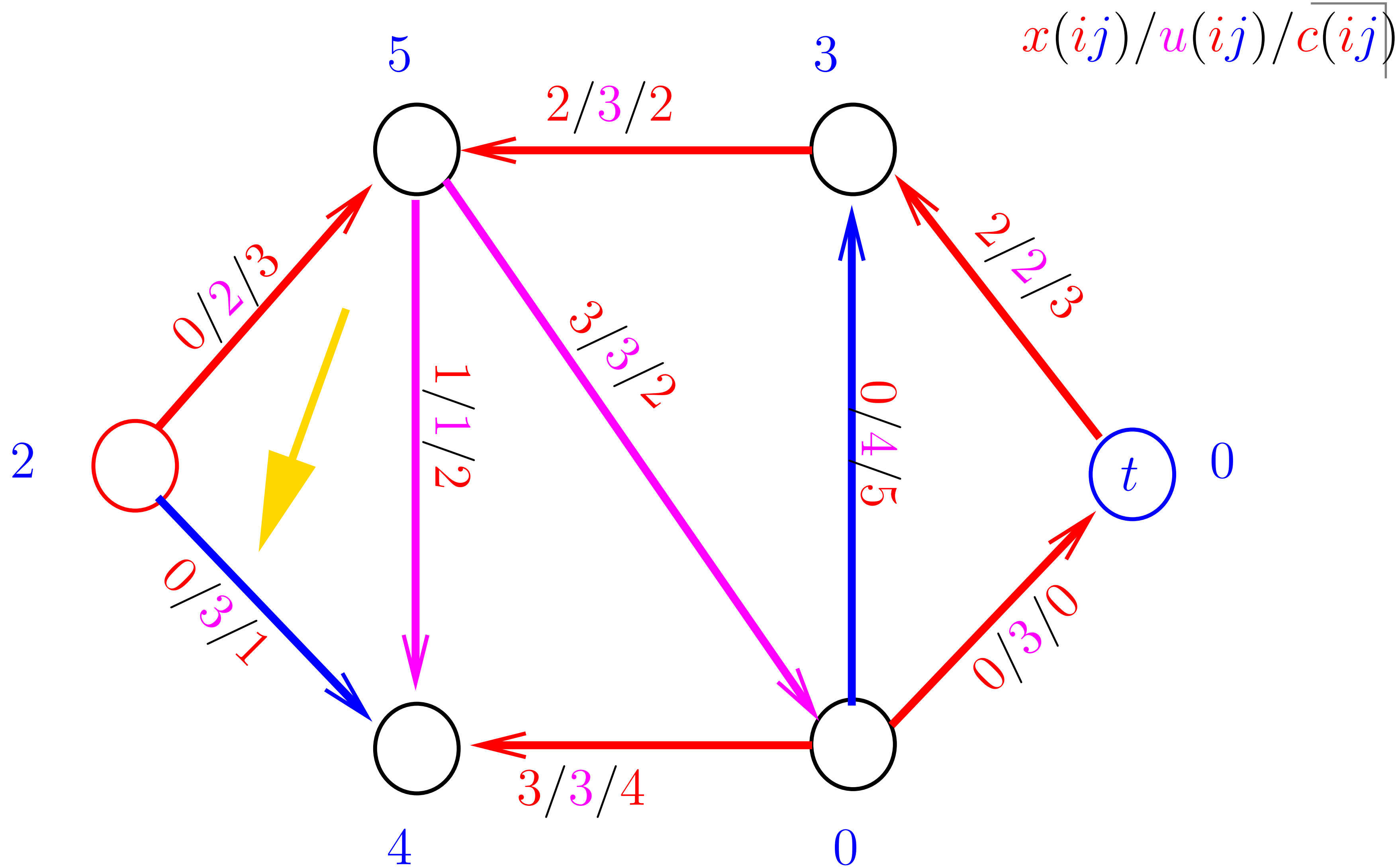
Regra de Cunningham

Dada uma estrutura T, L, U e um arco ij que não está em T, existe um único ciclo O em $T \cup \{ij\}$. O ápice de O é o nó de O mais perto de t.

Eis a regra de escolha do arco pq que sairá de T:

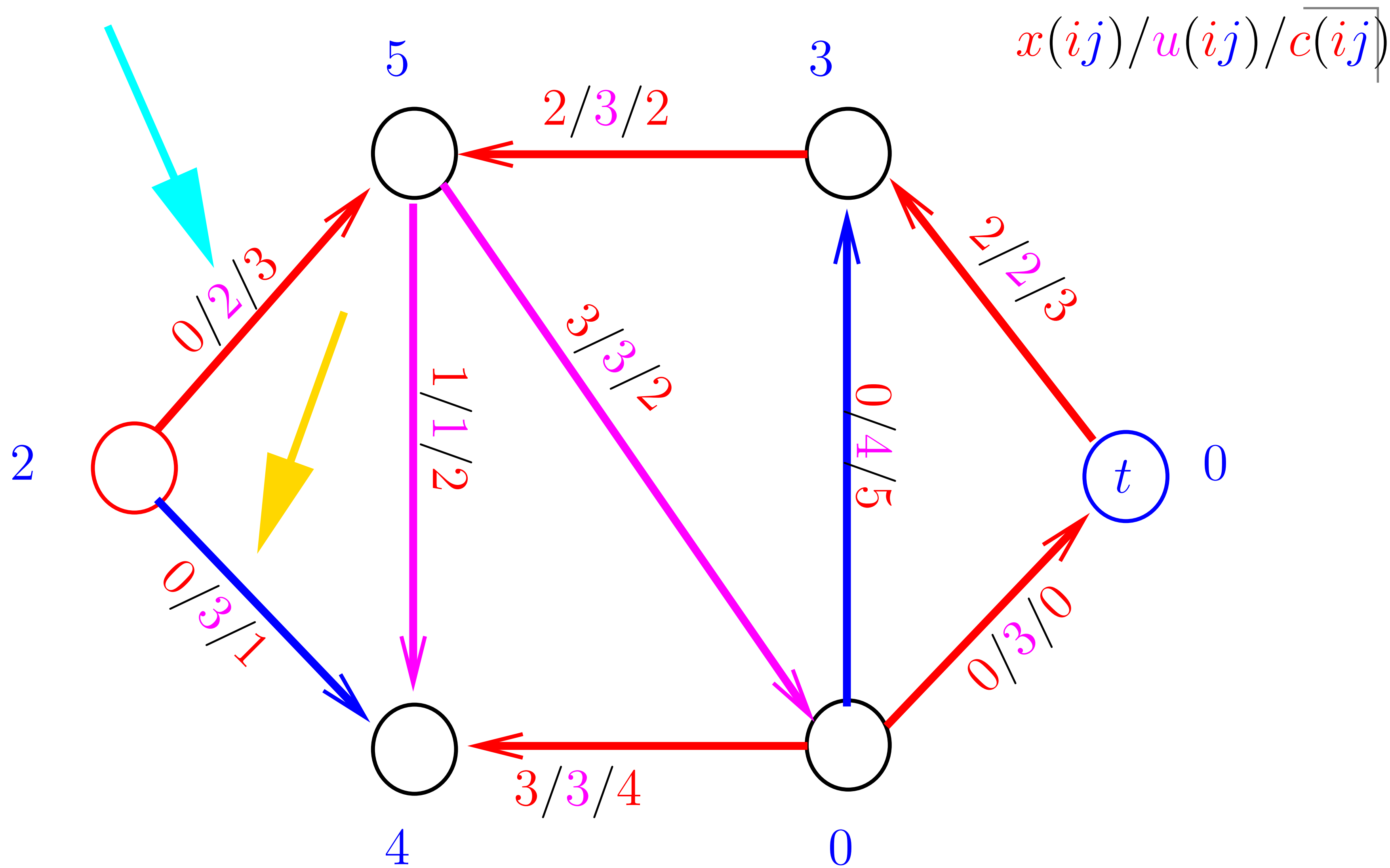
> percorra O a partir do seu ápice na direção ij, se ij está em L, ou na direção ji, se ij esta em U, e seja pq o último arco tal que $x(pq) = 0$ ou $x(pq) = u(pq)$.

Estrutura arbórea forte



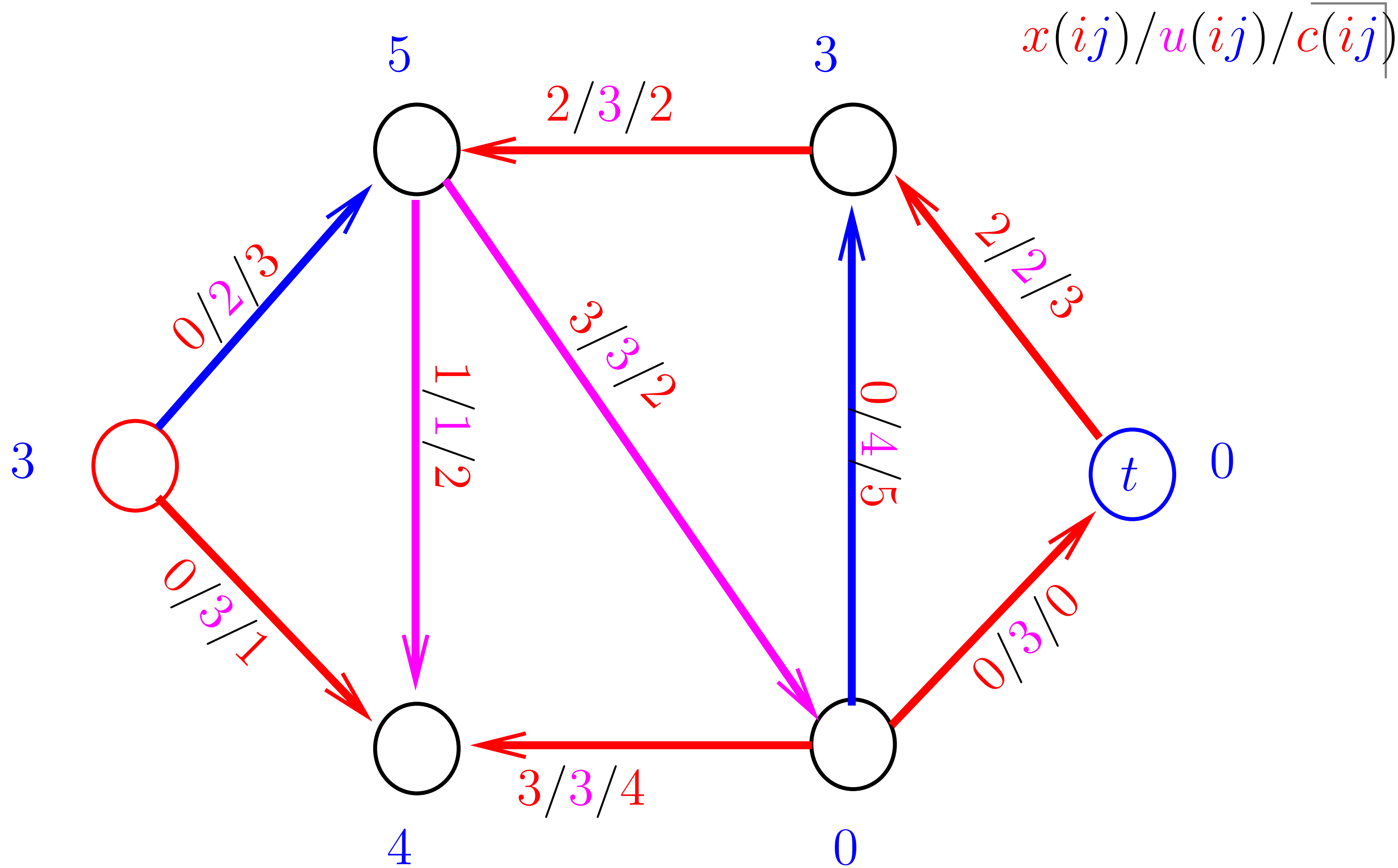
custo $= 30$

Estrutura arbórea forte



custo $= 30$

Estrutura arbórea forte



custo $= 30$

Convergência (1)

Fato. Utilizando a regra de Cunningham o número de iterações degeneradas consecutivas é $\leq 2nC$.

Demonstração (esboço). Podemos manter $y(t) = 0$ durante a execução do algoritmo.

Considere a quantidade

$$\Phi := \sum (y(i) : i \in N)$$

No início de cada iteração $-nC \leq \Phi \leq nC$.

Em uma iteração degenerada o potencial de nenhum nó aumenta.

Em uma iteração degenerada o potencial de pelo menos um nó diminui.

Convergência (2)

Assim, após cada iteração degenerada o valor de Φ diminui de pelo menos 1.

Portanto, o número de iterações degeneradas consecutivas é $\leq 2nC$.

Em outras palavras, após de não mais que $2nC$ iterações degeneradas deve ocorrer um iteração não-degenerada.

Conclusão

O número de iterações do algoritmo NETWORK-SIMPLEX é $\mathrm{O}(nmUC^2)$.

Unimodularidade

CCPS 6.5, AMO 11.12

Regra de Cramer

Seja B uma matriz indexada por $M \times M$ tal que $\det(B) \neq 0$.

Se b é um vetor indexado por M então a única solução do sistema de equações

$$Bx = b$$

é dada por

$$x_j = \frac{\det(B_j)}{\det(B)}$$

onde B_j é a matriz obtida de B substituindo a coluna j de B por b.

Conseqüência

Se B é uma matriz indexada por $M \times M$ tal que $\det(B)$ é $+1$ ou -1 e b é um vetor inteiro indexado por M então a única solução do sistema de equações

$$Bx = b$$

é inteira.

Unimodularidade

Um matriz inteira A de “posto pleno” é unimodular se o determinante de cada base de A é $+1$ ou -1.

Se A é uma matriz unimodular então o sistema de equações

$$Ax = b$$

tem uma solução básica inteira para cada vetor inteiro b.

Unimodularidade total

Uma matriz é totalmente unimodular se o determinante de qualquer de suas submatrizes é $0, -1$ ou $+1$.

> Se M é uma matriz de incidências, então M é totalmente unimodular.

Demonstração: Por indução na dimensão da submatriz...

Exemplo

	vw	wz	zt	tv	sv	su	sw	uw	uz	wt	A
v	-1			$+1$	$+1$						
w	$+1$	-1					$+1$	$+1$		-1	
z		$+1$	-1						$+1$		
t			$+1$	-1						$+1$	
s					-1	-1	-1				
u						$+1$			-1	-1	

N