Empacotamento de Ramificações

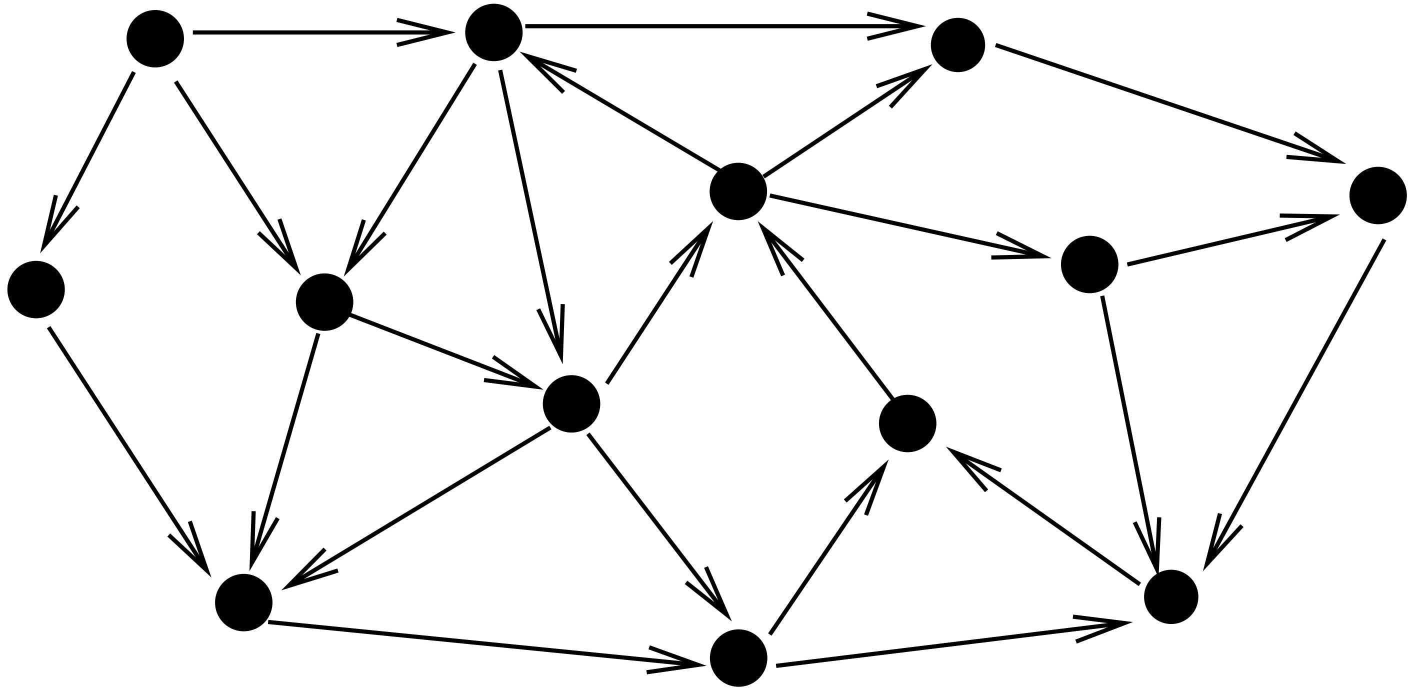
Juliana Barby Simão

Departamento de Ciência da Computação

Instituto de Matemática e Estatística

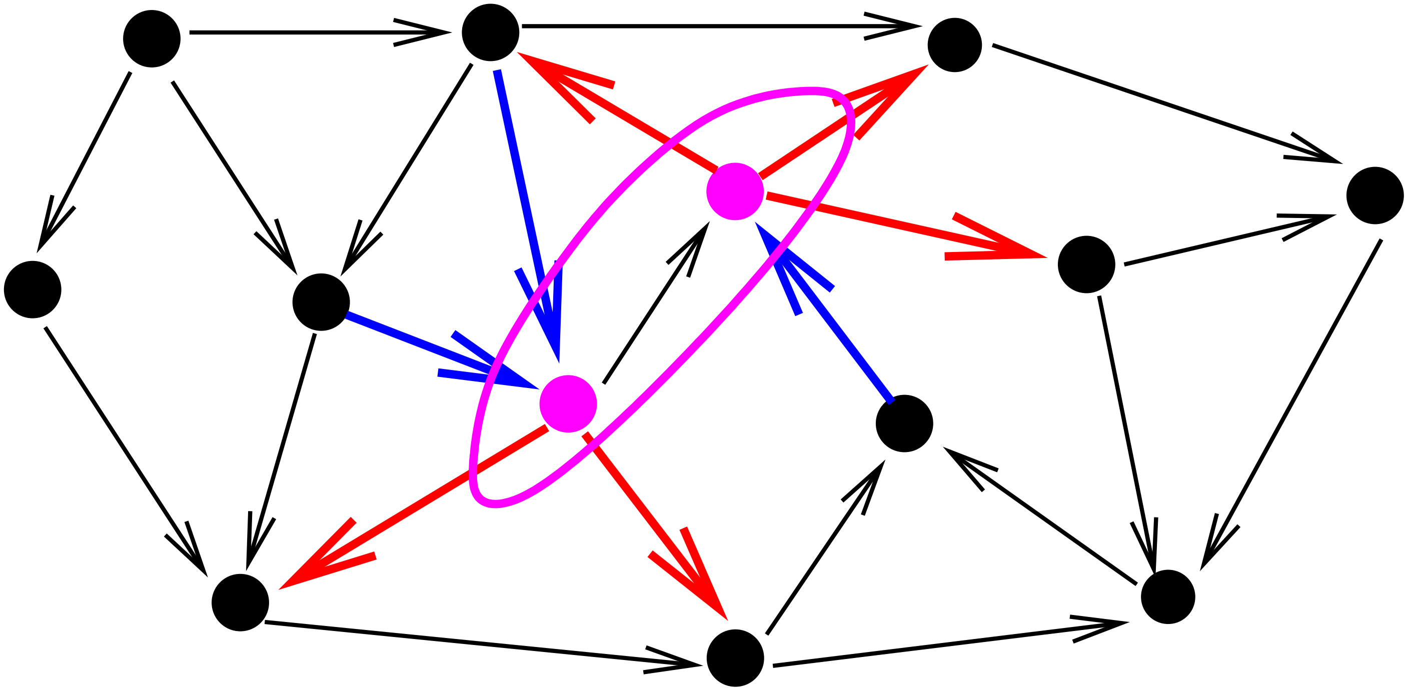
Universidade de São Paulo

Notação



$D = (V, A)$ grafo orientado.

Notação

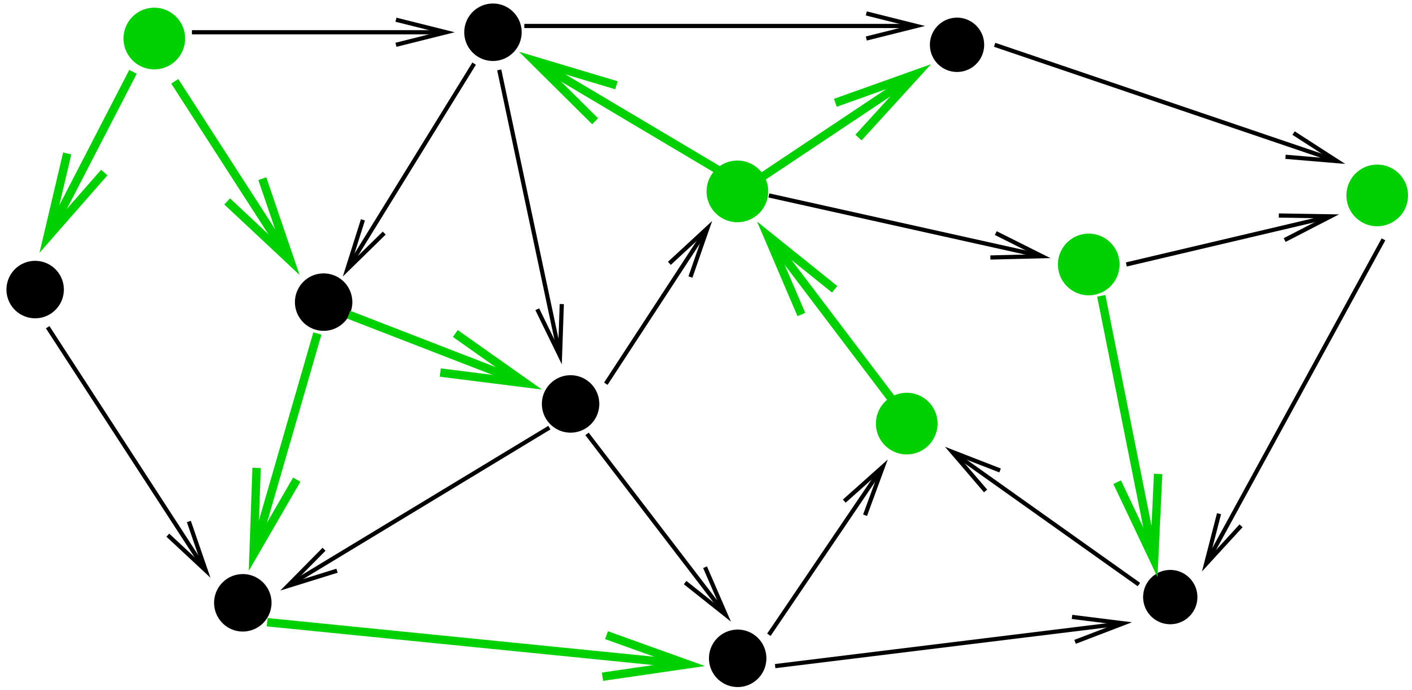


$\delta^{\text{out}}(U)$: conjunto de arcos que saem de $U \subseteq V$.

$\delta^{\text{in}}(U)$: conjunto de arcos que entram em $U \subseteq V$.

$d_D^{\text{in}}(U) = \left|\delta^{\text{in}}(U)\right|$.

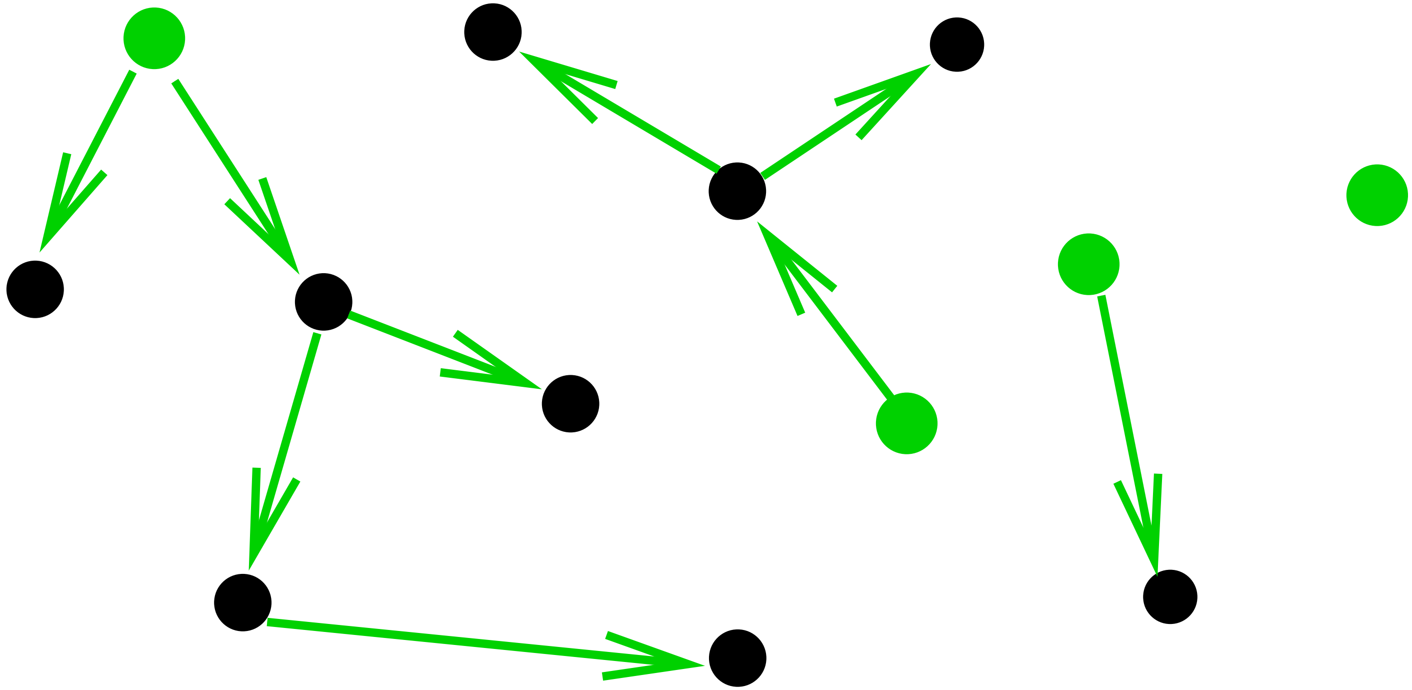
Ramificações



$B \subseteq A$ é uma ramificação se

- B não contém circuitos (orientados ou não);
- $\forall v \in V$, existe no máximo um arco de B entrando em v.

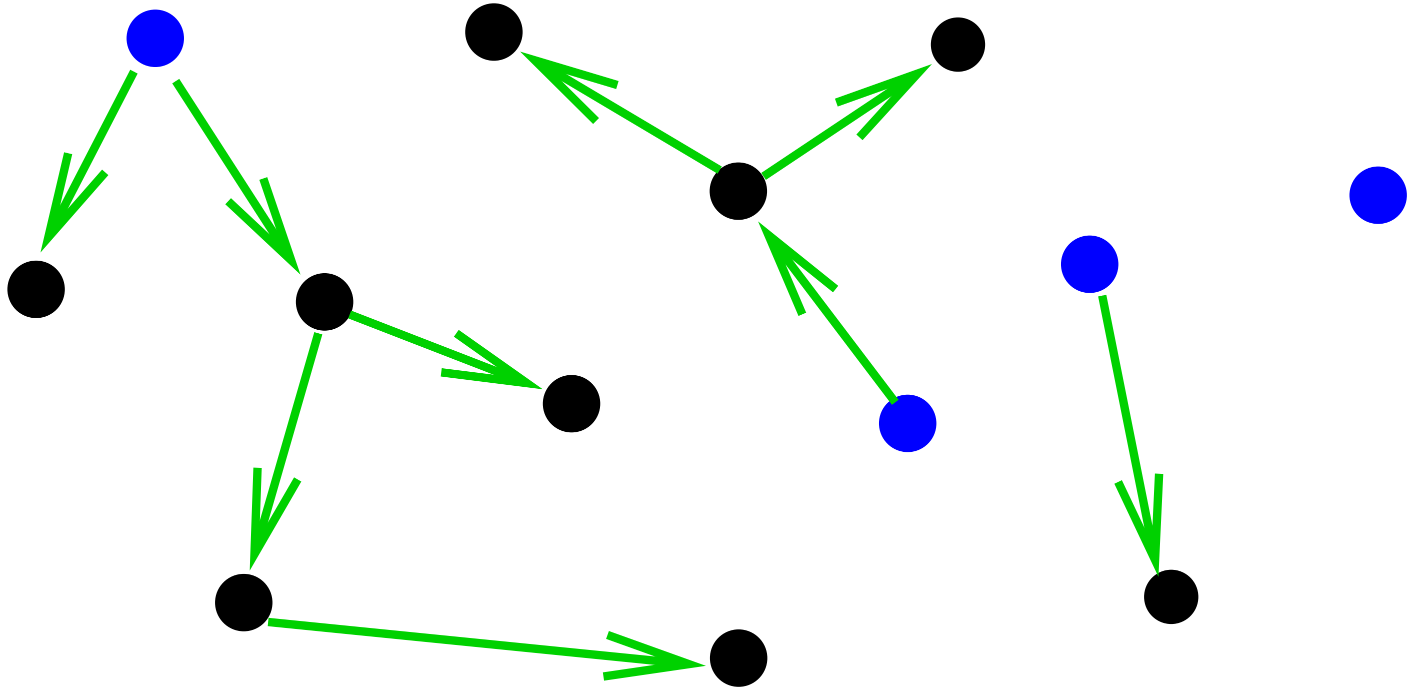
Ramificações



$B \subseteq A$ é uma ramificação se

- B não contém circuitos (orientados ou não);
- $\forall v \in V$, existe no máximo um arco de B entrando em v.

R-Ramificações



Uma raiz de B é um vértice que não é ponta final de nenhum arco de B.

Uma R-ramificação é uma ramificação cujo conjunto de raízes é $R \subseteq V$.

Problema

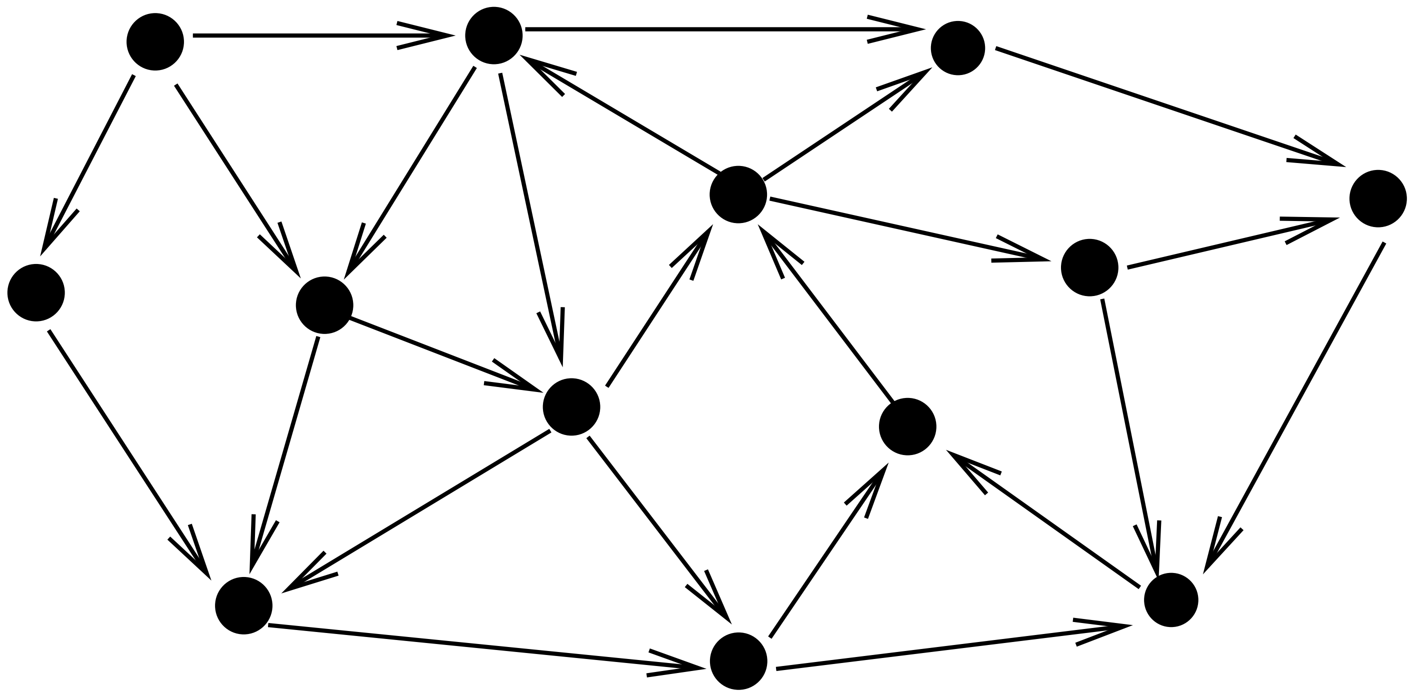
Dados:

- $D = (V, A)$ grafo orientado;
- $R_1, \ldots, R_k \subseteq V$ não-vazios.

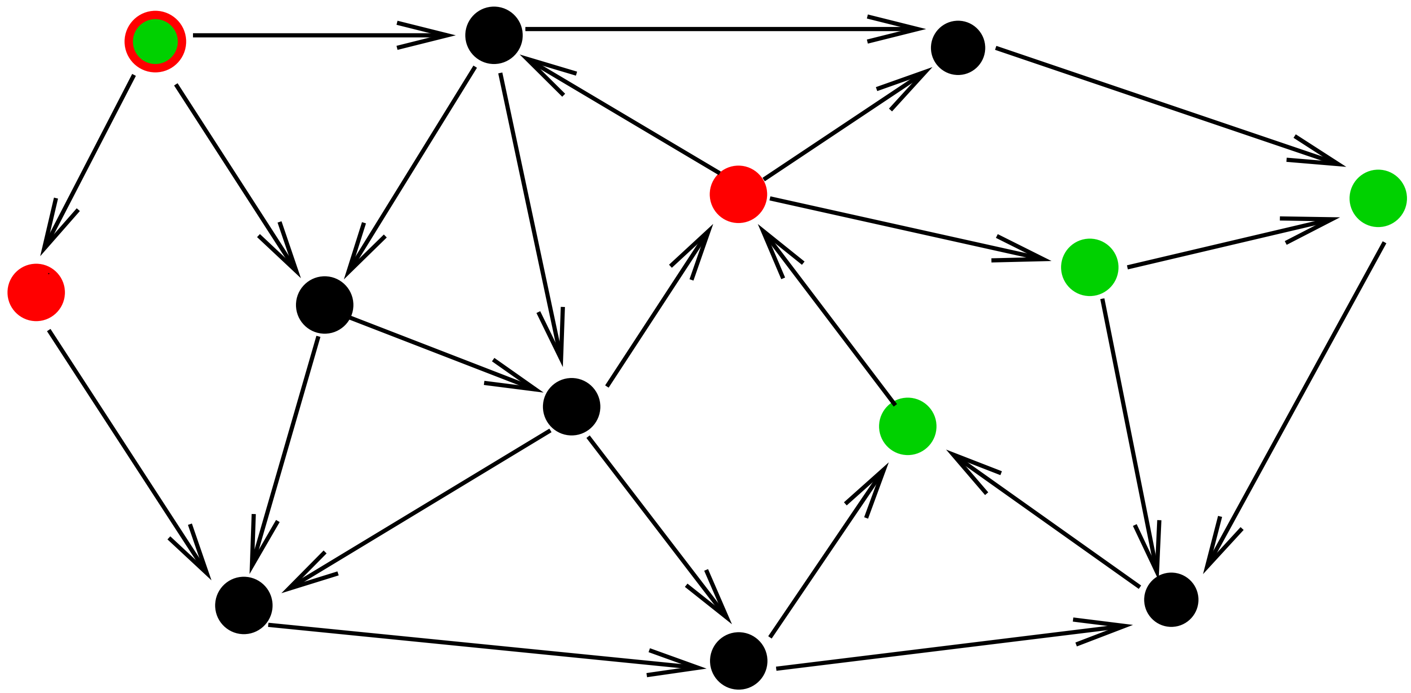
Encontrar ramificações disjuntas $B_1, \ldots, B_k$ tais que

- B_i é R_i-ramificação, $i = 1, \ldots, k$.

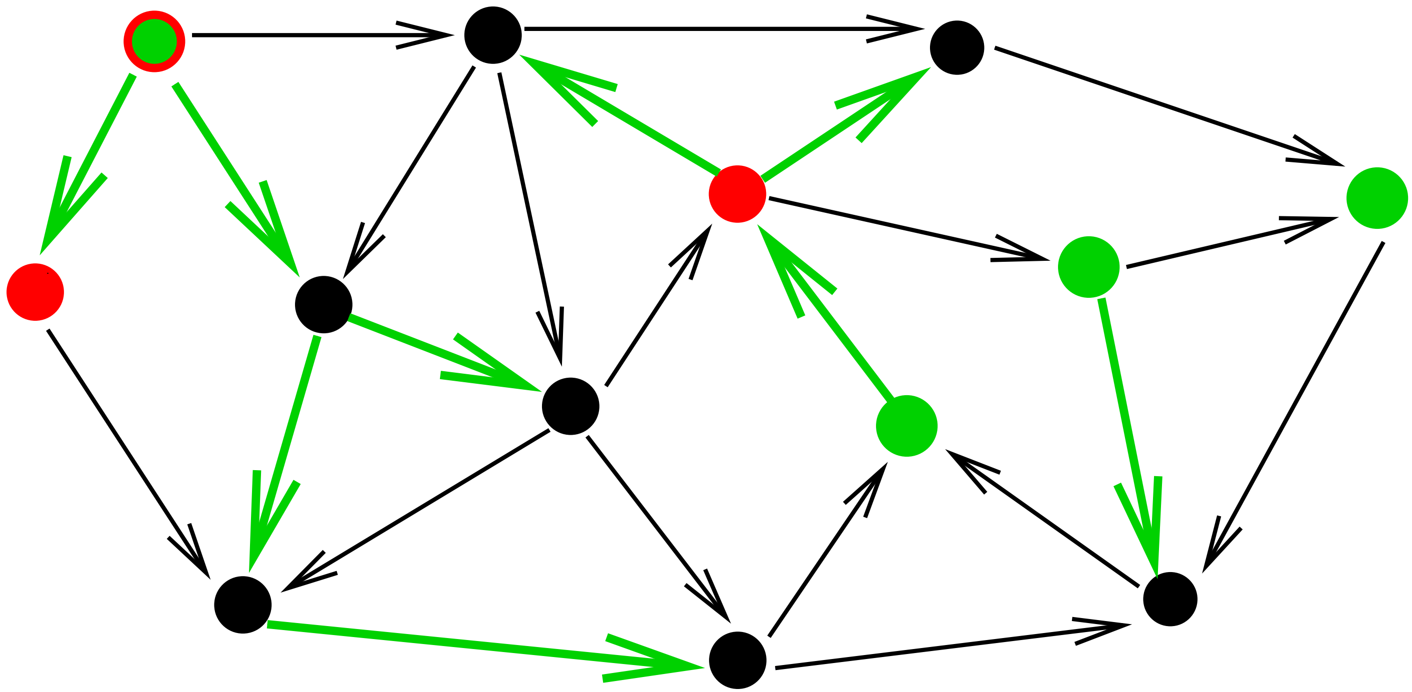
Exemplo



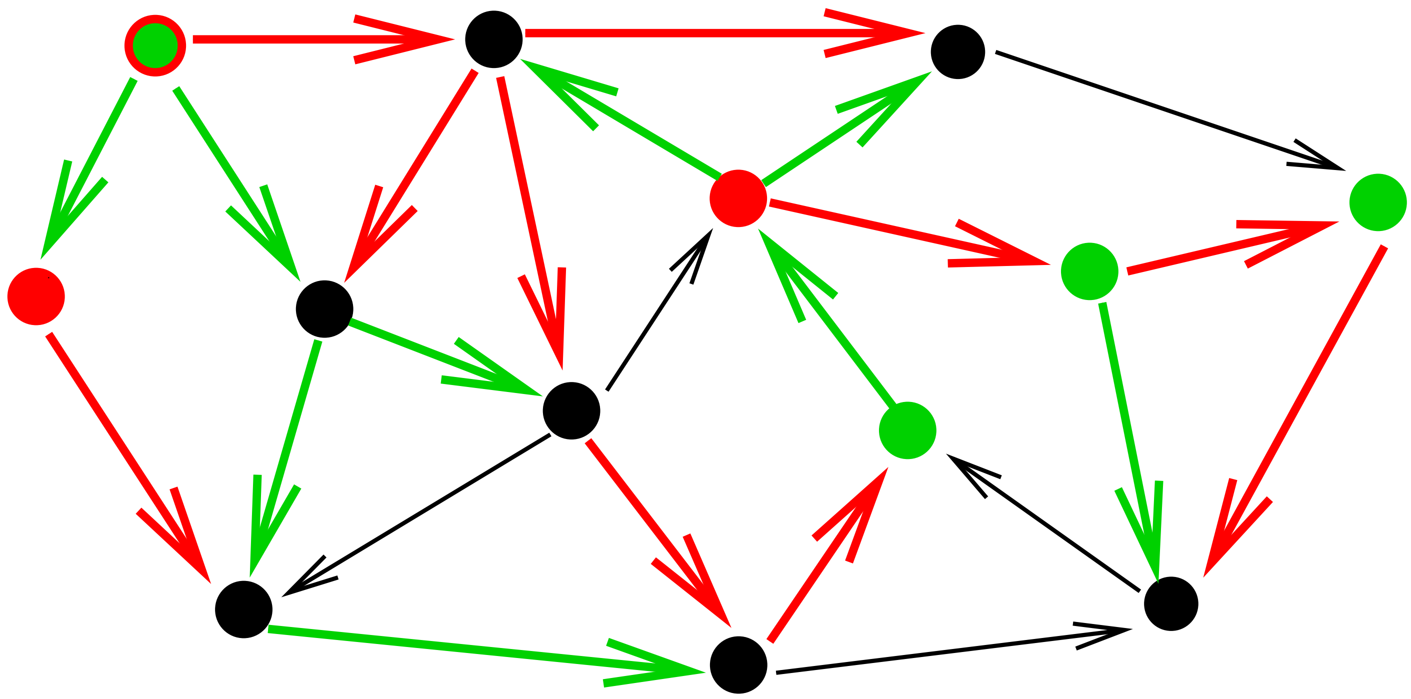
Exemplo



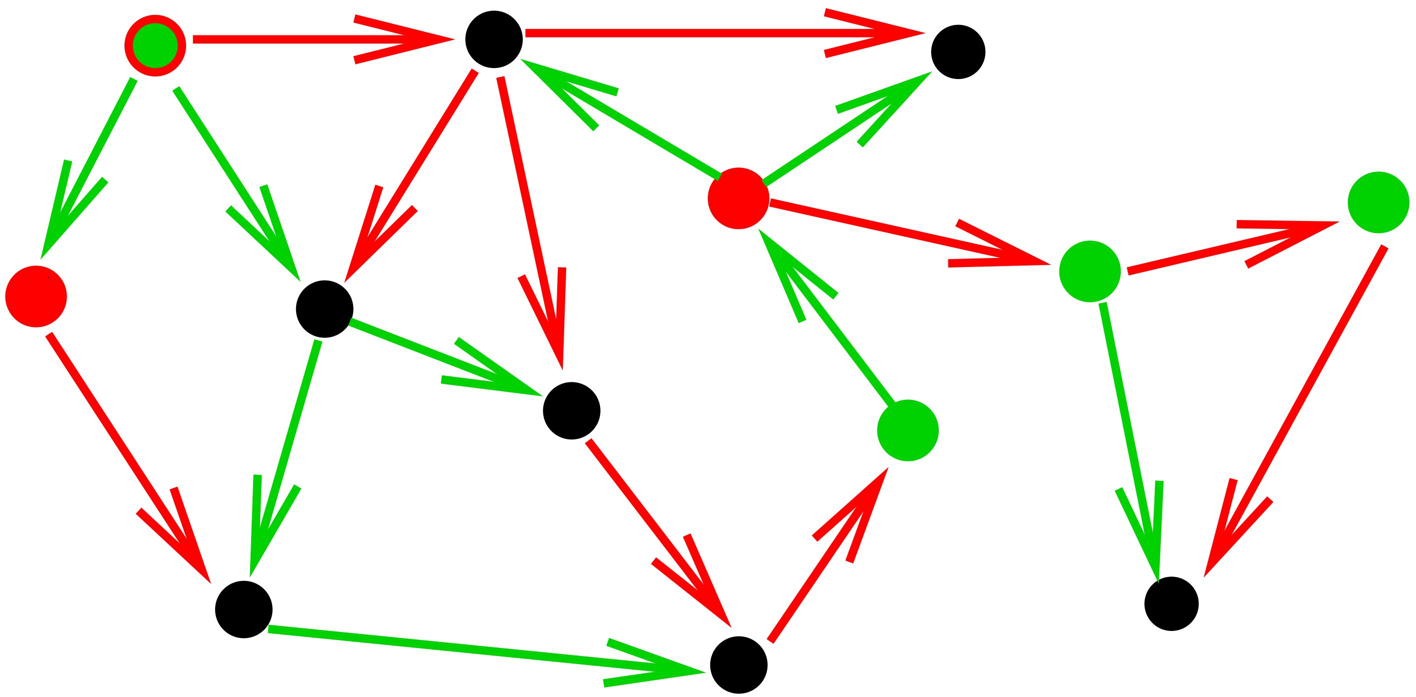
Exemplo



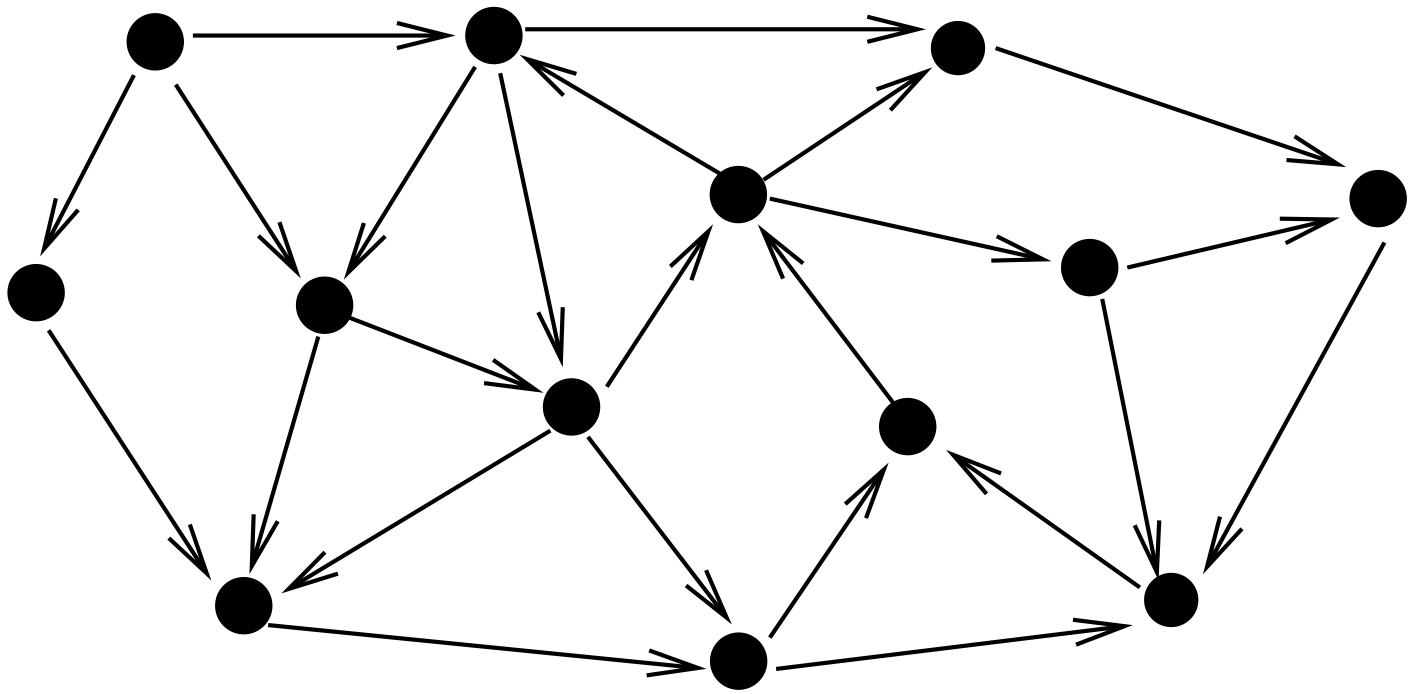
Exemplo



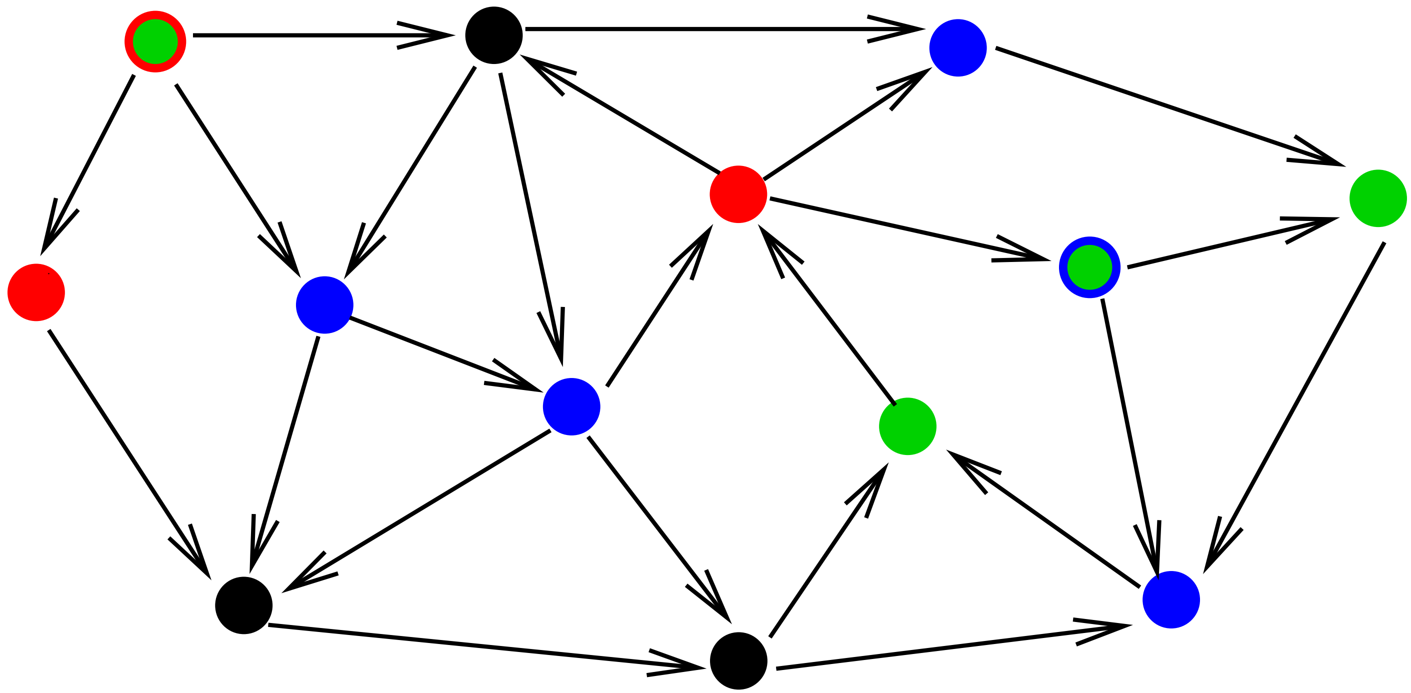
Exemplo



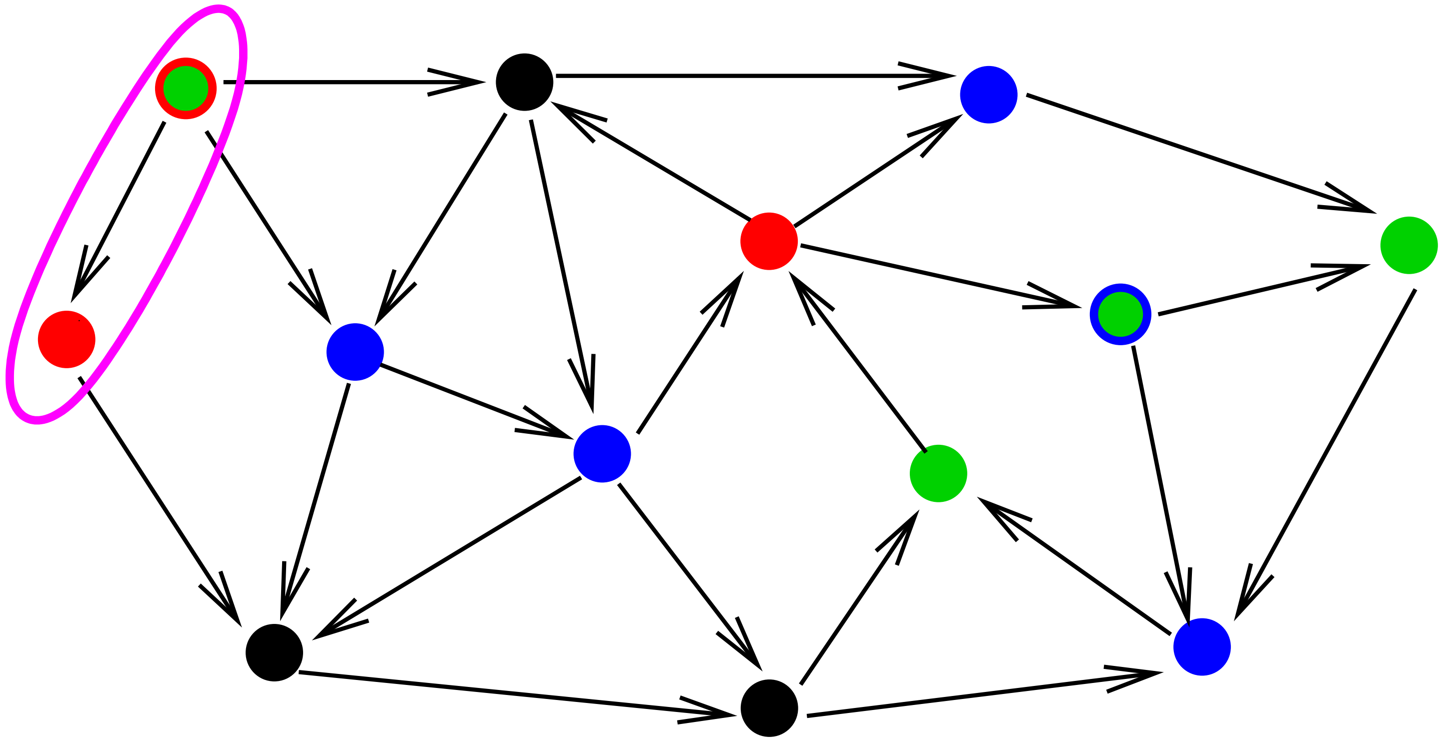
Outro exemplo



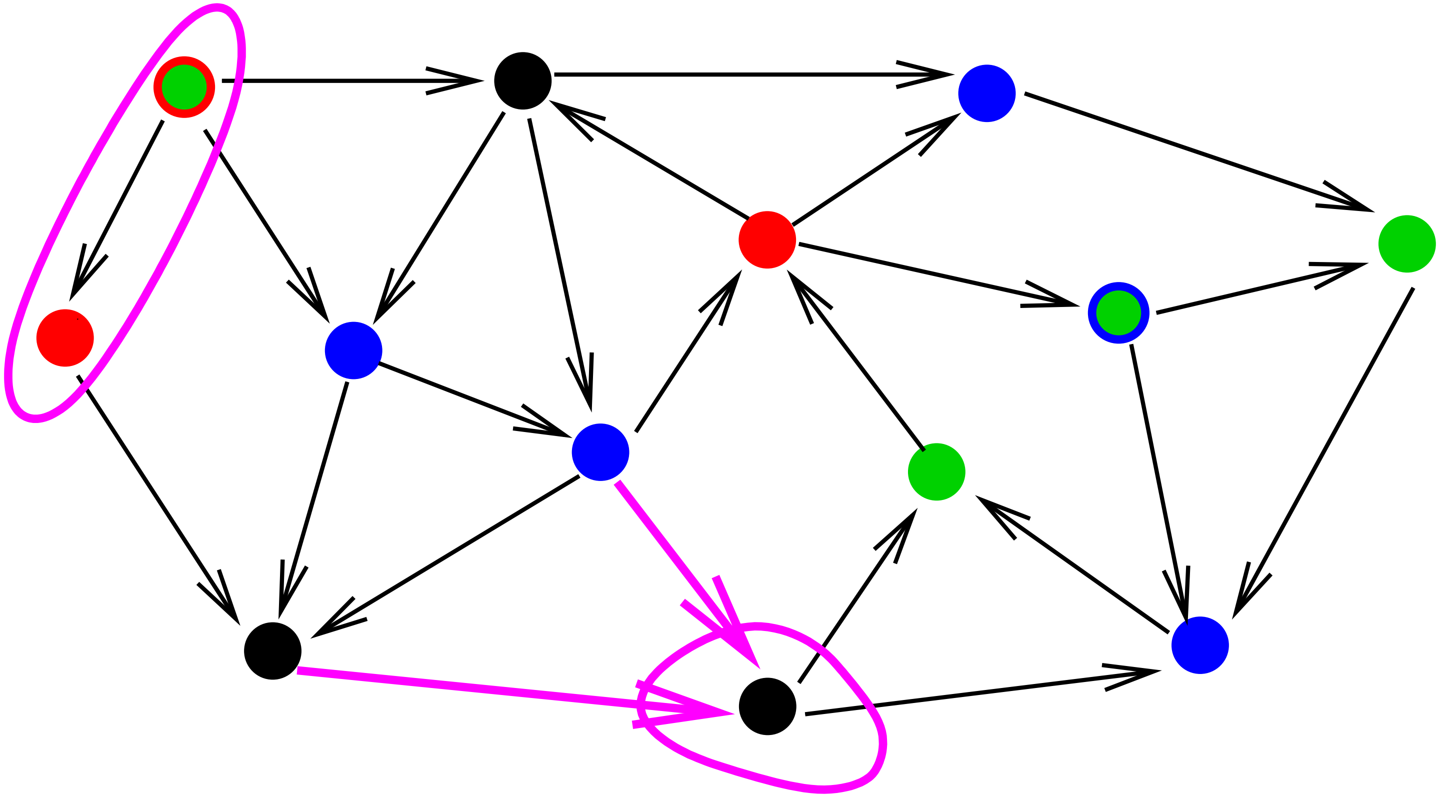
Outro exemplo



Outro exemplo



Outro exemplo



Fato óbvio

$D = (V, A)$ grafo orientado

$U \subseteq V$

Se:

- B é R-ramificação;
- $R \cap U = \emptyset$;

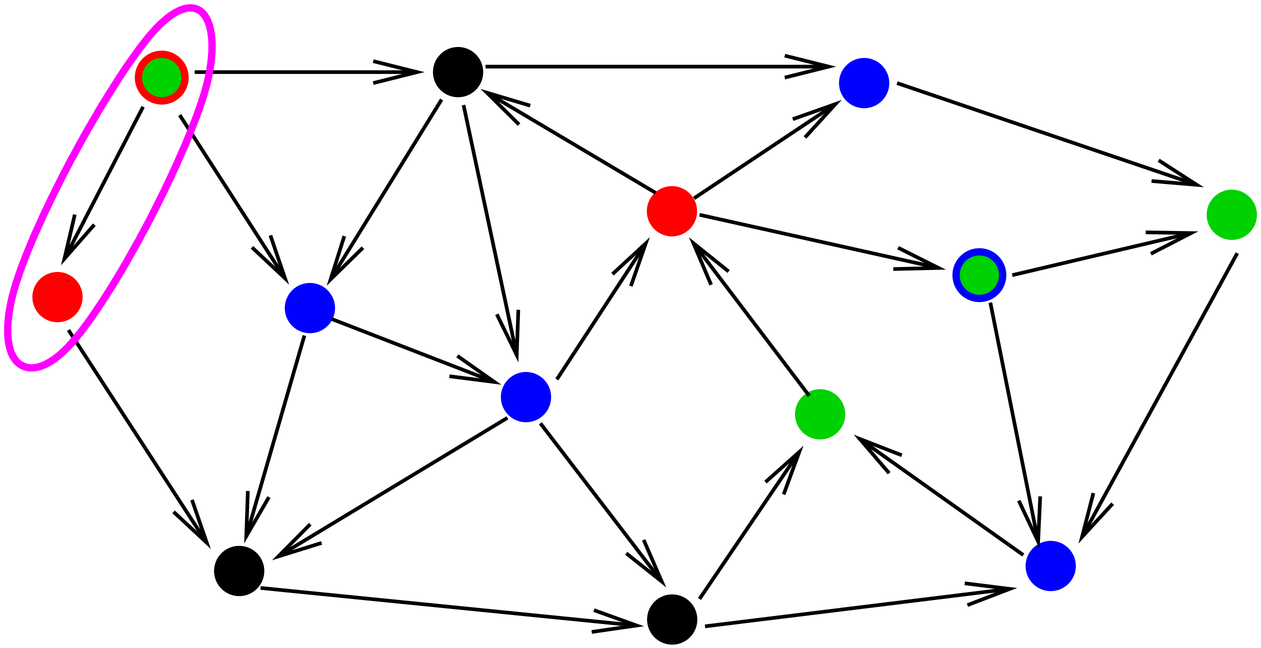
Então pelo menos um arco de B entra em U.

Condição necessária

$$g(U) := \Big|\{i\colon R_i \cap U = \emptyset\}\Big|,\ U \subseteq V.$$

Condição necessária

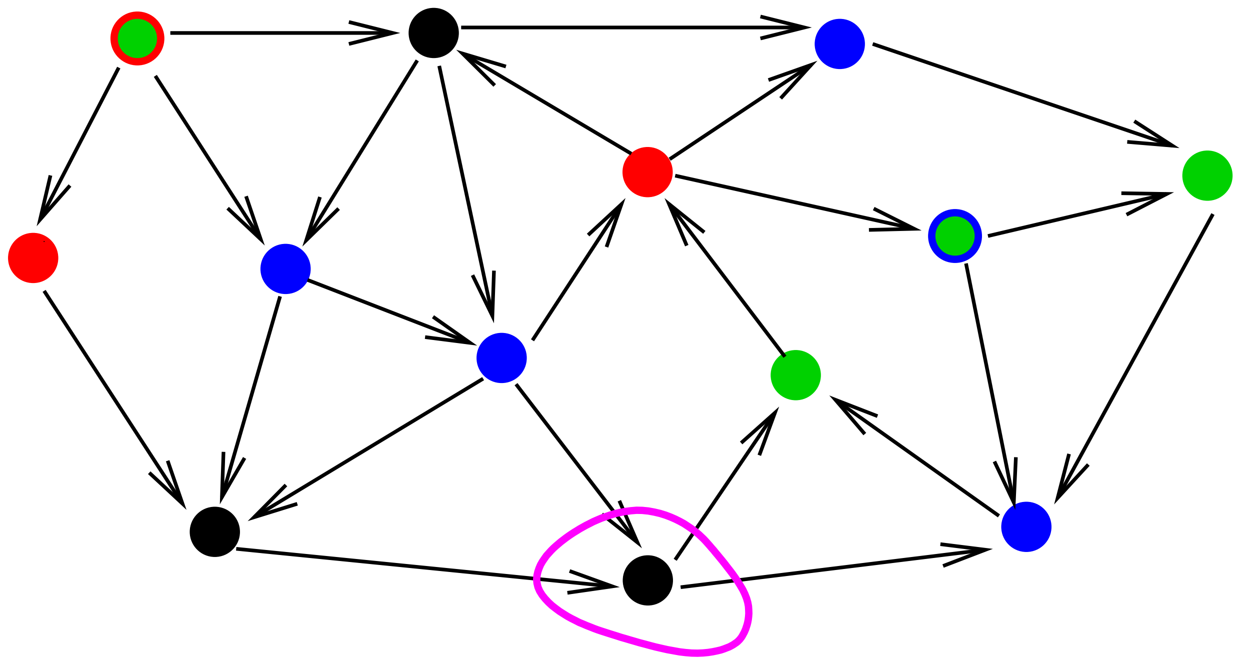
$$g(U) := \Big|\{i\colon R_i \cap U = \emptyset\}\Big|, \; U \subseteq V.$$



$\triangleright\; g(U) = 1$

Condição necessária

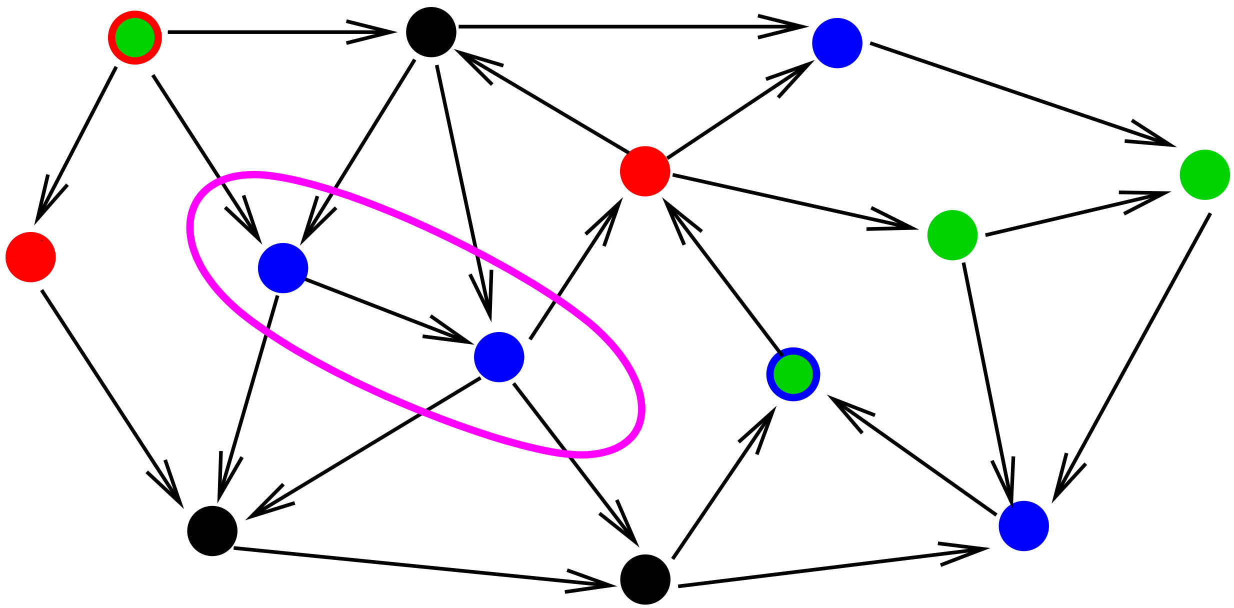
$$g(U) := \Big|\{i\colon R_i \cap U = \emptyset\}\Big|,\ U \subseteq V.$$



$\triangleright\ g(U) = 3$

Condição necessária

$$g(U) := \Big|\{i\colon R_i \cap U = \emptyset\}\Big|,\ U \subseteq V.$$



$\triangleright\ g(U) = 2$

Condição necessária

$D = (V, A)$, $U \subseteq V$

$$g(U) := \left|\{i \colon R_i \cap U = \emptyset\}\right|$$

Se $B_1, \ldots, B_k$ são ramificações disjuntas em D tais que B_i é R_i-ramificação, $i = 1, \ldots, k$, então

$$\boxed{d_D^{\mathrm{in}}(U) \geq g(U),}$$

para todo $U \subseteq V$, $U \neq \emptyset$.

Teorema de Edmonds

Teorema (Edmonds, 1973). Sejam $D = (V, A)$ um grafo orientado e $R_1, \ldots, R_k \subseteq V$ não-vazios. Existem ramificações disjuntas $B_1, \ldots, B_k$ em D tais que B_i é R_i-ramificação, $i = 1, \ldots, k$, se, e somente se,

$$d_D^{\text{in}}(U) \geq g(U) = \Big|\{i\colon R_i \cap U = \emptyset\}\Big|,$$

para todo $U \subseteq V$, $U \neq \emptyset$.

Teorema de Edmonds

Teorema (Edmonds, 1973). Sejam $D = (V, A)$ um grafo orientado e $R_1, \ldots, R_k \subseteq V$ não-vazios. Existem ramificações disjuntas $B_1, \ldots, B_k$ em D tais que B_i é R_i-ramificação, $i = 1, \ldots, k$, se, e somente se,

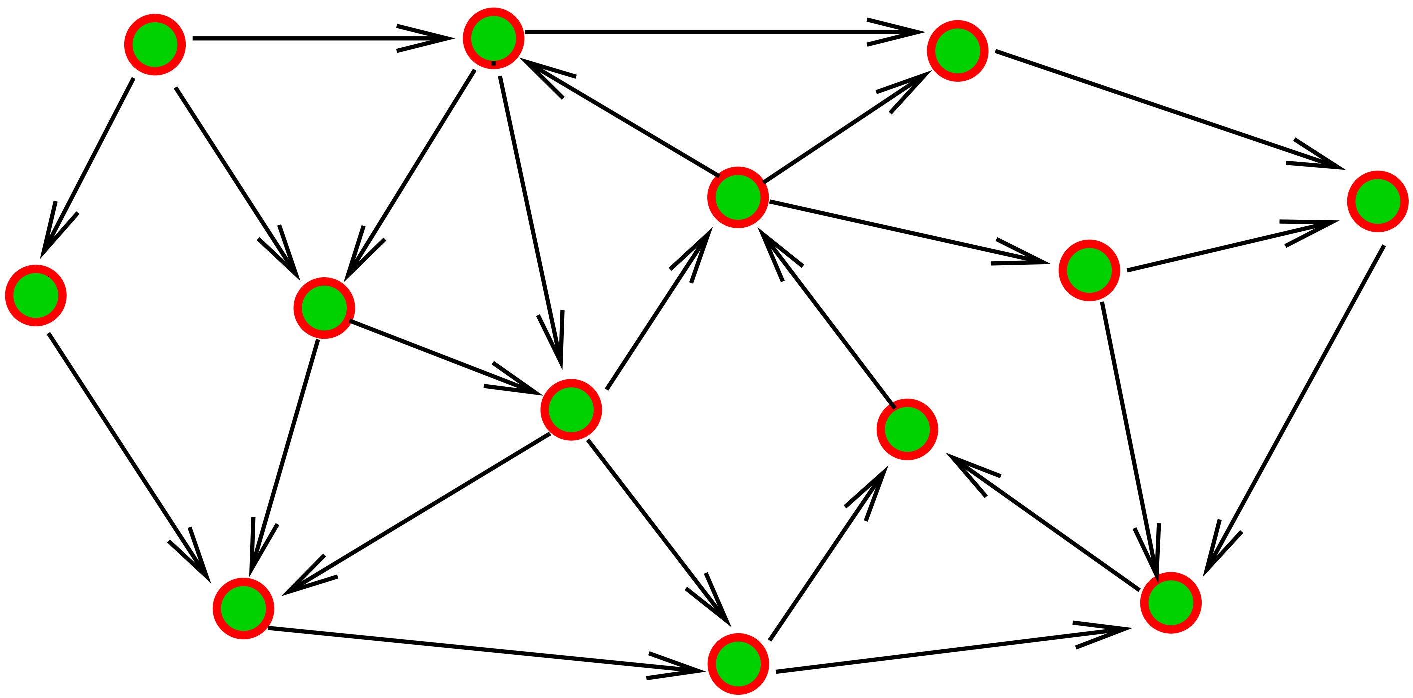
$$d_D^{\mathrm{in}}(U) \geq g(U) = \Big|\{i \colon R_i \cap U = \emptyset\}\Big|,$$

para todo $U \subseteq V$, $U \neq \emptyset$.

$\triangleright$ A prova que apresentamos é devida a Lovász, 1976.

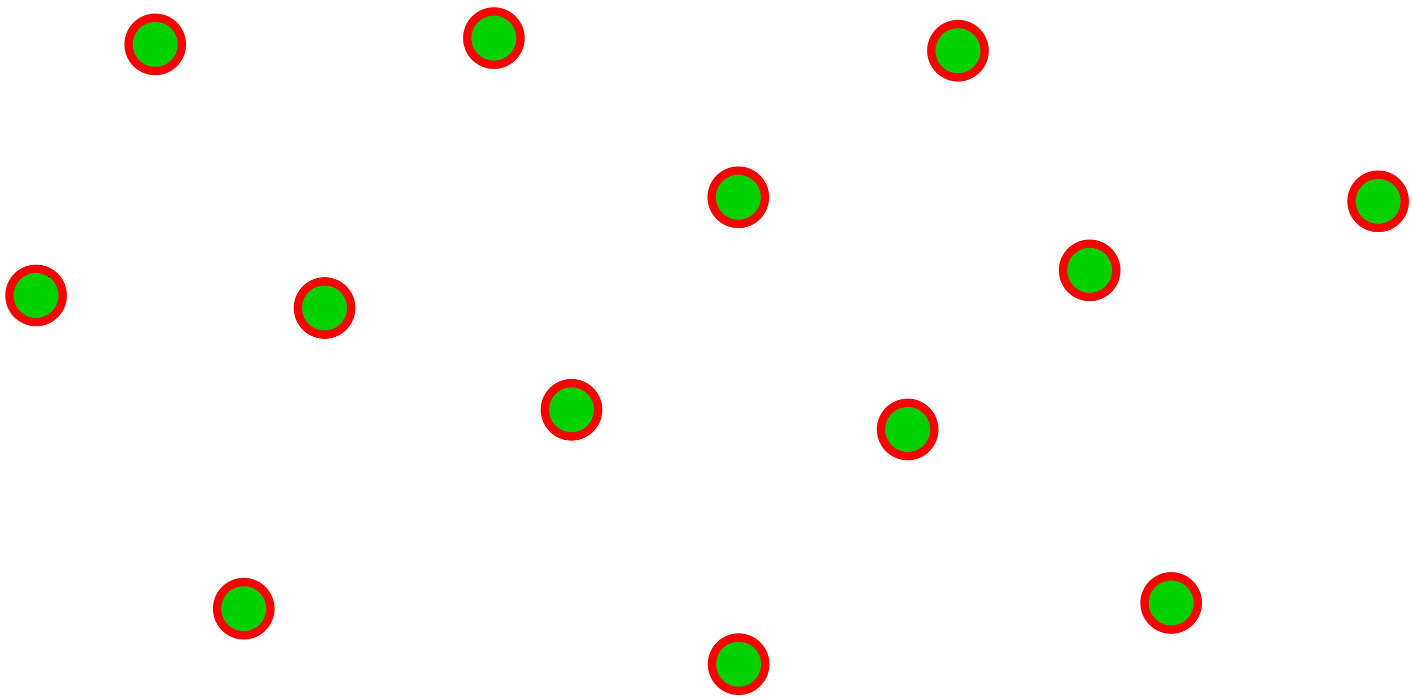
Caso fácil

$R_1 = \ldots = R_k = V$

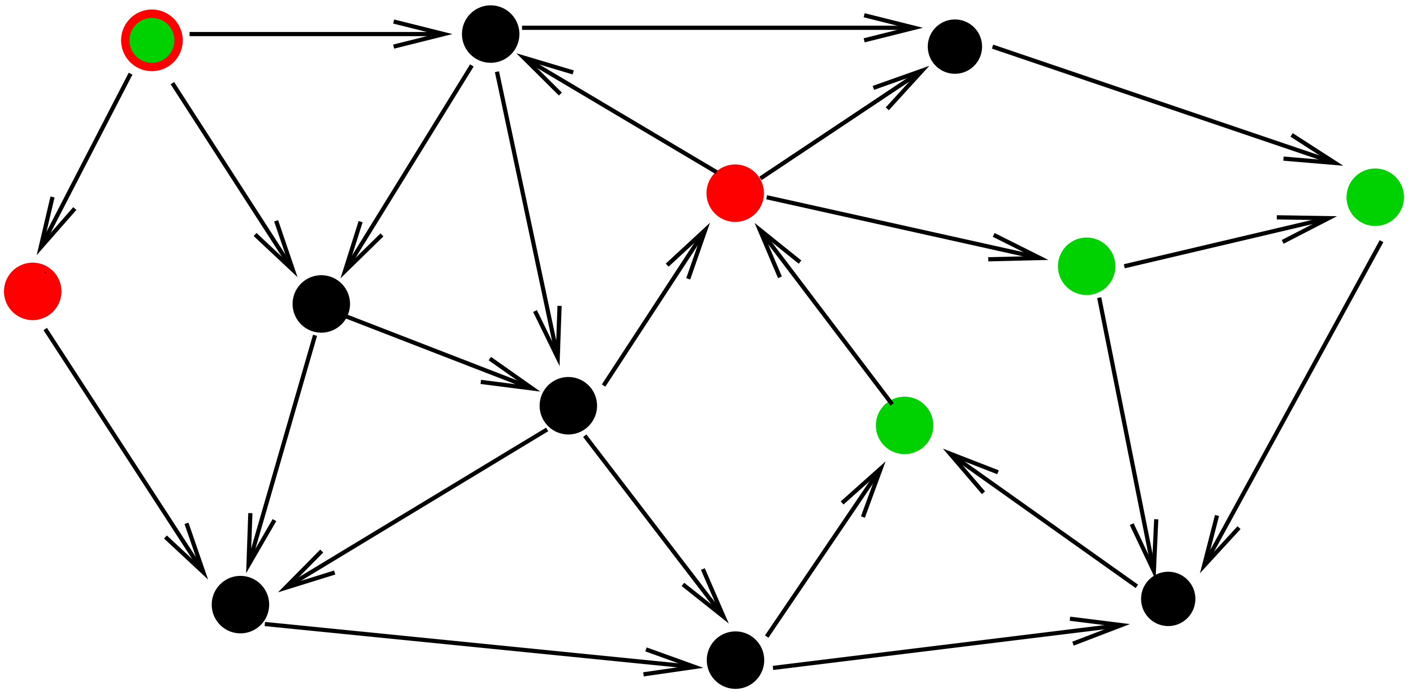


Caso fácil

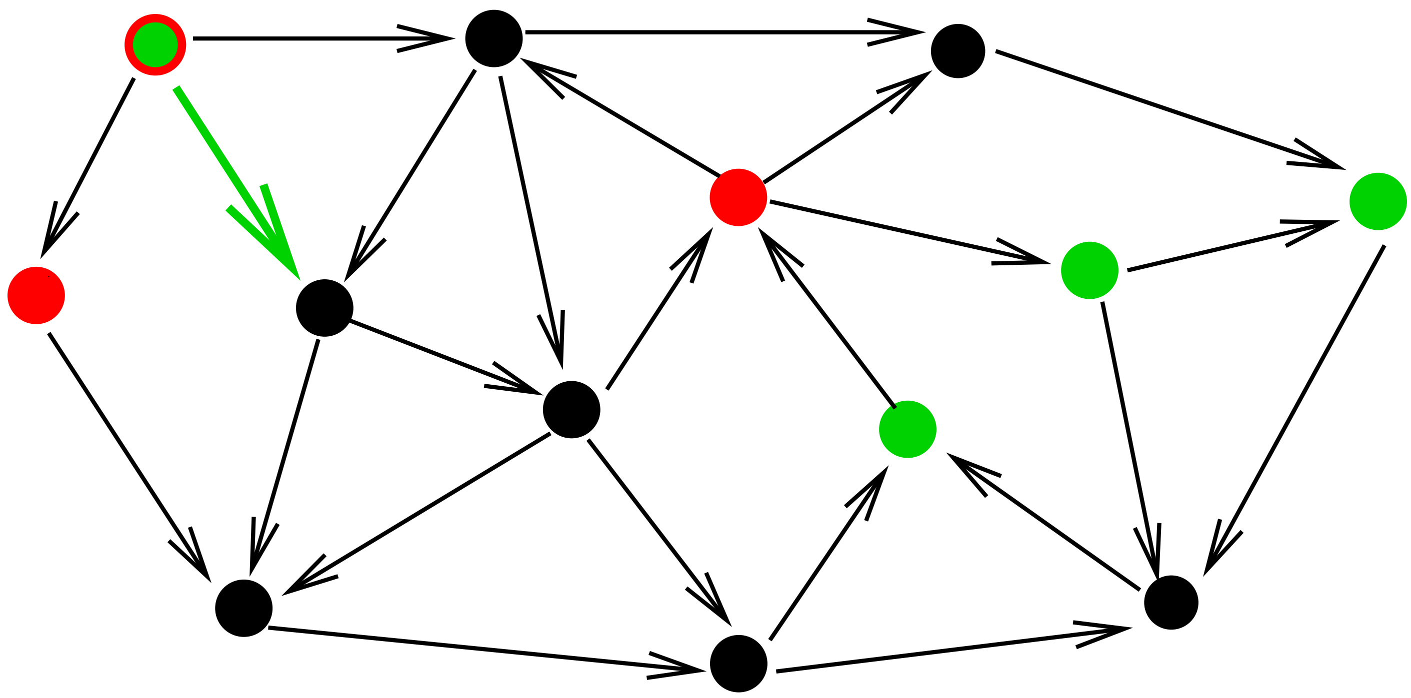
Basta tomar $B_1 = \ldots = B_k = \emptyset$.



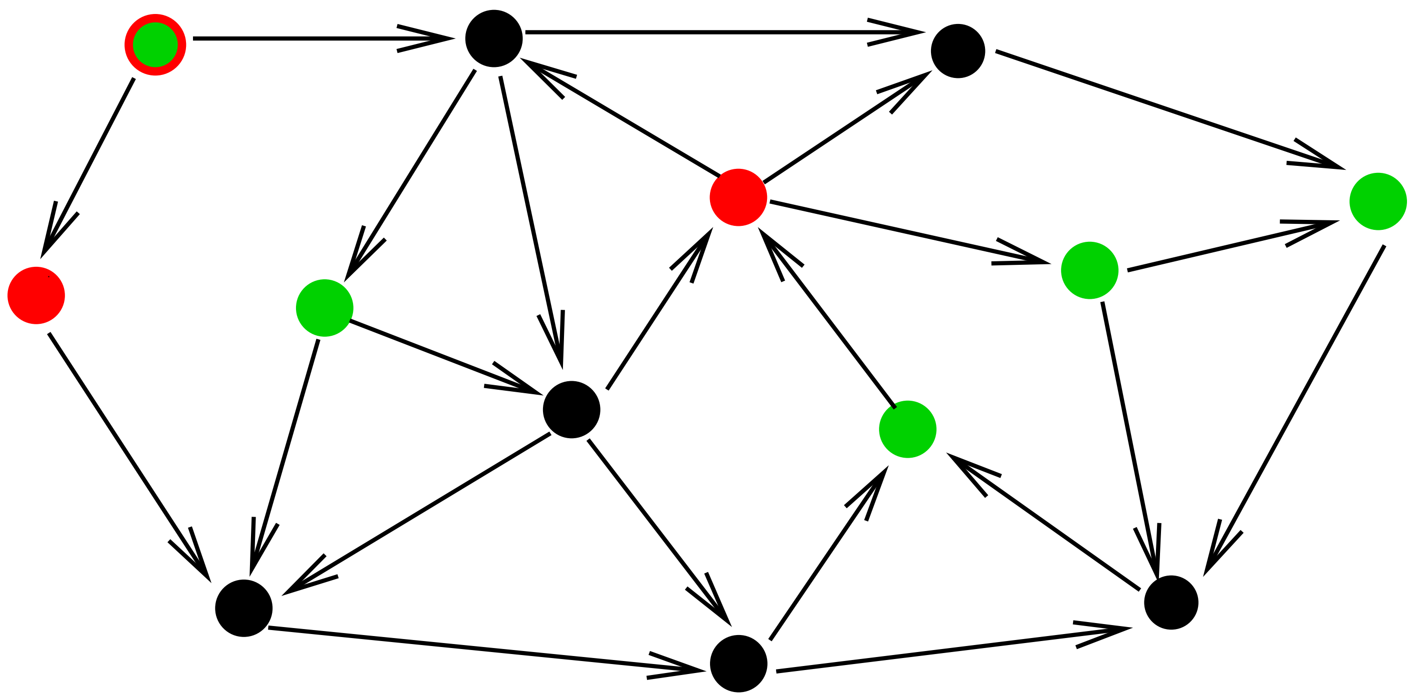
Idéia de prova



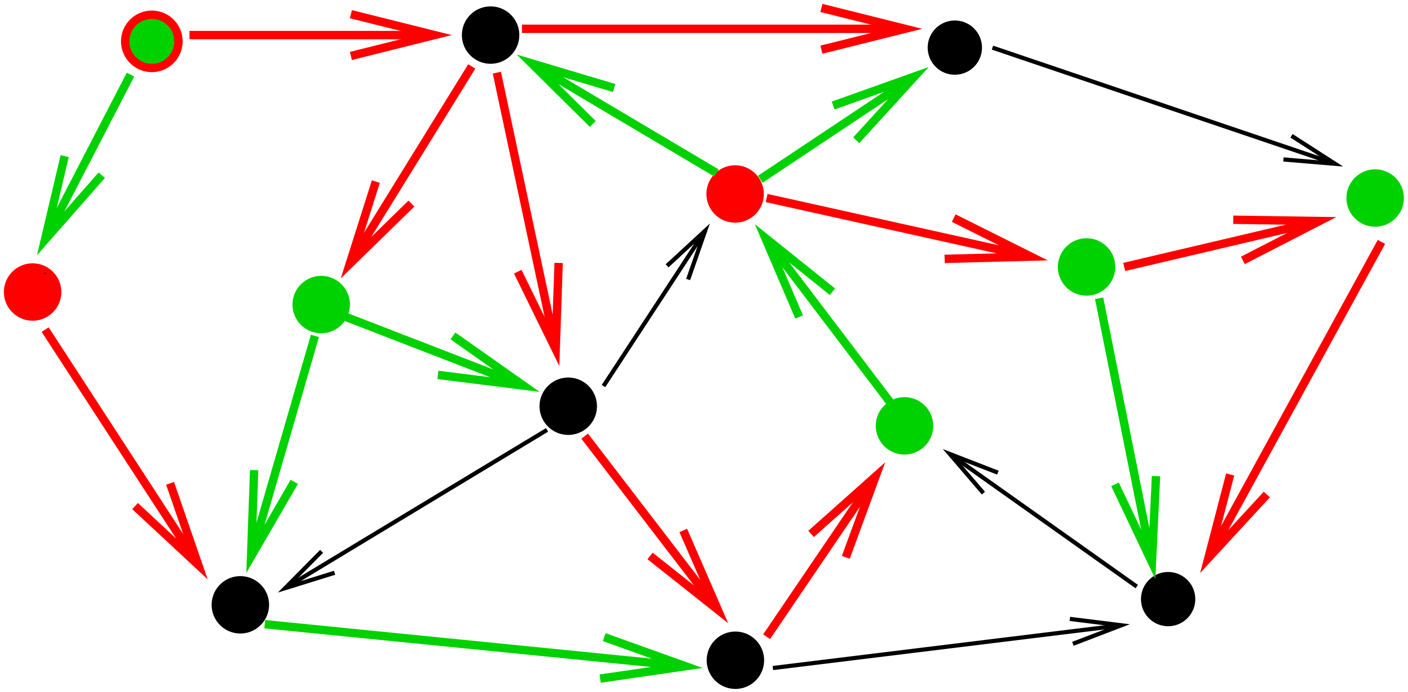
Idéia de prova



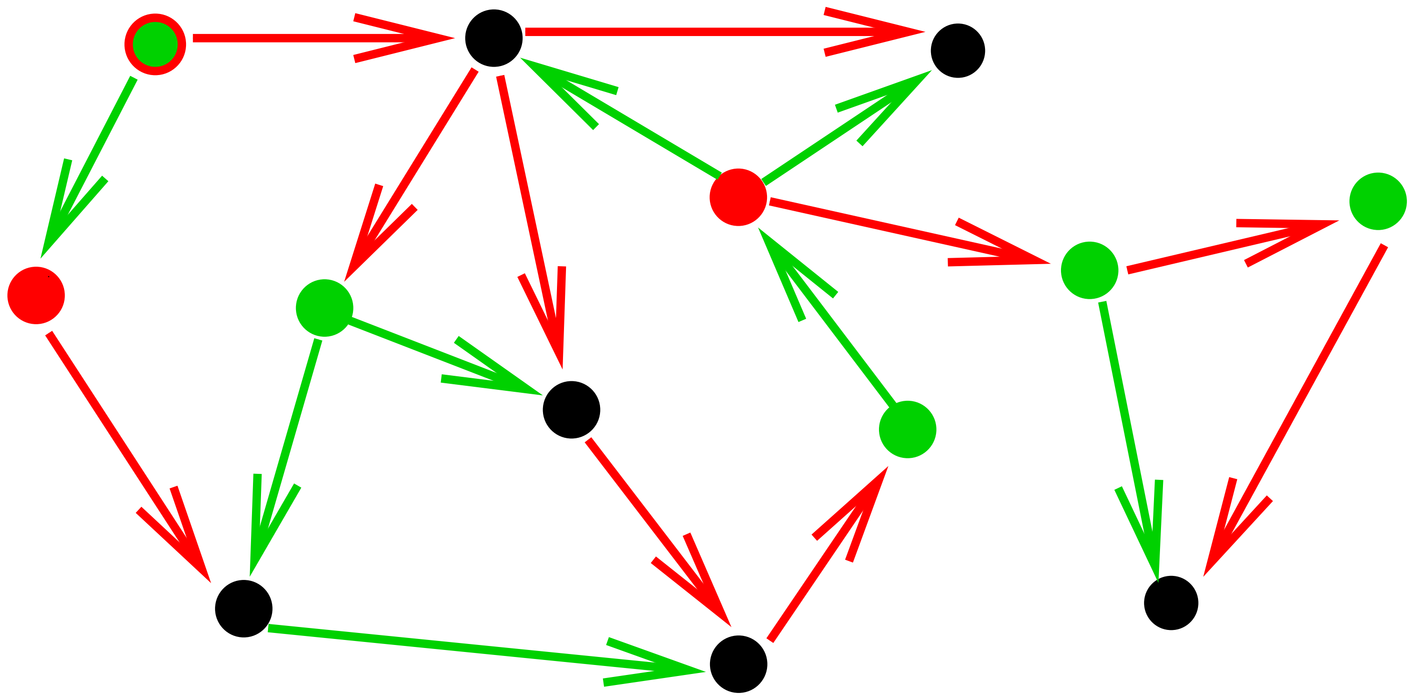
Idéia de prova



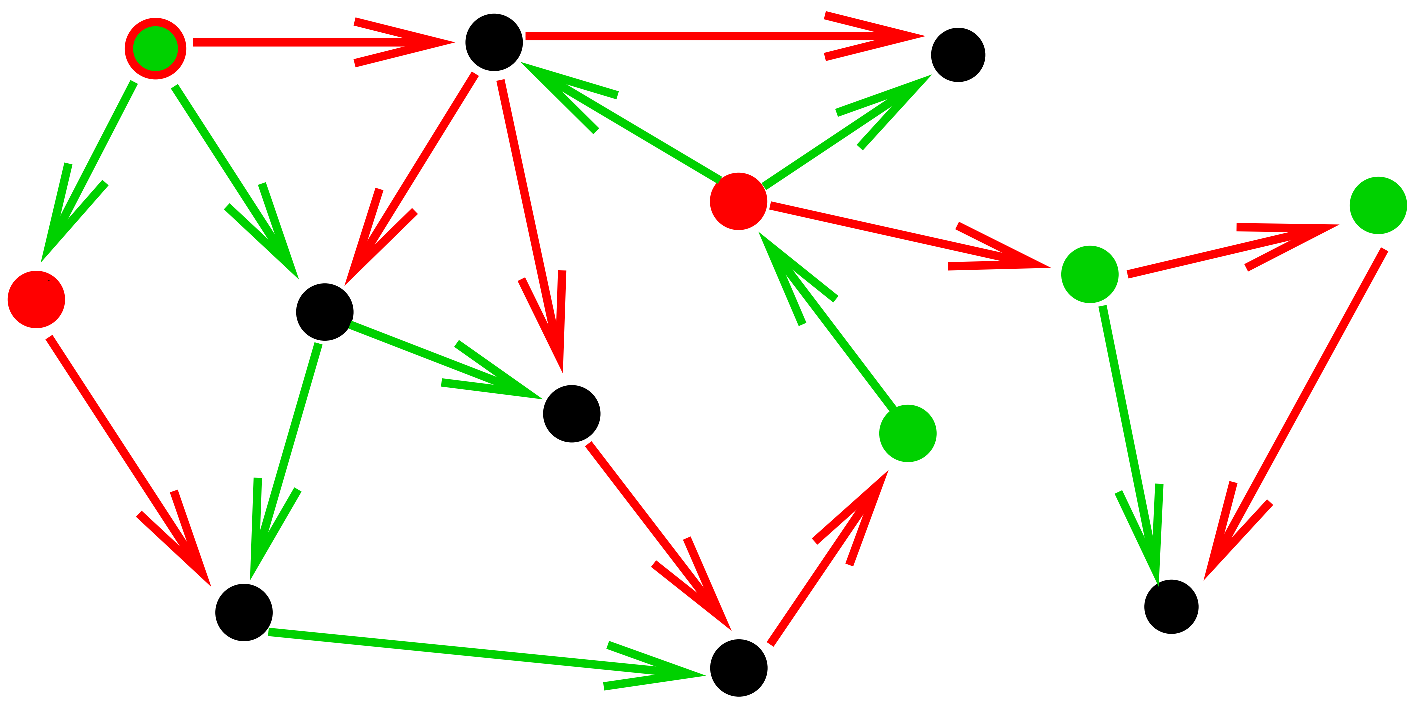
Idéia de prova



Idéia de prova



Idéia de prova



Arco seguro

$D = (V, A)$, $R := R_i \neq V$, fixado.

Queremos adicionar $a = uv \in \delta^{\text{out}}(R)$ a B.

Defina (problema reduzido relativo a a):

- $D' := D - a$,
- $R'_j := R_j$, se $R_j \neq R$;
- $R'_i := R_i \cup \{v\}$, $R_i = R$;
- $g'(U) := \left|\{i : R'_i \cap U = \emptyset\}\right|$, $U \subseteq V$.

Arco seguro

$D = (V, A)$, $R := R_i \neq V$, fixado.

Queremos adicionar $a = uv \in \delta^{\text{out}}(R)$ a B.

O arco a é seguro se

$$\boxed{d^{\text{in}}_{D'}(U) \geq g'(U),}$$

para todo $U \subseteq V$, $U \neq \emptyset$.

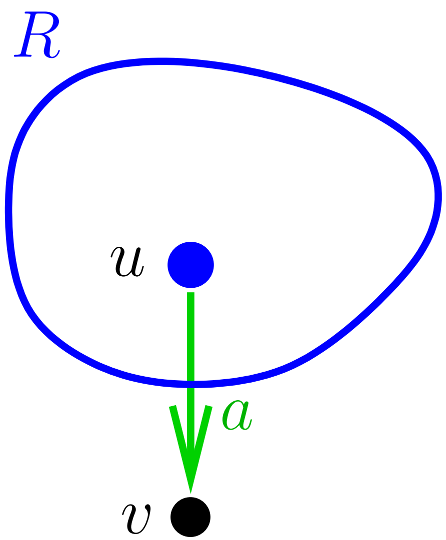
Arco seguro

▷ Resta mostrar que um arco seguro sempre existe.

▷ Vamos mostrar também como escolhê-lo.

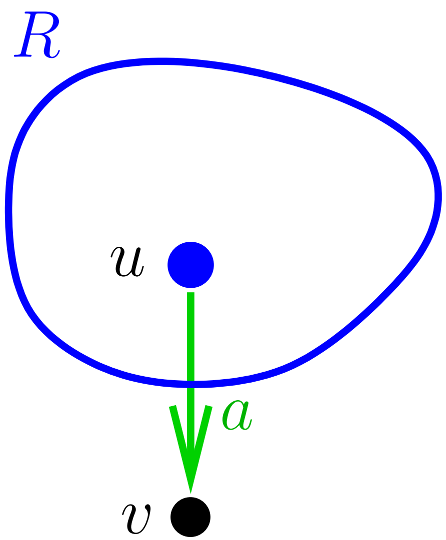
Como escolher arco seguro para B?

▷ Sempre existe arco saindo de R.



Como escolher arco seguro para B?

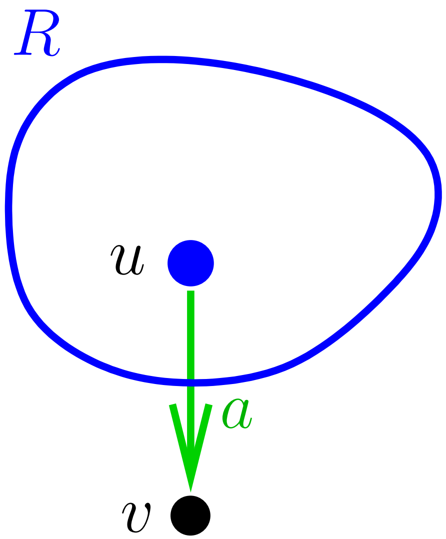
▷ Sempre existe arco saindo de R.



▷ Quando $a \in \delta^{\mathrm{out}}(R)$ não é seguro?

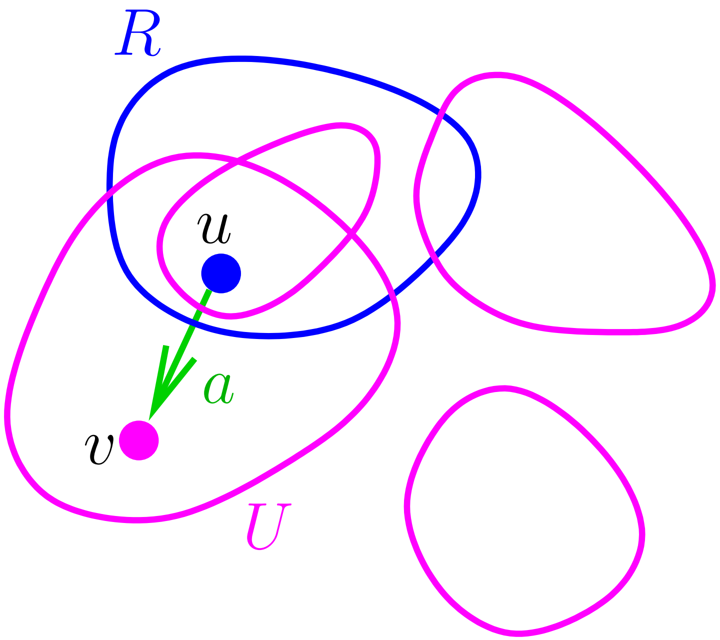
O que causa problemas?

Escolhido $a \in \delta^{\text{out}}(R)$



O que causa problemas?

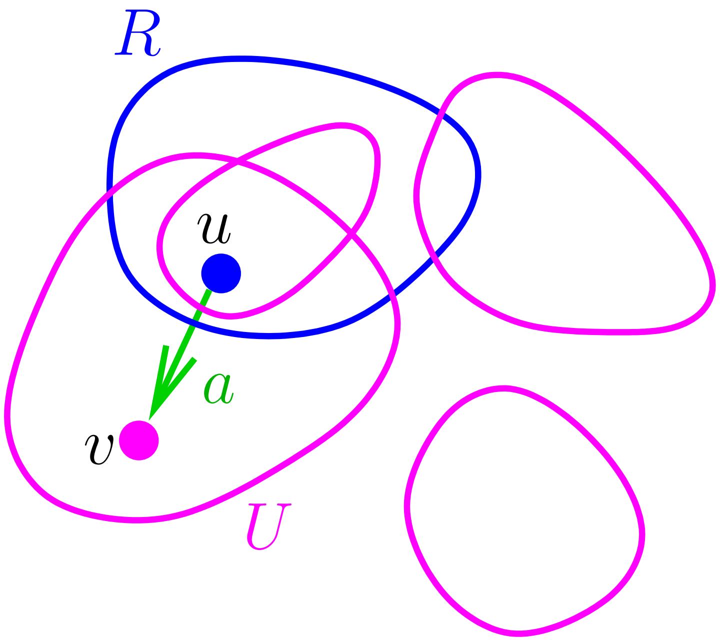
Caso 1: $U \subseteq V$ tais que $a \notin \delta^{\text{in}}(U)$.



- $d_D^{\text{in}}(U)$ não muda
- $g(U)$ não muda

O que causa problemas?

Caso 1: $U \subseteq V$ tais que $a \notin \delta^{\mathrm{in}}(U)$.

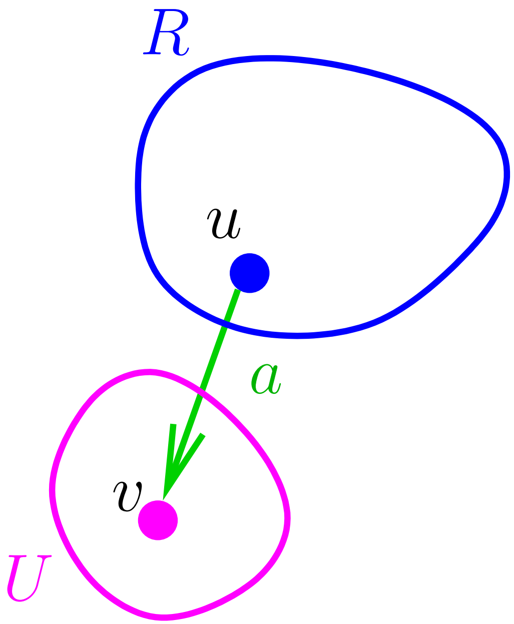


- $d_D^{\mathrm{in}}(U)$ não muda
- $g(U)$ não muda

$$d_D^{\mathrm{in}}(U) \geq g(U) \Longrightarrow d_{D'}^{\mathrm{in}}(U) \geq g'(U) \quad \checkmark$$

O que causa problemas?

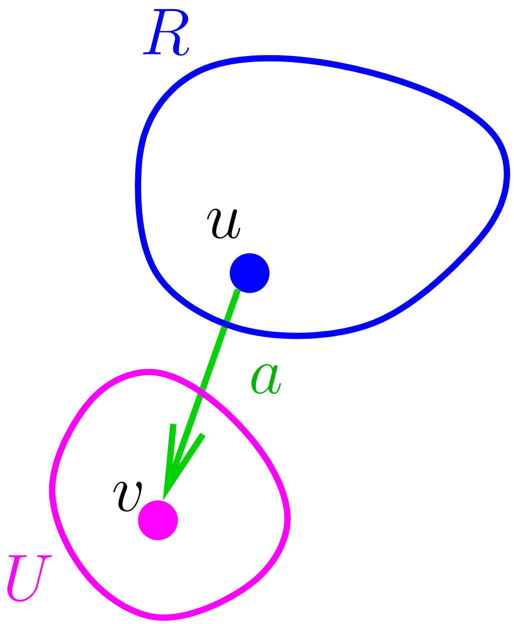
Caso 2: $U \subseteq V$ tais que $a \in \delta^{\text{in}}(U)$ e $R \cap U = \emptyset$.



- $d^{\text{in}}_D(U)$ cai de 1
- $g(U)$ cai de 1

O que causa problemas?

Caso 2: $U \subseteq V$ tais que $a \in \delta^{\text{in}}(U)$ e $R \cap U = \emptyset$.

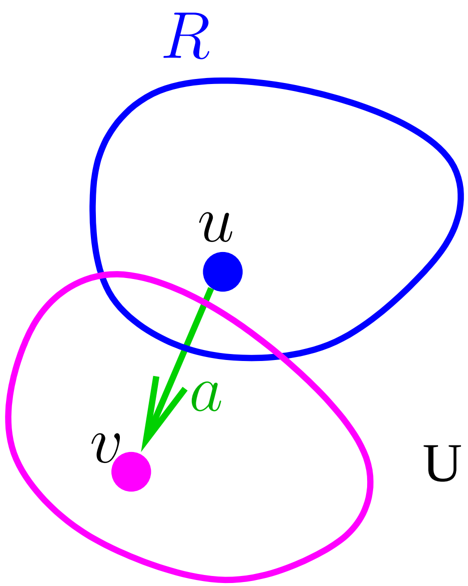


- $d^{\text{in}}_D(U)$ cai de 1
- $g(U)$ cai de 1

$$d^{\text{in}}_D(U) \geq g(U) \Longrightarrow d^{\text{in}}_{D'}(U) \geq g'(U) \quad \surd$$

O que causa problemas?

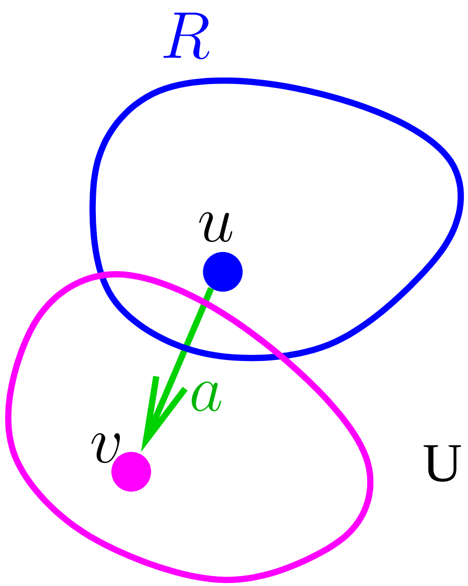
Caso 3: $U \subseteq V$ tais que $a \in \delta^{\text{in}}(U)$ e $R \cap U \neq \emptyset$.



- $d^{\text{in}}_D(U)$ cai de 1
- $g(U)$ não muda

O que causa problemas?

Caso 3: $U \subseteq V$ tais que $a \in \delta^{\text{in}}(U)$ e $R \cap U \neq \emptyset$.

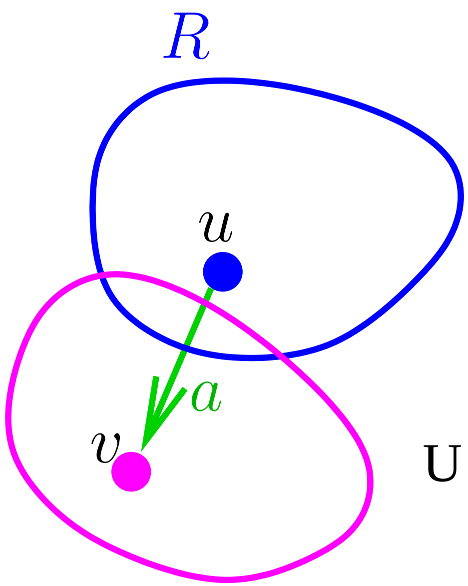


- $d_D^{\text{in}}(U)$ cai de 1
- $g(U)$ não muda

Caso 3a: $d_D^{\text{in}}(U) > g(U) \Longrightarrow d_{D'}^{\text{in}}(U) \geq g'(U)$ $\surd$

O que causa problemas?

Caso 3: $U \subseteq V$ tais que $a \in \delta^{\text{in}}(U)$ e $R \cap U \neq \emptyset$.



- $d^{\text{in}}_D(U)$ cai de 1
- $g(U)$ não muda

Caso 3a: $d^{\text{in}}_D(U) > g(U) \Longrightarrow d^{\text{in}}_{D'}(U) \geq g'(U)$ $\surd$

Caso 3b: $d^{\text{in}}_D(U) = g(U) \Longrightarrow d^{\text{in}}_{D'}(U) < g'(U)$!!!!

Portanto...

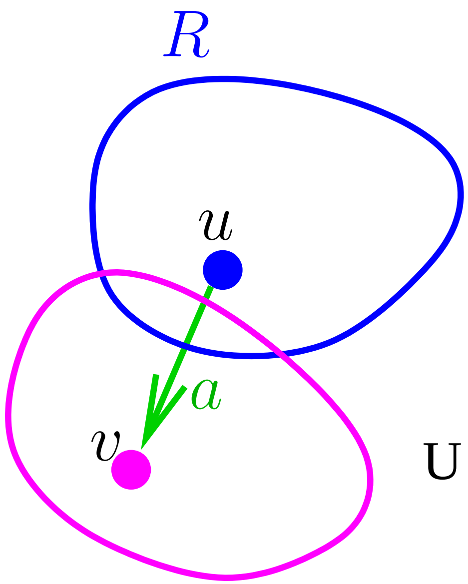
Se

$$R \cap U \neq \emptyset,\ U \not\subseteq R$$
$$\Longrightarrow$$
$$d^{\text{in}}_{D}(U) > g(U)$$

Então

Qualquer arco a que sai de R
é seguro
e pode ser escolhido.

Mas...



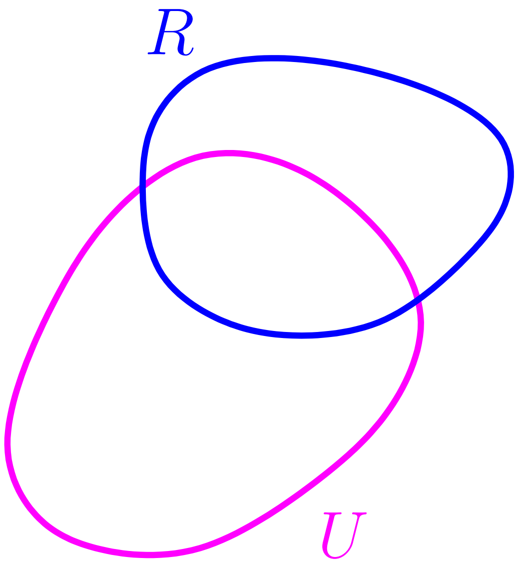
Se existe U tal que:

- $U \cap R \neq \emptyset$
- $U \setminus R \neq \emptyset$
- $d_D^{\text{in}}(U) = g(U)$

$\triangleright$ Então o arco a precisa ser escolhido com cuidado!!

Conjunto perigoso

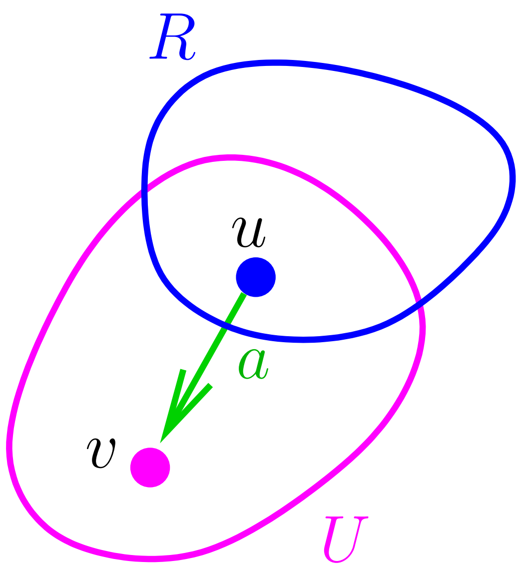
Vamos chamar de perigoso um conjunto $U \subseteq V$ desse tipo:



- $U \cap R \neq \emptyset$
- $U \setminus R \neq \emptyset$
- $d_D^{\text{in}}(U) = g(U)$

Idéia

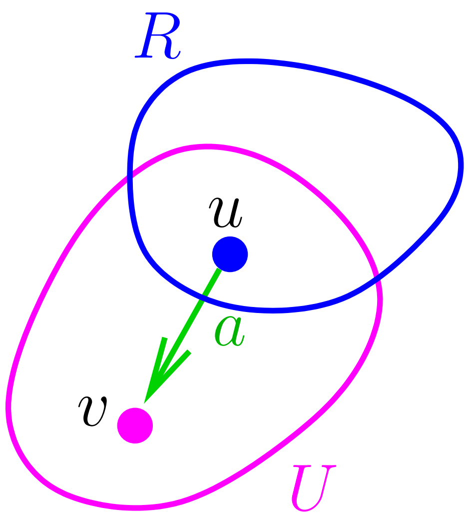
Fixe um conjunto U perigoso.



Escolha $a = uv$ com

- $u \in U \cap R$
- $v \in U \setminus R$

Tal arco existe



Hipótese: $d^{\text{in}}_D(U \setminus R) \geq g(U \setminus R)$.

R e U não são disjuntos:

$$g(U \setminus R) \geq g(U) + 1.$$

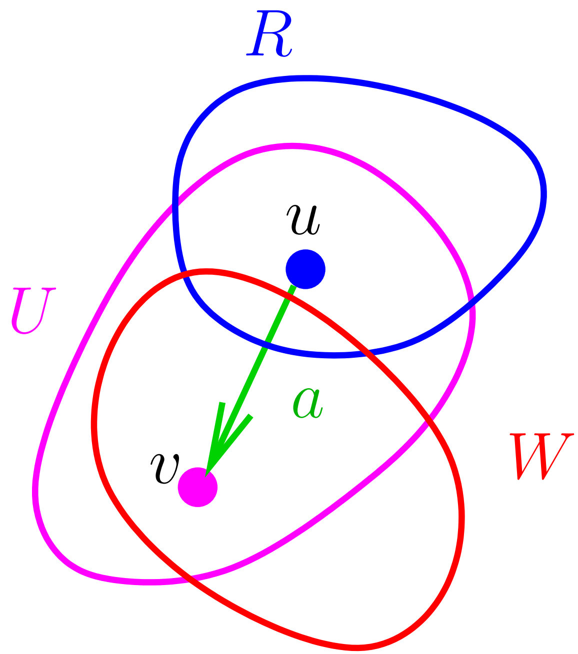
Também: $g(U) = d^{\text{in}}_D(U)$

$\therefore d^{\text{in}}_D(U \setminus R) \geq d^{\text{in}}_D(U)$ e $\delta^{\text{in}}(U \setminus R) \setminus \delta^{\text{in}}(U) \neq \emptyset$.

$\Longrightarrow$ Arco a existe!

Mais perigo...

O arco a só não é seguro se entra em $W \neq U$ perigoso.



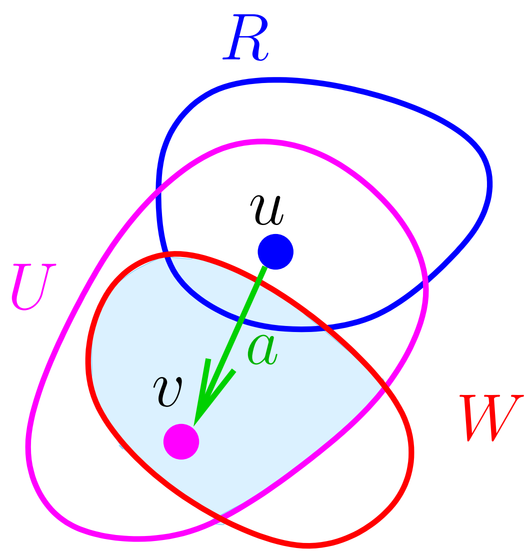
Eliminando o perigo

Suponha:

U e W perigosos, $(U \cap W) \setminus R \neq \emptyset$

$$\Longrightarrow$$

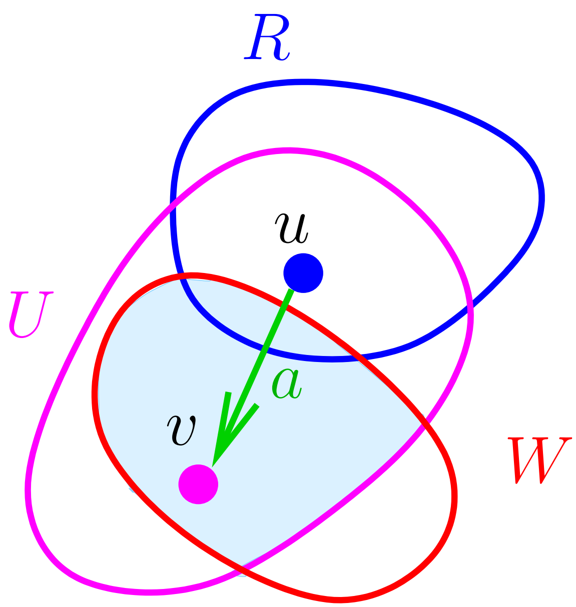
$U \cap W$ perigoso



Eliminando o perigo

▷ U perigoso minimal.

Escolhemos $a = uv$ com $u \in U \cap R$ e $v \in U \setminus R$.



Se a entra em W perigoso

$\Longrightarrow U \cap W$ é perigoso.

U perigoso minimal

$\Longrightarrow$ Contradição!

$\Longrightarrow a$ não entra em W perigoso.

$\Longrightarrow a$ é seguro.

Concluindo...

- Não existe U perigoso.

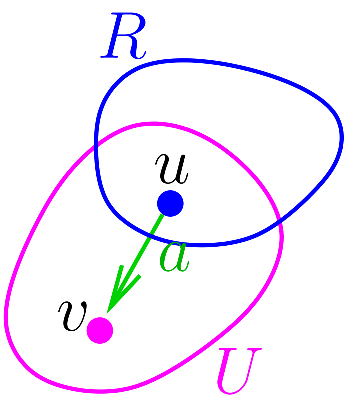
  Escolha qualquer arco a saindo de R para adicionar a B.

Concluindo...

- Não existe U perigoso.

  Escolha qualquer arco a saindo de R
  para adicionar a B.

- Existe U perigoso.



Escolha U perigoso minimal.

Escolha qualquer arco $a = uv$ com
$u \in R \cap U$ e $v \in U \setminus R$
para adiconar a B.

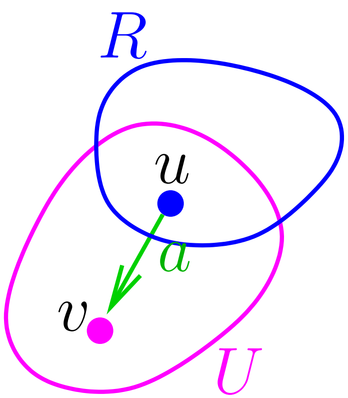
$\Longrightarrow$ a é seguro!

Concluindo...

- Não existe U perigoso.

  Escolha qualquer arco a saindo de R para adicionar a B.

- Existe U perigoso.



Escolha U perigoso minimal.

Escolha qualquer arco $a = uv$ com $u \in R \cap U$ e $v \in U \setminus R$ para adiconar a B.

$\Longrightarrow$ a é seguro!

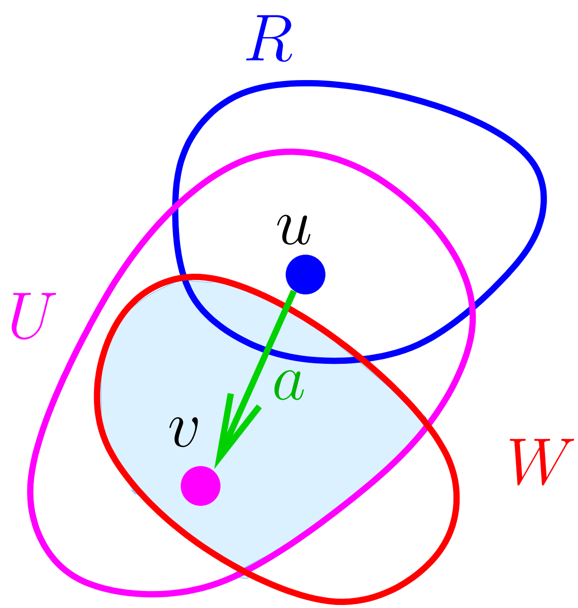
$\square$

Resta mostrar...

U e W perigosos, $(U \cap W) \setminus R \neq \emptyset$

$$\Longrightarrow$$

$U \cap W$ perigoso



Roteiro

(1) $(U \cap W) \setminus R \neq \emptyset$.

(2) $d_D^{\mathrm{in}}(U \cap W) = g(U \cap W)$.

(3) $(U \cap W) \cap R \neq \emptyset$.

Roteiro

(1) $(U \cap W) \setminus R \neq \emptyset$. $\surd$

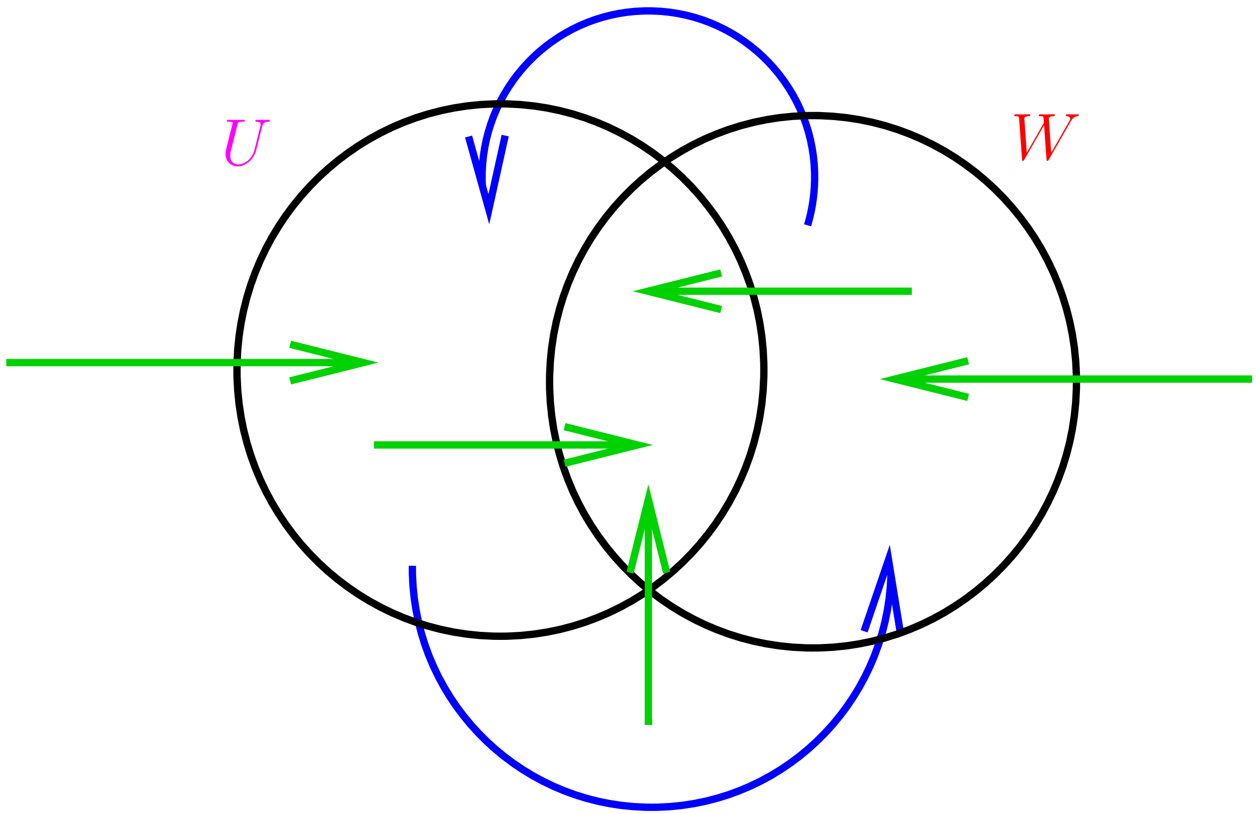
(2) $d_D^{\text{in}}(U \cap W) = g(U \cap W)$.

(3) $(U \cap W) \cap R \neq \emptyset$.

Fato auxiliar I

▷ d^{in}_D é submodular !!

$$d^{\text{in}}_D(U) + d^{\text{in}}_D(W) \geq d^{\text{in}}_D(U \cup W) + d^{\text{in}}_D(U \cap W)$$



Fato auxiliar II

▷ g é supermodular !!

$$g(U) + g(W) \leq g(U \cup W) + g(U \cap W)$$

Fato auxiliar II

▷ g é supermodular: $g(U) + g(W) \leq g(U \cup W) + g(U \cap W)$

Defina:

- $\gamma(U) := \{i\colon R_i \cap U = \emptyset\}$;
- $g(U) = \bigl|\gamma(U)\bigr|$.

Fato auxiliar II

▷ g é supermodular: $g(U) + g(W) \le g(U \cup W) + g(U \cap W)$

$\gamma(U) := \{i \colon R_i \cap U = \emptyset\}$

Então:

$$\begin{aligned} g(U) + g(W) &= \left|\gamma(U)\right| + \left|\gamma(W)\right| \\ &= \left|\gamma(U) \cap \gamma(W)\right| + \left|\gamma(U) \cup \gamma(W)\right| \end{aligned}$$

Fato auxiliar II

▷ g é supermodular: $g(U) + g(W) \leq g(U \cup W) + g(U \cap W)$

$\gamma(U) := \{i : R_i \cap U = \emptyset\}$

Então:

$$\begin{aligned} g(U) + g(W) &= \big|\gamma(U)\big| + \big|\gamma(W)\big| \\ &= \big|\gamma(U) \cap \gamma(W)\big| + \big|\gamma(U) \cup \gamma(W)\big| \end{aligned}$$

R é disjunto de U e R é disjunto de W

$\Longleftrightarrow$

R é disjunto de $U \cup W$.

Fato auxiliar II

▷ g é supermodular: $g(U) + g(W) \leq g(U \cup W) + g(U \cap W)$

$\gamma(U) := \{i\colon R_i \cap U = \emptyset\}$

Então:

$$\begin{aligned} g(U) + g(W) &= \big|\gamma(U)\big| + \big|\gamma(W)\big| \\ &= \big|\gamma(U) \cap \gamma(W)\big| + \big|\gamma(U) \cup \gamma(W)\big| \end{aligned}$$

$\Longrightarrow \gamma(U) \cap \gamma(W) = \gamma(U \cup W)$

$\therefore \big|\gamma(U) \cap \gamma(W)\big| = g(U \cup W)$

Fato auxiliar II

▷ g é supermodular: $g(U) + g(W) \leq g(U \cup W) + g(U \cap W)$

$\gamma(U) := \{i : R_i \cap U = \emptyset\}$

Então:

$$\begin{aligned} g(U) + g(W) &= \big|\gamma(U)\big| + \big|\gamma(W)\big| \\ &= \big|\gamma(U) \cap \gamma(W)\big| + \big|\gamma(U) \cup \gamma(W)\big| \\ &= g(U \cup W) + \big|\gamma(U) \cup \gamma(W)\big| \end{aligned}$$

Fato auxiliar II

▷ g é supermodular: $g(U) + g(W) \leq g(U \cup W) + g(U \cap W)$

$\gamma(U) := \{i \colon R_i \cap U = \emptyset\}$

Então:

$$\begin{aligned} g(U) + g(W) &= \big|\gamma(U)\big| + \big|\gamma(W)\big| \\ &= \big|\gamma(U) \cap \gamma(W)\big| + \big|\gamma(U) \cup \gamma(W)\big| \\ &= g(U \cup W) + \big|\gamma(U) \cup \gamma(W)\big| \end{aligned}$$

R é disjunto de U ou R é disjunto de W

$\Longrightarrow$

R é disjunto de $U \cap W$.

Fato auxiliar II

$\triangleright$ g é supermodular: $g(U) + g(W) \leq g(U \cup W) + g(U \cap W)$

$\gamma(U) := \{i\colon R_i \cap U = \emptyset\}$

Então:

$$\begin{aligned} g(U) + g(W) &= \big|\gamma(U)\big| + \big|\gamma(W)\big| \\ &= \big|\gamma(U) \cap \gamma(W)\big| + \big|\gamma(U) \cup \gamma(W)\big| \\ &= g(U \cup W) + \big|\gamma(U) \cup \gamma(W)\big| \end{aligned}$$

$\Longrightarrow \gamma(U) \cup \gamma(W) \subseteq \gamma(U \cap W)$

$\therefore \big|\gamma(U) \cup \gamma(W)\big| \leq \big|\gamma(U \cap W)\big| = g(U \cap W)$

Fato auxiliar II

▷ g é supermodular: $g(U) + g(W) \leq g(U \cup W) + g(U \cap W)$

$\gamma(U) := \{i : R_i \cap U = \emptyset\}$

Então:

$$\begin{aligned} g(U) + g(W) &= \big|\gamma(U)\big| + \big|\gamma(W)\big| \\ &= \big|\gamma(U) \cap \gamma(W)\big| + \big|\gamma(U) \cup \gamma(W)\big| \\ &= g(U \cup W) + \big|\gamma(U) \cup \gamma(W)\big| \\ &\leq g(U \cup W) + g(U \cap W). \end{aligned}$$

$\square$

$$d^{\mathrm{in}}_{D}(U \cap W) = g(U \cap W)$$

$d_D^{\text{in}}(U \cap W) = g(U \cap W)$

Temos:

$$d_D^{\text{in}}(U \cap W) \leq d_D^{\text{in}}(U) + d_D^{\text{in}}(W) - d_D^{\text{in}}(U \cup W)$$

Pela submodularidade de d_D^{in}:

$$d_D^{\text{in}}(U \cap W) + d_D^{\text{in}}(U \cup W) \leq d_D^{\text{in}}(U) + d_D^{\text{in}}(W).$$

$d^{\text{in}}_D(U \cap W) = g(U \cap W)$

Temos:

$$\begin{aligned} d^{\text{in}}_D(U \cap W) &\leq d^{\text{in}}_D(U) + d^{\text{in}}_D(W) - d^{\text{in}}_D(U \cup W) \\ &\leq g(U) + g(W) - g(U \cup W) \end{aligned}$$

U e W perigosos $\Longrightarrow d^{\text{in}}_D(U) = g(U)$ e $d^{\text{in}}_D(W) = g(W)$.

Hipótese $\Longrightarrow d^{\text{in}}_D(U \cup W) \geq g(U \cup W)$.

$d^{\text{in}}_D(U \cap W) = g(U \cap W)$

Temos:

$$\begin{aligned} d^{\text{in}}_D(U \cap W) &\leq d^{\text{in}}_D(U) + d^{\text{in}}_D(W) - d^{\text{in}}_D(U \cup W) \\ &\leq g(U) + g(W) - g(U \cup W) \\ &\leq g(U \cap W) \end{aligned}$$

Pela supermodularidade de g:

$$d^{\text{in}}_D(U) + d^{\text{in}}_D(W) \leq d^{\text{in}}_D(U \cap W) + d^{\text{in}}_D(U \cup W).$$

$$d_D^{\text{in}}(U \cap W) = g(U \cap W)$$

Temos:

$$\begin{aligned} d_D^{\text{in}}(U \cap W) &\leq d_D^{\text{in}}(U) + d_D^{\text{in}}(W) - d_D^{\text{in}}(U \cup W) \\ &\leq g(U) + g(W) - g(U \cup W) \\ &\leq g(U \cap W) \end{aligned}$$

Hipótese $\Longrightarrow d_D^{\text{in}}(U \cap W) \geq g(U \cap W)$

$d_D^{\text{in}}(U \cap W) = g(U \cap W)$

Temos:

$$
\begin{aligned}
d_D^{\text{in}}(U \cap W) &\leq d_D^{\text{in}}(U) + d_D^{\text{in}}(W) - d_D^{\text{in}}(U \cup W) \\
&\leq g(U) + g(W) - g(U \cup W) \\
&\leq g(U \cap W)
\end{aligned}
$$

Hipótese $\Longrightarrow d_D^{\text{in}}(U \cap W) \geq g(U \cap W)$

$\Longrightarrow d_D^{\text{in}}(U \cap W) = g(U \cap W)$

Roteiro

(1) $(U \cap W) \setminus R \neq \emptyset$. $\surd$

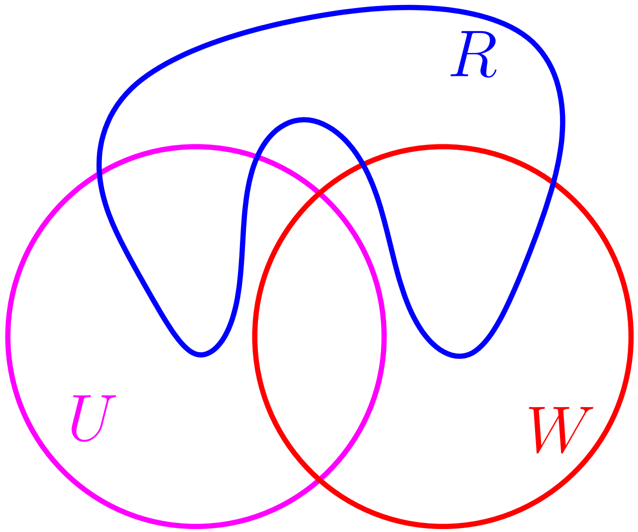
(2) $d_D^{\text{in}}(U \cap W) = g(U \cap W)$. $\surd$

(3) $(U \cap W) \cap R \neq \emptyset$.

$(U \cap W) \cap R \neq \emptyset$

Temos: U e W perigosos $\Longrightarrow U \cap R \neq \emptyset$ e $W \cap R \neq \emptyset$.

Não queremos que isso ocorra:



$(U \cap W) \cap R \neq \emptyset$

Mostramos:

$$\begin{aligned} d_D^{\text{in}}(U \cap W) &\leq d_D^{\text{in}}(U) + d_D^{\text{in}}(W) - d_D^{\text{in}}(U \cup W) \\ &\leq g(U) + g(W) - g(U \cup W) \\ &\leq g(U \cap W) \\ &\leq d_D^{\text{in}}(U \cap W) \end{aligned}$$

Todas as relações valem com igualdade!!

$$g(U) + g(W) = g(U \cup W) + g(U \cap W)$$

$(U \cap W) \cap R \neq \emptyset$

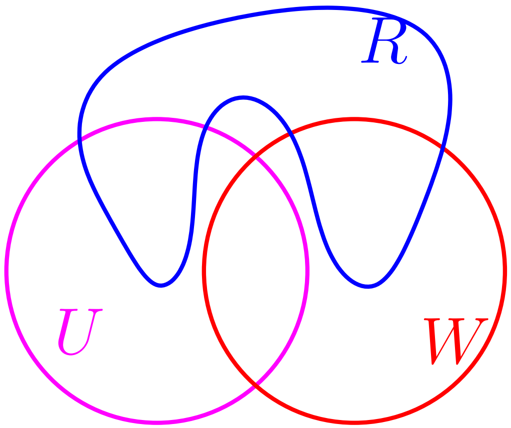
Temos

- $g(U) + g(W) = g(U \cup W) + \big|\gamma(U) \cup \gamma(W)\big|$
- $\gamma(U) \cup \gamma(W) \subseteq \gamma(U \cap W)$

$(U \cap W) \cap R \neq \emptyset$

Temos

- $g(U) + g(W) = g(U \cup W) + \left|\gamma(U) \cup \gamma(W)\right|$
- $\gamma(U) \cup \gamma(W) \subseteq \gamma(U \cap W)$



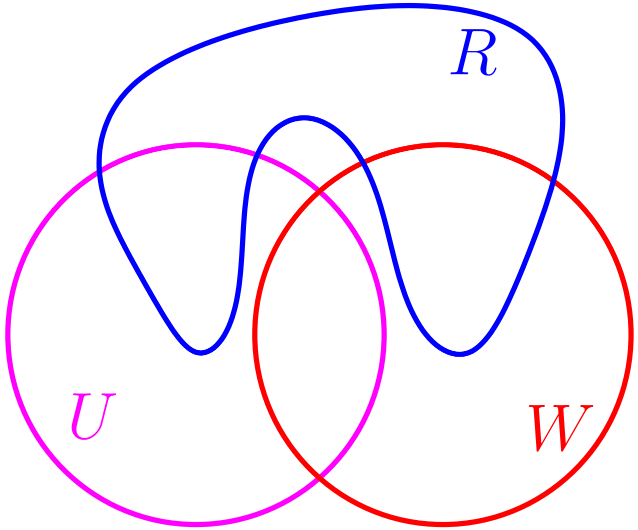
$$\Longrightarrow \gamma(U) \cup \gamma(W) \subset \gamma(U \cap W)$$

$$\therefore g(U \cap W) > \left|\gamma(U) \cup \gamma(W)\right|$$

$\Longrightarrow$ não valeria a igualdade!

$(U \cap W) \cap R \neq \emptyset$

Não existe R desse tipo:



Como $R \cap U \neq \emptyset$ e $R \cap W \neq \emptyset$, pois U e W são perigosos

$\Longrightarrow (U \cap W) \cap R \neq \emptyset$.

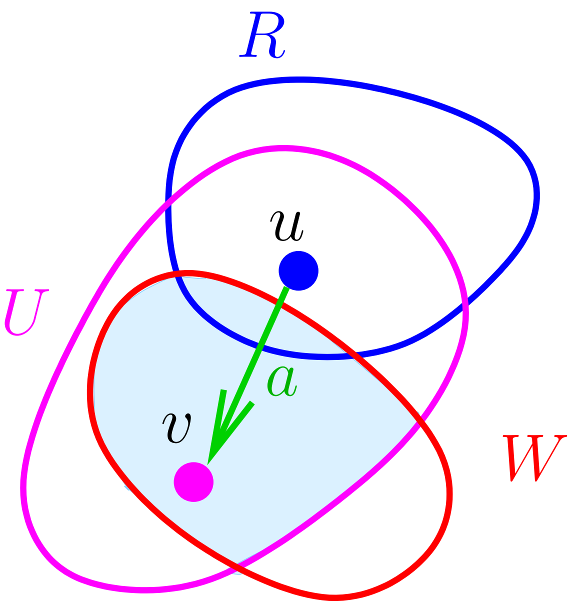
Roteiro

(1) $(U \cap W) \setminus R \neq \emptyset$. $\surd$

(2) $d^{\text{in}}_{D}(U \cap W) = g(U \cap W)$. $\surd$

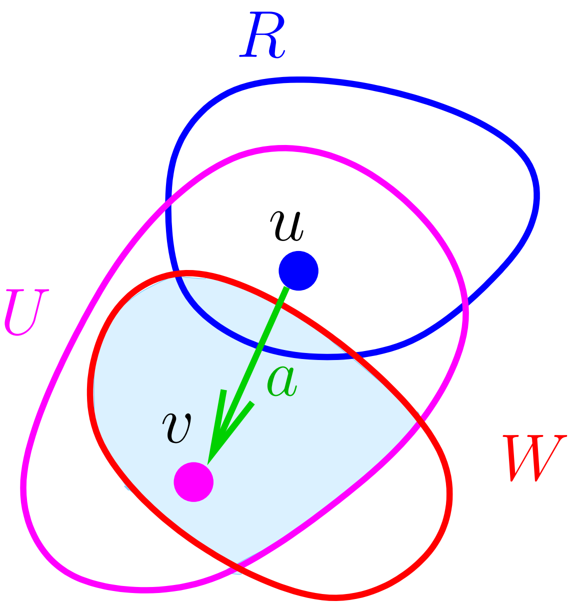
(3) $(U \cap W) \cap R \neq \emptyset$. $\surd$

$U \cap W$ é perigoso!



- $(U \cap W) \cap R \neq \emptyset$
- $(U \cap W) \setminus R \neq \emptyset$
- $d_D^{\text{in}}(U \cap W) = g(U \cap W)$

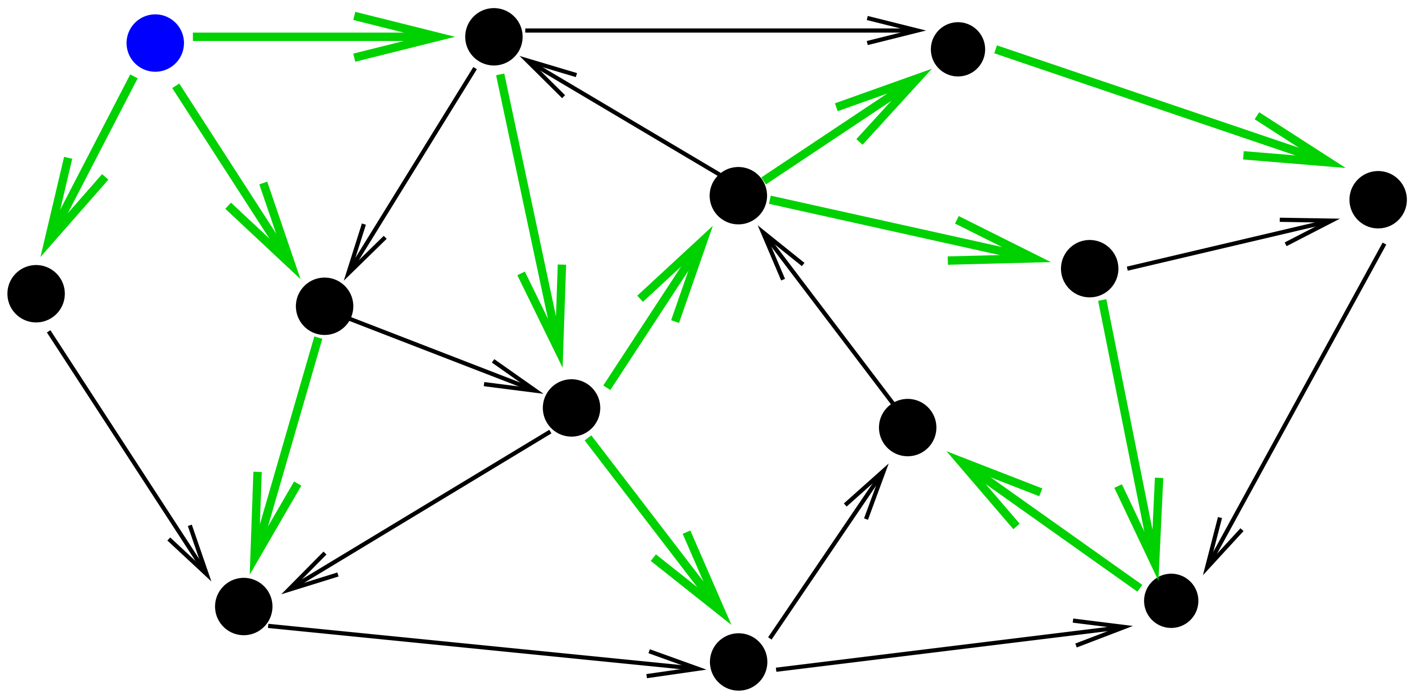
$U \cap W$ é perigoso!



- $(U \cap W) \cap R \neq \emptyset$
- $(U \cap W) \setminus R \neq \emptyset$
- $d^{\text{in}}_D(U \cap W) = g(U \cap W)$

$\square$

r-Arborescências

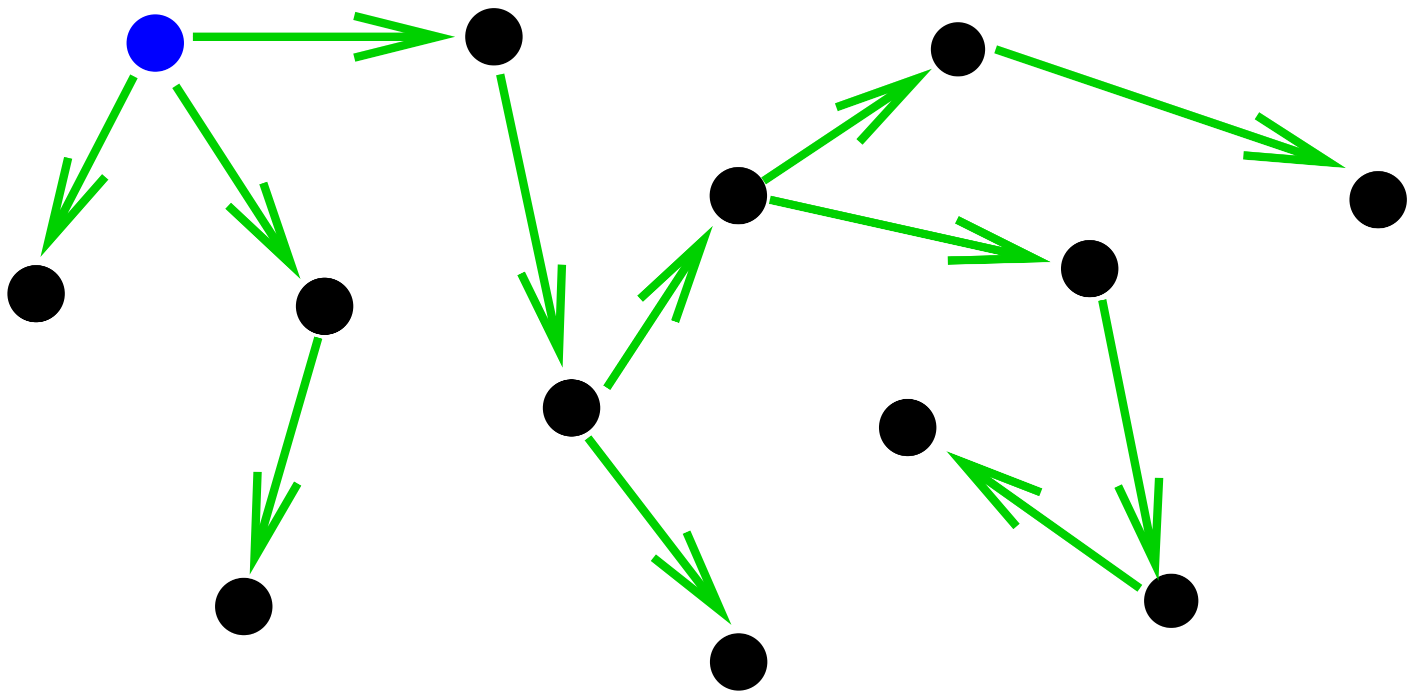


$B \subseteq A$ é uma arborescência se é uma ramificação conexa.

Uma arborescência tem uma única raiz r.

Dizemos que B é uma r-arborescência.

r-Arborescências

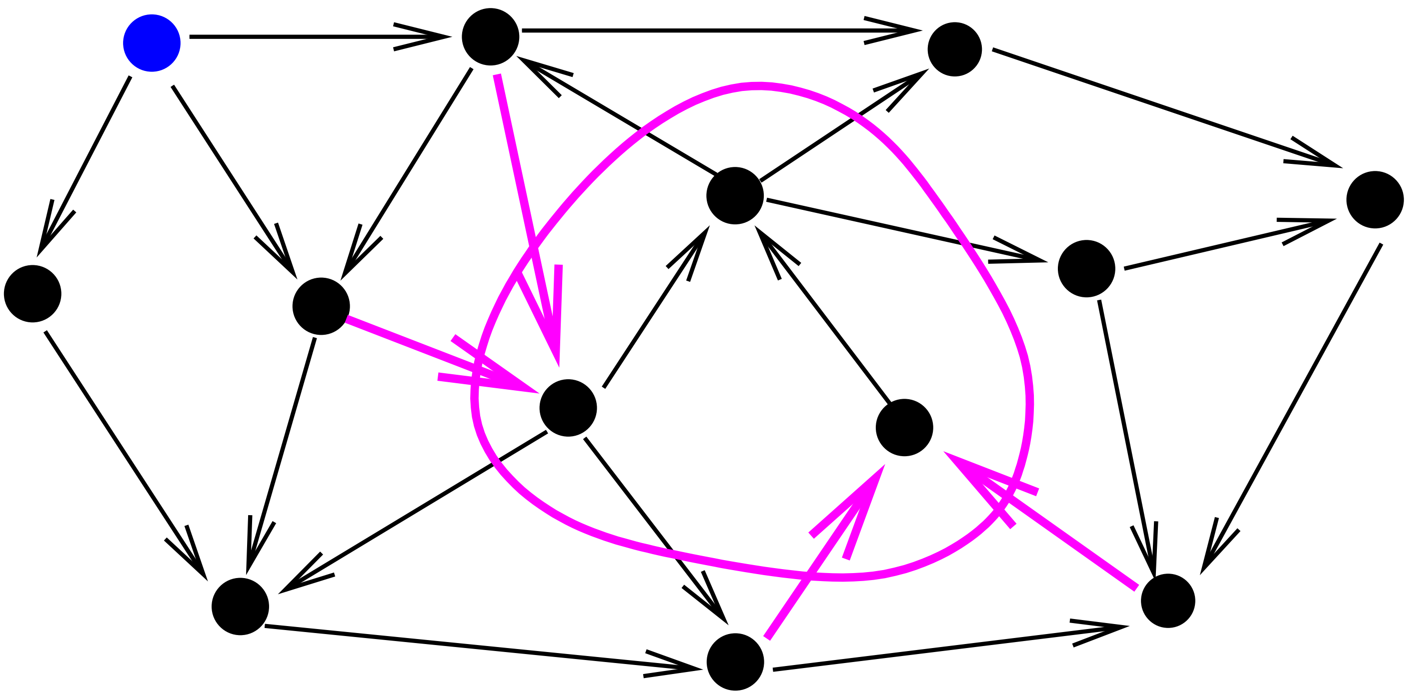


$B \subseteq A$ é uma arborescência se é uma ramificação conexa.

Uma arborescência tem uma única raiz r.

Dizemos que B é uma r-arborescência.

r-cortes



Um r-corte é um conjunto de arcos da forma $\delta^{\text{in}}(U)$, com $U \subseteq V \setminus \{r\}$, $U \neq \emptyset$.

Corolário

▷ Empacotamento de r-arborescências de Edmonds.

$D = (V, A)$ grafo orientado.
$r \in V$

Número máximo de r-arborescências disjuntas
=
Tamanho mínimo de um r-corte

Corolário

Quero k r-arborescências disjuntas.

- $g(U) = k$, se $U \subseteq V \setminus \{r\}$, $U \neq \emptyset$.
- $g(U) = 0$, se $r \in U \subseteq V$.

Corolário

Quero k r-arborescências disjuntas.

- $g(U) = k$, se $U \subseteq V \setminus \{r\}$, $U \neq \emptyset$.
- $g(U) = 0$, se $r \in U \subseteq V$.

Logo:

Existem k r-arborescências disjuntas

$$\Longleftrightarrow$$

$d_D^{\text{in}}(U) \geq k$, para todo $U \subseteq V \setminus \{r\}$, $U \neq \emptyset$.

$\therefore$ Qualquer $k \leq$ tamanho r-corte mínimo funciona!!

Corolário

Quero k r-arborescências disjuntas.

- $g(U) = k$, se $U \subseteq V \setminus \{r\}$, $U \neq \emptyset$.
- $g(U) = 0$, se $r \in U \subseteq V$.

Logo:

Existem k r-arborescências disjuntas $\Longleftrightarrow$ $d_D^{\mathrm{in}}(U) \geq k$, para todo $U \subseteq V \setminus \{r\}$, $U \neq \emptyset$.

$\therefore$ Qualquer $k \leq$ tamanho r-corte mínimo funciona!!

$\square$