As conjecturas de Woodall e de Edmonds-Giles

Contra-exemplos e provas

Marcel K. de Carli Silva

Departamento de Ciência da Computação

Instituto de Matemática e Estatística

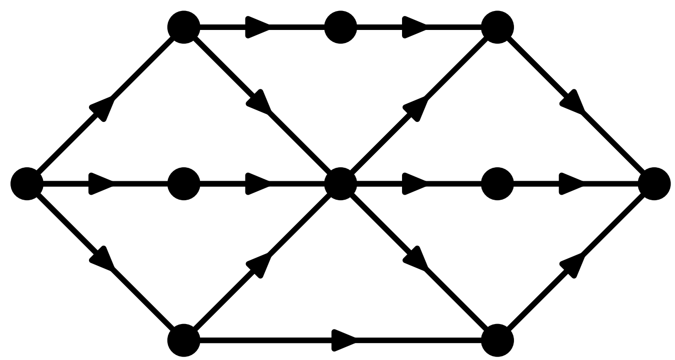
Universidade de São Paulo

Tópicos

- As conjecturas
  - ▷ Preliminares
  - Os enunciados
  - As relações
- Os contra-exemplos
- As provas

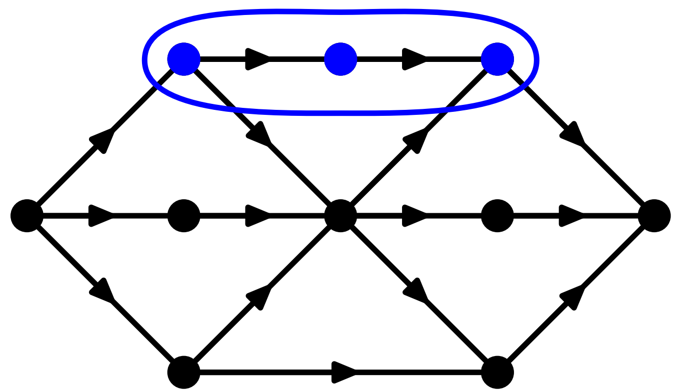
Definições básicas

$D = (V, A)$ grafo orientado



Definições básicas

$D = (V, A)$ grafo orientado
$\emptyset \neq S \subsetneq V$

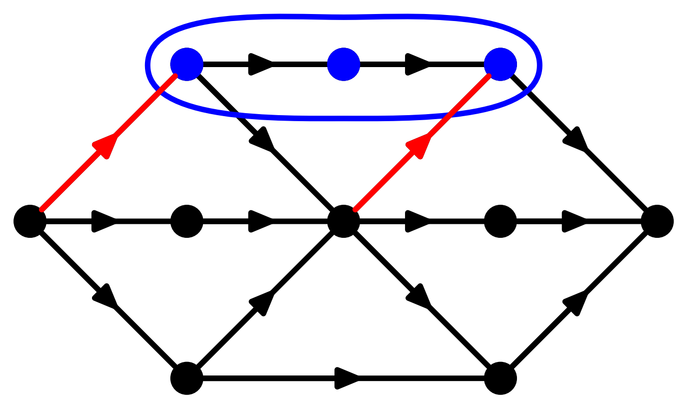


Definições básicas

$D = (V, A)$ grafo orientado

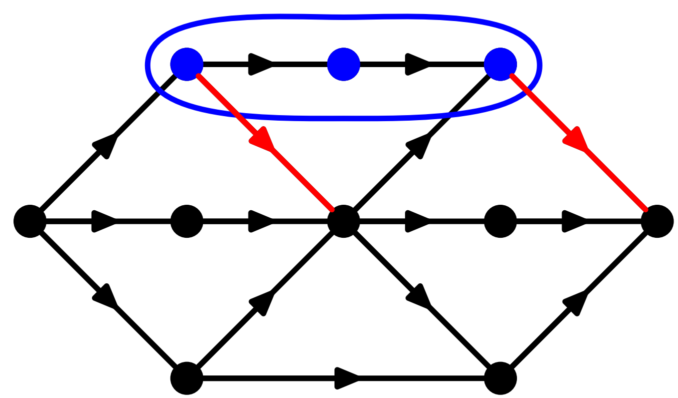
$\emptyset \neq S \subsetneq V$

$\delta^{\,\mathrm{in}}(S)$



Definições básicas

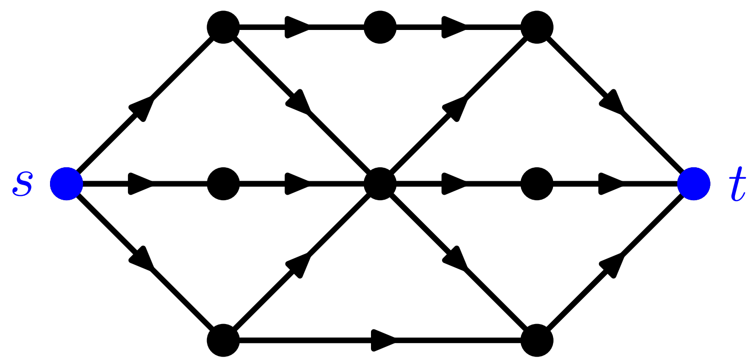
$D = (V, A)$ grafo orientado
$\emptyset \neq S \subsetneq V$
$\delta^{\text{out}}(S)$



Definições básicas

$D = (V, A)$ grafo orientado

$s, t \in V$

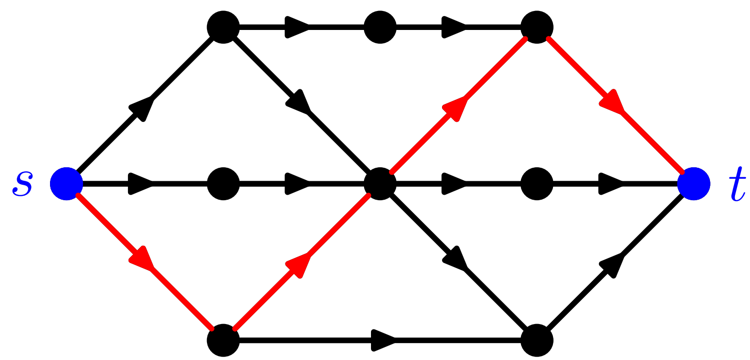


Definições básicas

$D = (V, A)$ grafo orientado

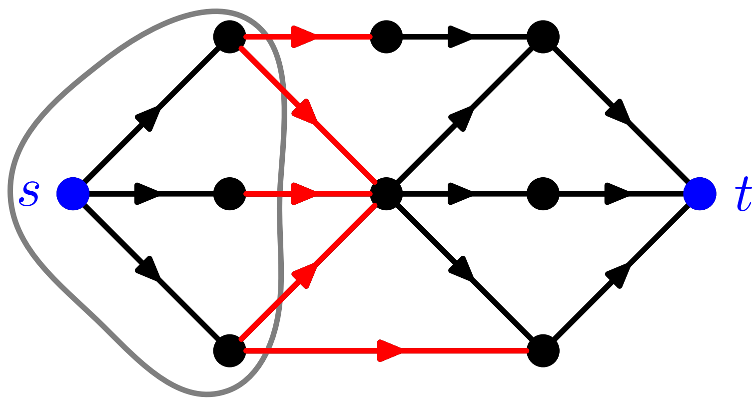
$s, t \in V$

(s,t)-caminho



Definições básicas

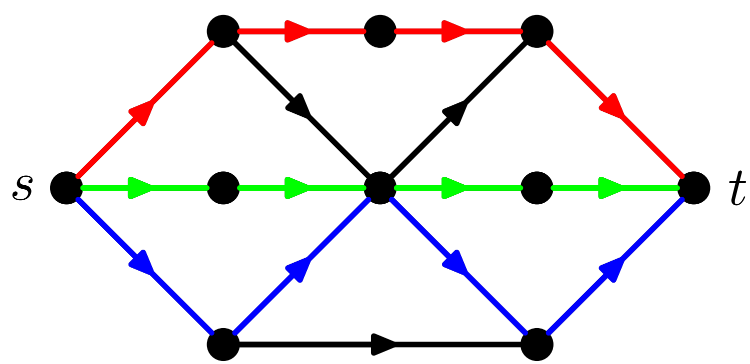
$D = (V, A)$ grafo orientado
$s, t \in V$
(s,t)-corte $=$ um $\delta^{\text{out}}(S)$ com $s \in S$ e $t \notin S$



Teorema de Menger

$D = (V, A)$ grafo orientado, $s, t \in V$

n$^{\text{o}}$ máximo de (s, t)-caminhos disjuntos nos arcos
$=$ tamanho mínimo de um (s, t)-corte

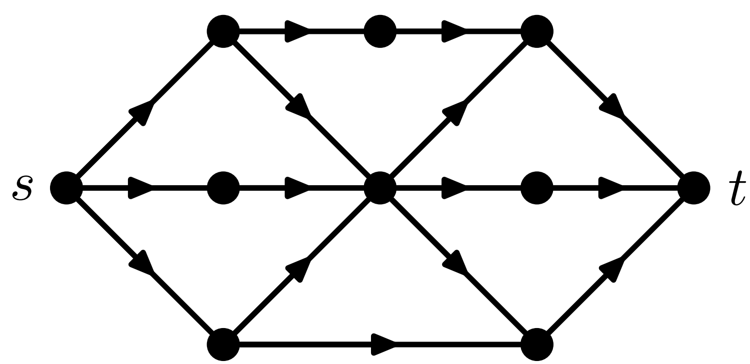


Teorema de Menger

$D = (V, A)$ grafo orientado, $s, t \in V$

n$^{\text{o}}$ máximo de (s,t)-caminhos disjuntos nos arcos
$=$ tamanho mínimo de um (s,t)-corte

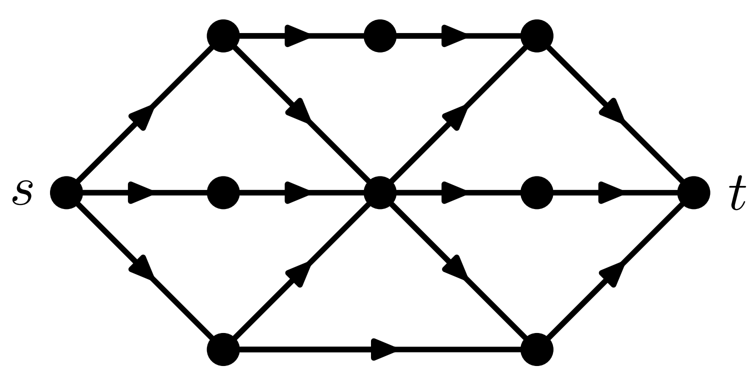
E se invertermos?



Teorema de Menger

$D = (V, A)$ grafo orientado, $s, t \in V$

n$^{\text{o}}$ máximo de (s,t)-cortes disjuntos
$=$ tamanho mínimo de um (s,t)-caminho?

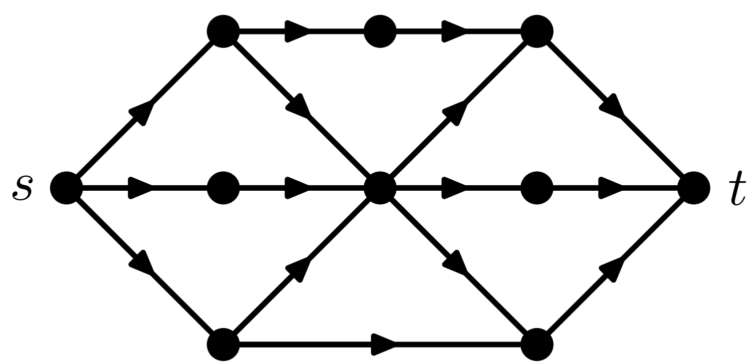


Teorema de Menger

$D = (V, A)$ grafo orientado, $s, t \in V$

n$^{\text{o}}$ máximo de (s,t)-cortes disjuntos
$=$ tamanho mínimo de um (s,t)-caminho?

Continua valendo!

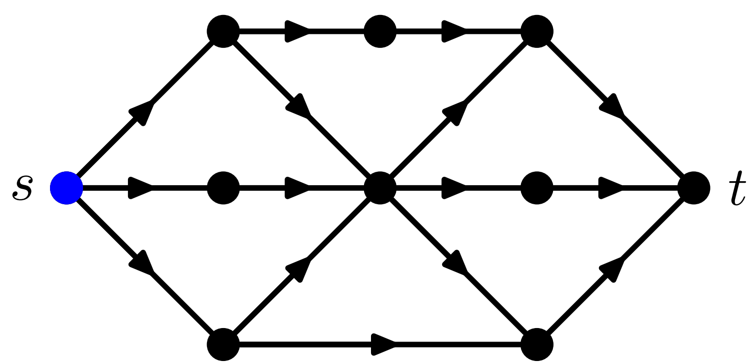


Teorema de Menger

$D = (V, A)$ grafo orientado, $s, t \in V$

n$^{\text{o}}$ máximo de (s,t)-cortes disjuntos
$=$ tamanho mínimo de um (s,t)-caminho

$S_{\leq 0}$

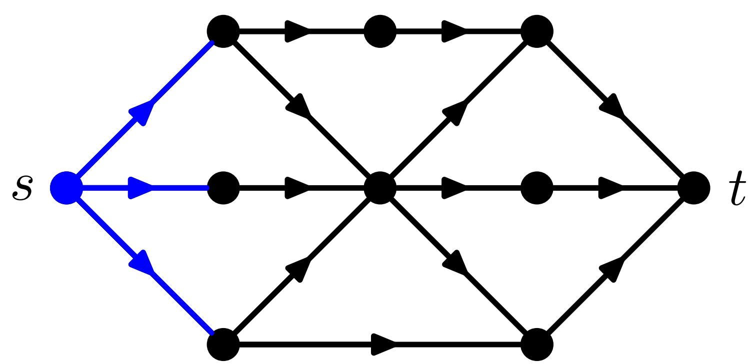


Teorema de Menger

$D = (V, A)$ grafo orientado, $s, t \in V$

n$^{\text{o}}$ máximo de (s,t)-cortes disjuntos
$=$ tamanho mínimo de um (s,t)-caminho

$\delta^{\text{out}}(S_{\leq 0})$

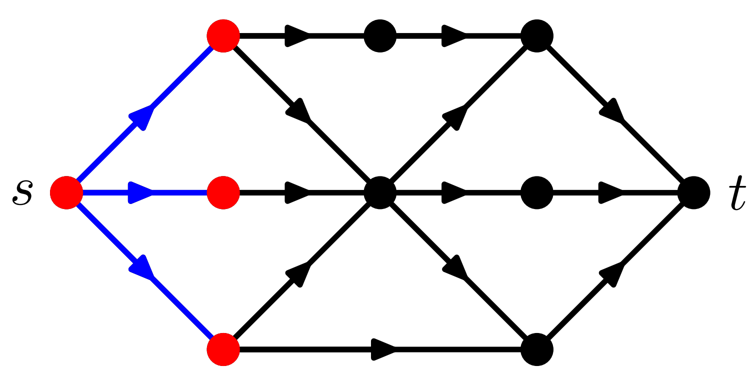


Teorema de Menger

$D = (V, A)$ grafo orientado, $s, t \in V$

n$^{\text{o}}$ máximo de (s, t)-cortes disjuntos
$=$ tamanho mínimo de um (s, t)-caminho

$S_{\leq 1}$

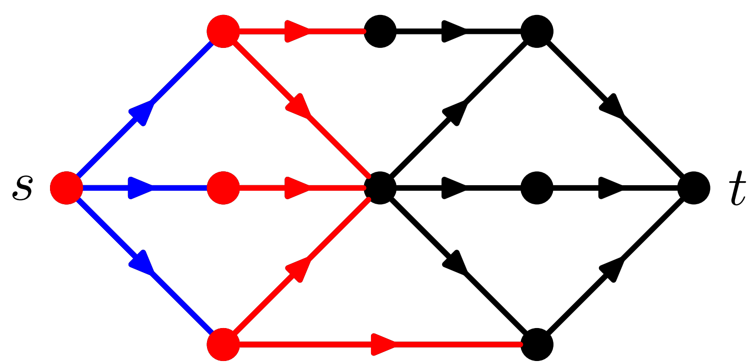


Teorema de Menger

$D = (V, A)$ grafo orientado, $s, t \in V$

n$^{\rm o}$ máximo de (s,t)-cortes disjuntos
$=$ tamanho mínimo de um (s,t)-caminho

$\delta^{\rm out}(S_{\leq 1})$

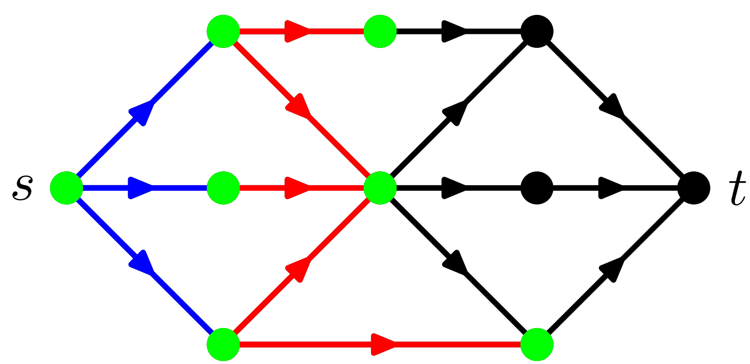


Teorema de Menger

$D = (V, A)$ grafo orientado, $s, t \in V$

n$^{\text{o}}$ máximo de (s,t)-cortes disjuntos
$=$ tamanho mínimo de um (s,t)-caminho

$S_{\leq 2}$

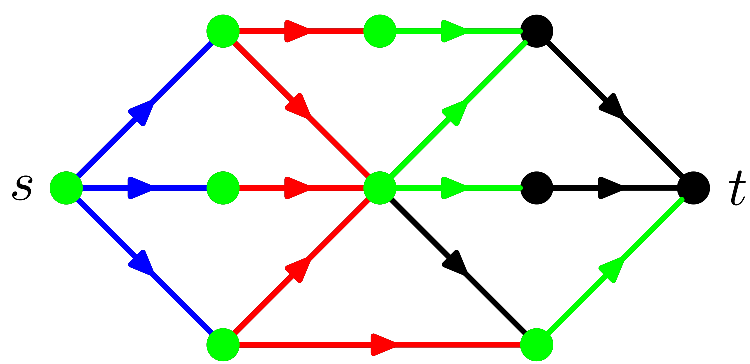


Teorema de Menger

$D = (V, A)$ grafo orientado, $s, t \in V$

n$^{\text{o}}$ máximo de (s,t)-cortes disjuntos
$=$ tamanho mínimo de um (s,t)-caminho

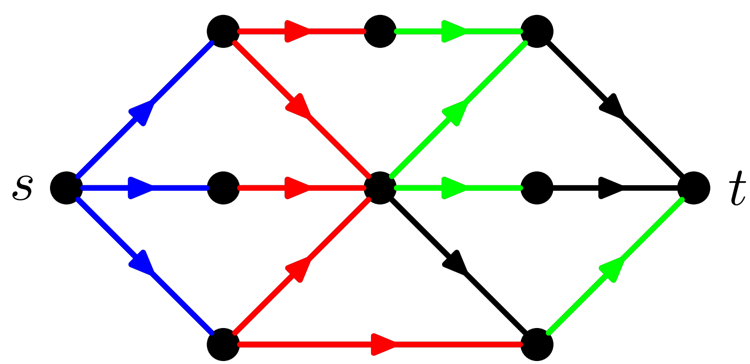
$\delta^{\text{out}}(S_{\leq 2})$



Teorema de Menger

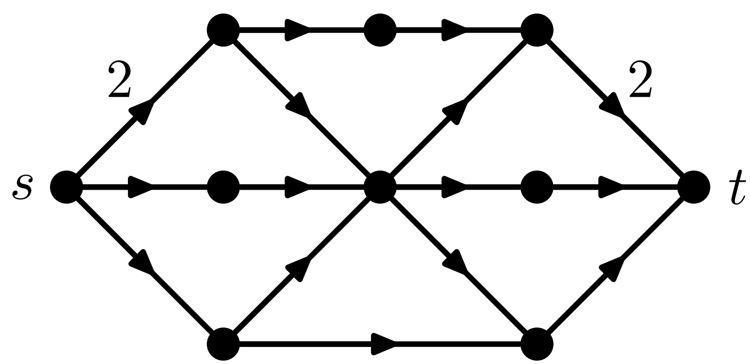
$D = (V, A)$ grafo orientado, $s, t \in V$

n$^{\text{o}}$ máximo de (s, t)-cortes disjuntos
$=$ tamanho mínimo de um (s, t)-caminho



Menger com capacidades

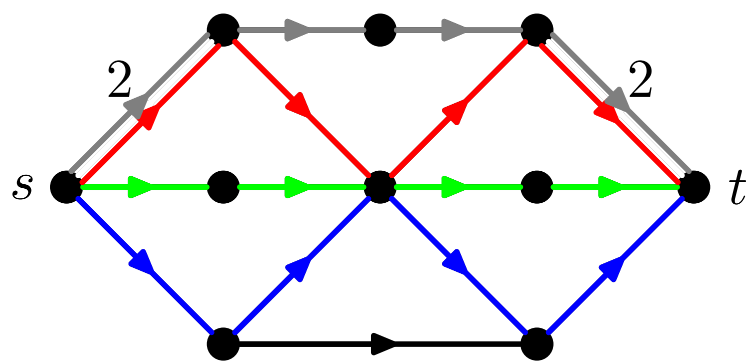
$D = (V, A)$ grafo orientado, $s, t \in V$, $c\colon A \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ capacidades



Menger com capacidades

$D = (V, A)$ grafo orientado, $s, t \in V$, $c\colon A \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ capacidades

n$^{\mathrm{o}}$ máximo de (s,t)-caminhos
com cada arco a em no máximo $c(a)$ caminhos
$=$ capacidade mínima de um (s,t)-corte

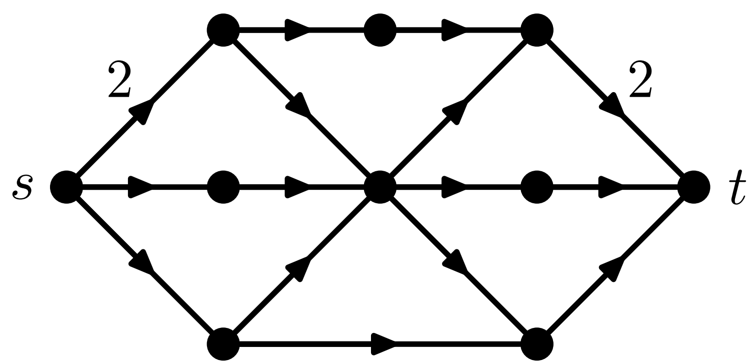


Menger com capacidades

$D = (V, A)$ grafo orientado, $s, t \in V$, $c\colon A \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ capacidades

n$^{\text{o}}$ máximo de (s,t)-caminhos
com cada arco a em no máximo $c(a)$ caminhos
$=$ capacidade mínima de um (s,t)-corte

Como reduzir a Menger?

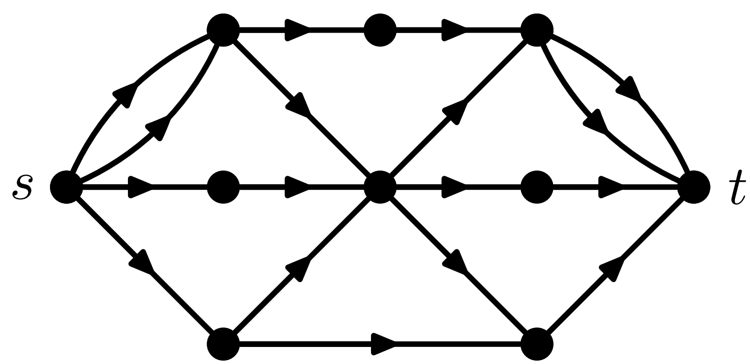


Menger com capacidades

$D = (V, A)$ grafo orientado, $s, t \in V$, $c\colon A \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ capacidades

n$^{\text{o}}$ máximo de (s,t)-caminhos
com cada arco a em no máximo $c(a)$ caminhos
$=$ capacidade mínima de um (s,t)-corte

Como reduzir a Menger? Arcos múltiplos

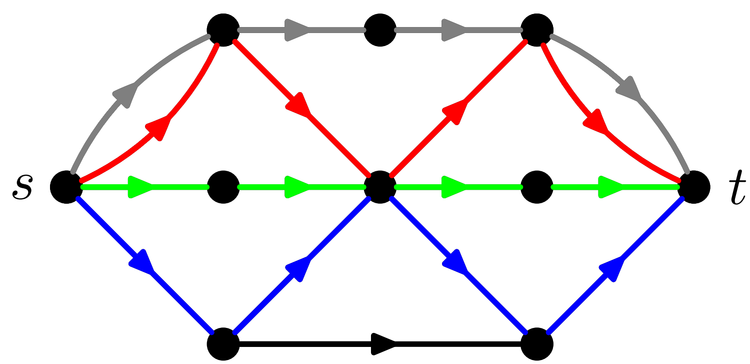


Menger com capacidades

$D = (V, A)$ grafo orientado, $s, t \in V$, $c\colon A \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ capacidades

n$^{\text{o}}$ máximo de (s,t)-caminhos
com cada arco a em no máximo $c(a)$ caminhos
$=$ capacidade mínima de um (s,t)-corte

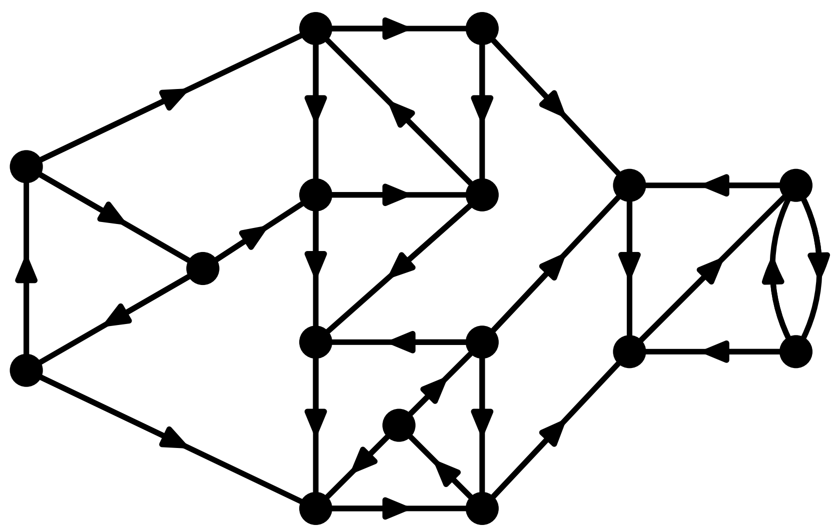
Como reduzir a Menger? Arcos múltiplos



Cortes orientados

$D = (V, A)$ grafo orientado, $\emptyset \neq S \subsetneq V$

$\delta^{\mathrm{out}}(S)$ é corte orientado se $\delta^{\mathrm{in}}(S) = \emptyset$

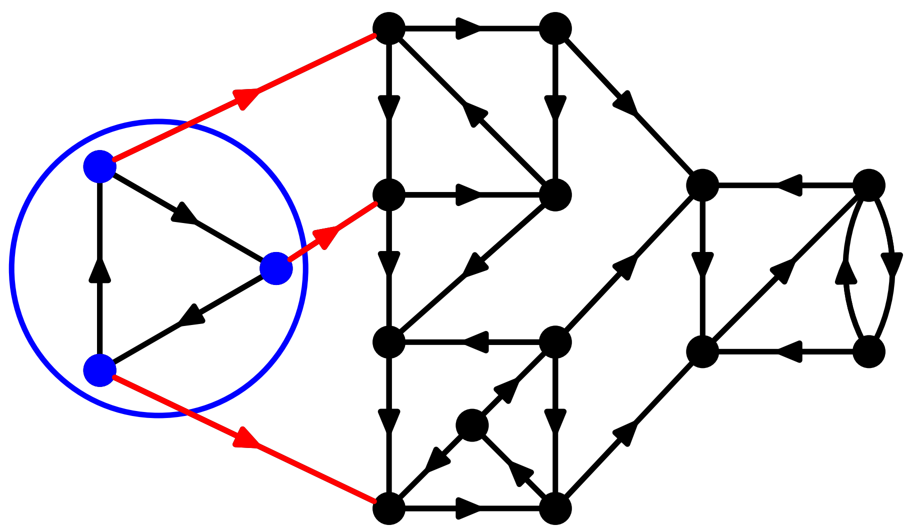


Cortes orientados

$D = (V, A)$ grafo orientado, $\emptyset \neq S \subsetneq V$

$\delta^{\mathrm{out}}(S)$ é corte orientado se $\delta^{\mathrm{in}}(S) = \emptyset$

$\delta^{\mathrm{out}}(S)$ é corte orientado

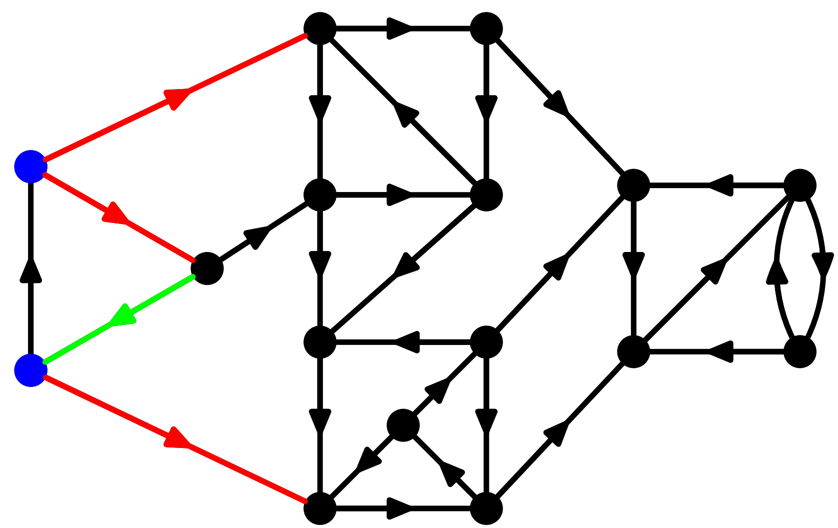


Cortes orientados

$D = (V, A)$ grafo orientado, $\emptyset \neq S \subsetneq V$

$\delta^{\mathrm{out}}(S)$ é corte orientado se $\delta^{\mathrm{in}}(S) = \emptyset$

cortes orientados não "cruzam" componentes fortes

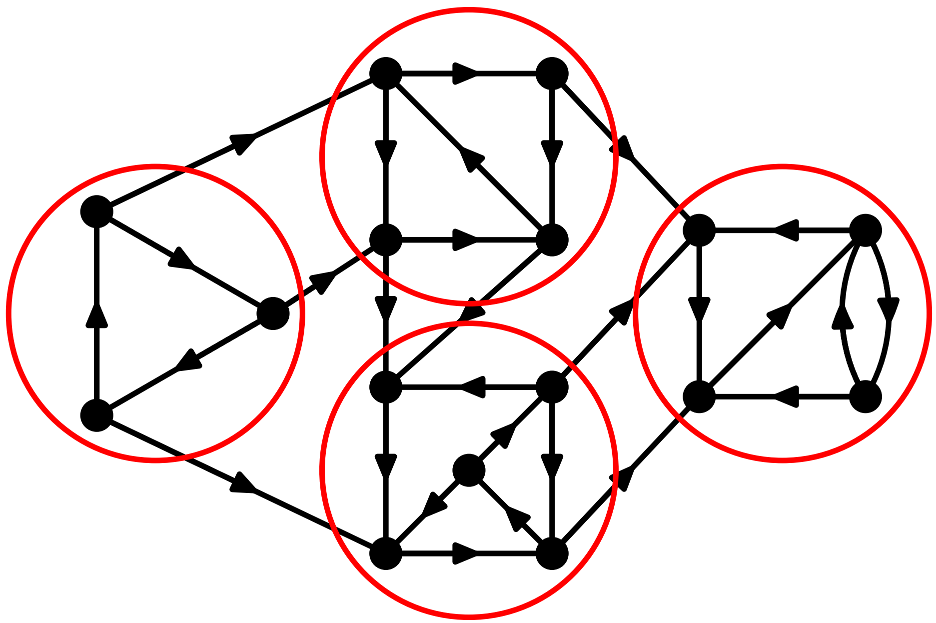


Cortes orientados

$D = (V, A)$ grafo orientado, $\emptyset \neq S \subsetneq V$

$\delta^{\text{out}}(S)$ é corte orientado se $\delta^{\text{in}}(S) = \emptyset$

$\therefore$ componentes fortes podem ser contraídos

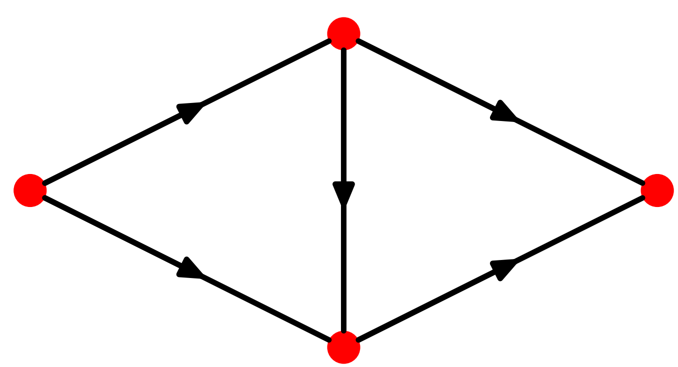


Cortes orientados

$D = (V, A)$ grafo orientado, $\emptyset \neq S \subsetneq V$

$\delta^{\text{out}}(S)$ é corte orientado se $\delta^{\text{in}}(S) = \emptyset$

$\therefore$ componentes fortes podem ser contraídos

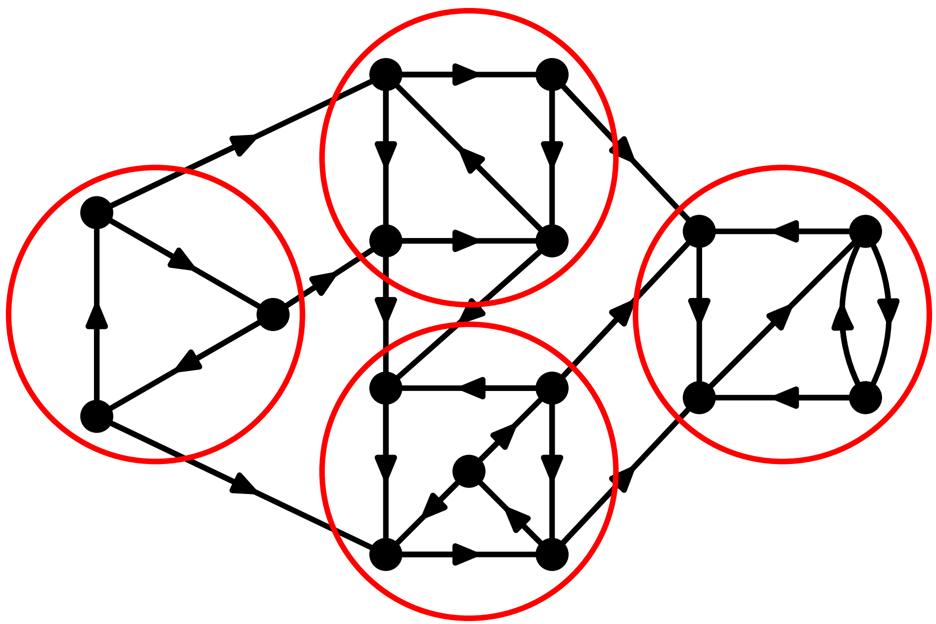


Cortes orientados

$D = (V, A)$ grafo orientado, $\emptyset \neq S \subsetneq V$

$\delta^{\text{out}}(S)$ é corte orientado se $\delta^{\text{in}}(S) = \emptyset$

D tem corte orientado $\iff$ D não é fortemente conexo



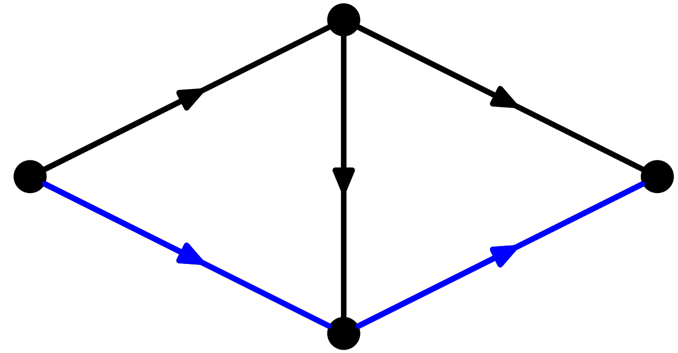
Junções

$D = (V, A)$ grafo orientado fracamente conexo

Junções

$D = (V, A)$ grafo orientado fracamente conexo

T é junção (= *dijoin, directed join*)
se $T \cap C \neq \emptyset$ para todo corte orientado C de D

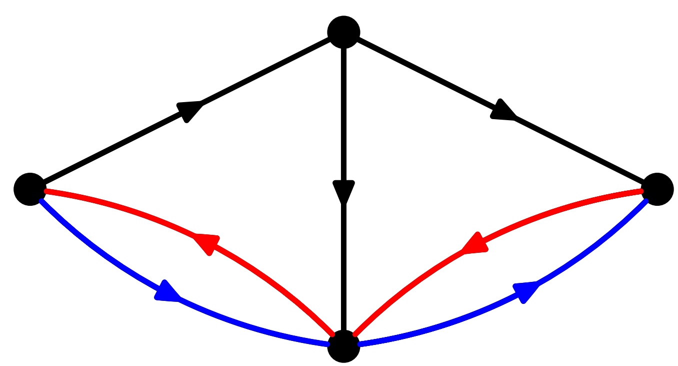


Junções

$D = (V, A)$ grafo orientado fracamente conexo

T é junção
se $T \cap C \neq \emptyset$ para todo corte orientado C de D

$D' := (V, A \cup T^{-1})$ é fortemente conexo

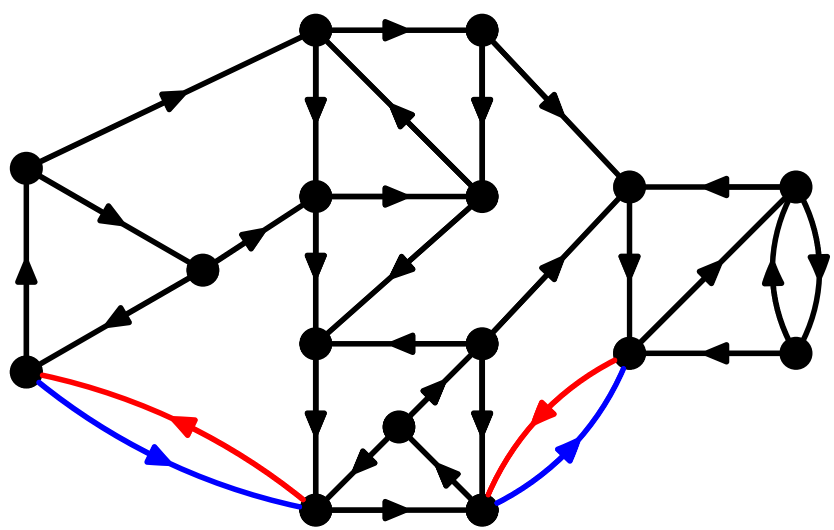


Junções

$D = (V, A)$ grafo orientado fracamente conexo

T é junção
se $T \cap C \neq \emptyset$ para todo corte orientado C de D

$D' := (V, A \cup T^{-1})$ é fortemente conexo

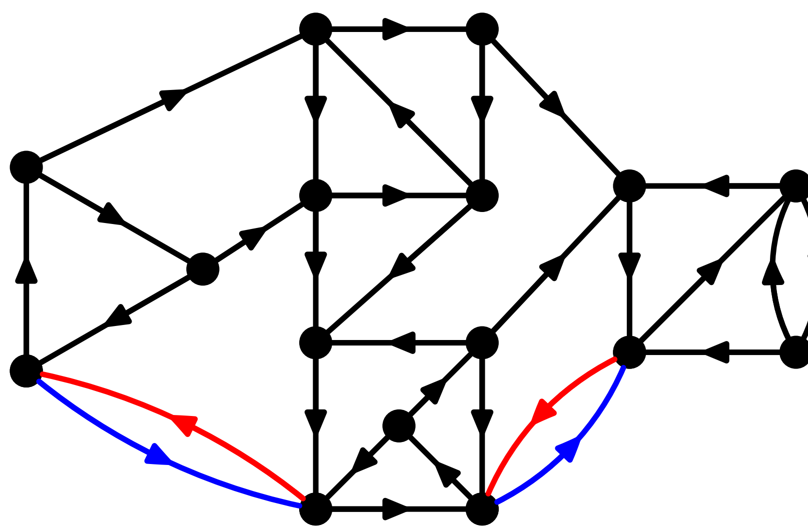


Junções

$D = (V, A)$ grafo orientado fracamente conexo

T é junção
se $T \cap C \neq \emptyset$ para todo corte orientado C de D

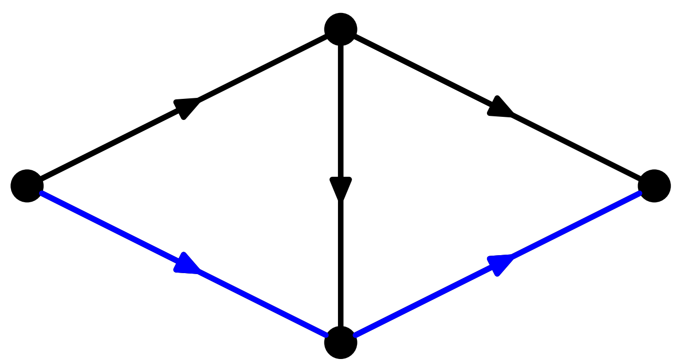
T é junção
$\Longleftrightarrow (V, A \cup T^{-1})$ é fortemente conexo



Teorema de Lucchesi-Younger

$D = (V, A)$ grafo orientado fracamente conexo

n$^{\text{o}}$ máximo de cortes orientados disjuntos
$=$ tamanho mínimo de uma junção

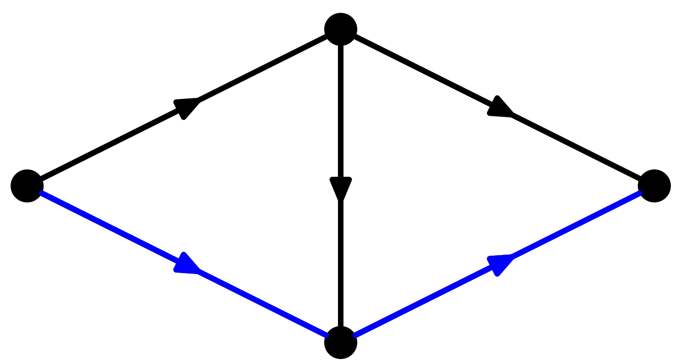


Teorema de Lucchesi-Younger

$D = (V, A)$ grafo orientado fracamente conexo

n$^{\text{o}}$ máximo de cortes orientados disjuntos
$=$ tamanho mínimo de uma junção

$\delta^{\text{out}}(S_1)$
$\delta^{\text{out}}(S_2)$

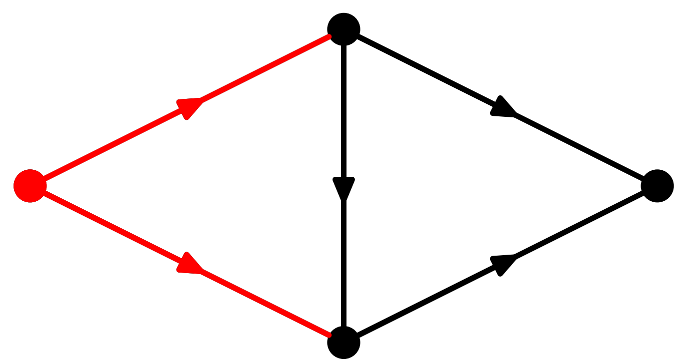


Teorema de Lucchesi-Younger

$D = (V, A)$ grafo orientado fracamente conexo

n$^{\text{o}}$ máximo de cortes orientados disjuntos
$=$ tamanho mínimo de uma junção

$\delta^{\text{out}}(S_1)$ $\surd$
$\delta^{\text{out}}(S_2)$

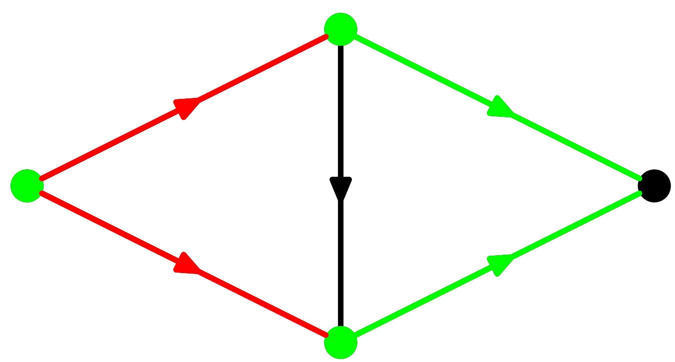


Teorema de Lucchesi-Younger

$D = (V, A)$ grafo orientado fracamente conexo

n$^{\text{o}}$ máximo de cortes orientados disjuntos
$=$ tamanho mínimo de uma junção

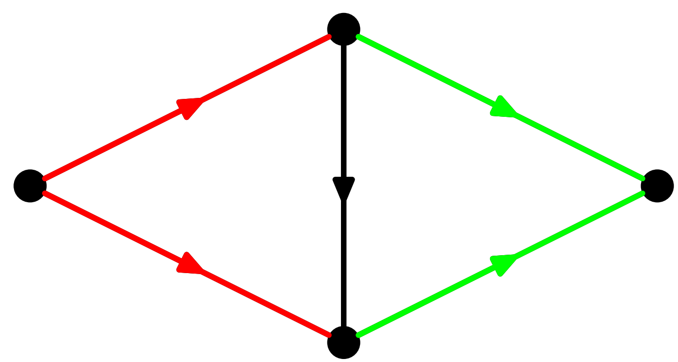
$\delta^{\text{out}}(S_1)$ $\surd$
$\delta^{\text{out}}(S_2)$ $\surd$



Teorema de Lucchesi-Younger

$D = (V, A)$ grafo orientado fracamente conexo

n$^{\mathrm{o}}$ máximo de cortes orientados disjuntos
$=$ tamanho mínimo de uma junção



Teorema de Lucchesi-Younger capacitado

$D = (V, A)$ grafo orientado fracamente conexo
$c\colon A \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ capacidades

n$^{\text{o}}$ máximo de cortes orientados
com cada arco a em no máximo $c(a)$ cortes
$=$
capacidade mínima de uma junção

Teorema de Lucchesi-Younger capacitado

$D = (V, A)$ grafo orientado fracamente conexo
$c\colon A \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ capacidades

n$^{\text{o}}$ máximo de cortes orientados
com cada arco a em no máximo $c(a)$ cortes
$=$
capacidade mínima de uma junção

versão capacitada é equivalente à sem capacidades

Teorema de Lucchesi-Younger capacitado

$D = (V, A)$ grafo orientado fracamente conexo
$c\colon A \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ capacidades

n$^{\text{o}}$ máximo de cortes orientados
com cada arco a em no máximo $c(a)$ cortes
$=$
capacidade mínima de uma junção

versão capacitada é equivalente à sem capacidades

de agora em diante,
D é sempre fracamente conexo

Dúvidas?

Tópicos

- As conjecturas
  - Preliminares
  - ▷ Os enunciados
  - As relações
- Os contra-exemplos
- As provas

A conjectura de Woodall

$D = (V, A)$ grafo orientado

Teorema de Lucchesi-Younger
n$^{\text{o}}$ máximo de cortes orientados disjuntos
$=$ tamanho mínimo de uma junção

A conjectura de Woodall

$D = (V, A)$ grafo orientado

Teorema de Lucchesi-Younger
n^{o} máximo de cortes orientados disjuntos
$=$ tamanho mínimo de uma junção

Conjectura de Woodall
n^{o} máximo de junções disjuntas
$=$ tamanho mínimo de um corte orientado

A conjectura de Edmonds-Giles

$D = (V, A)$ grafo orientado fracamente conexo
$c\colon A \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ capacidades

Teorema de Lucchesi-Younger com capacidades
n$^{\mathrm{o}}$ máximo de cortes orientados
com cada arco a em no máximo $c(a)$ cortes
$=$ capacidade mínima de uma junção

A conjectura de Edmonds-Giles

$D = (V, A)$ grafo orientado fracamente conexo
$c\colon A \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ capacidades

Teorema de Lucchesi-Younger com capacidades
n$^{\mathrm{o}}$ máximo de cortes orientados
com cada arco a em no máximo $c(a)$ cortes
$=$ capacidade mínima de uma junção

Conjectura de Woodall
n$^{\mathrm{o}}$ máximo de junções disjuntas
$=$ tamanho mínimo de um corte orientado

A conjectura de Edmonds-Giles

$D = (V, A)$ grafo orientado fracamente conexo
$c \colon A \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ capacidades

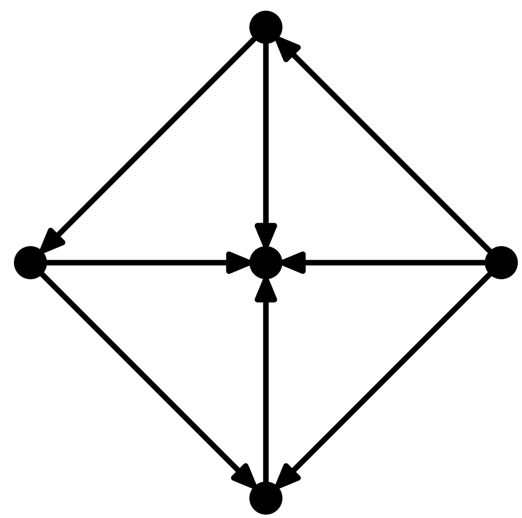
Teorema de Lucchesi-Younger com capacidades
n$^{\text{o}}$ máximo de cortes orientados
com cada arco a em no máximo $c(a)$ cortes
$=$ capacidade mínima de uma junção

Conjectura de Woodall
n$^{\text{o}}$ máximo de junções disjuntas
$=$ tamanho mínimo de um corte orientado

Conjectura de Edmonds-Giles
n$^{\text{o}}$ máximo de junções
com cada arco a em no máximo $c(a)$ junções
$=$ capacidade mínima de um corte orientado

Dualidade no plano

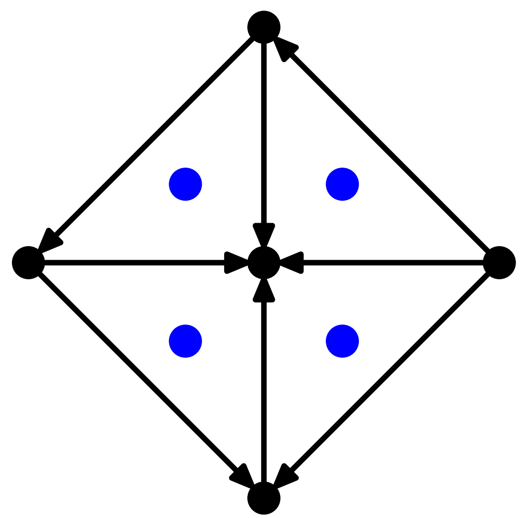
$D = (V, A)$ grafo orientado planar



Dualidade no plano

$D = (V, A)$ grafo orientado planar

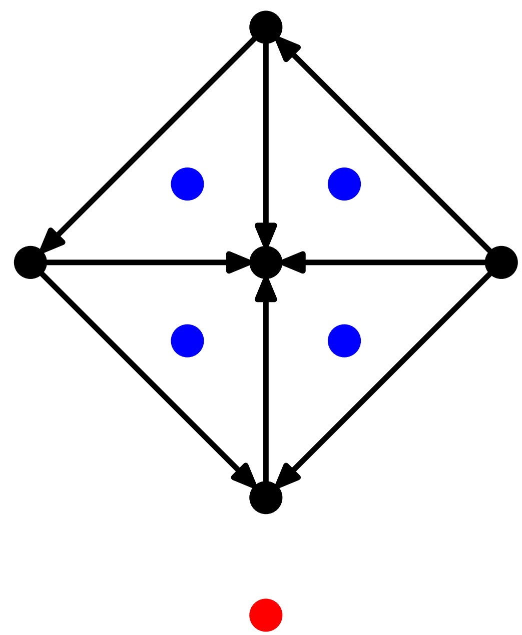
um vértice para cada face



Dualidade no plano

$D = (V, A)$ grafo orientado planar

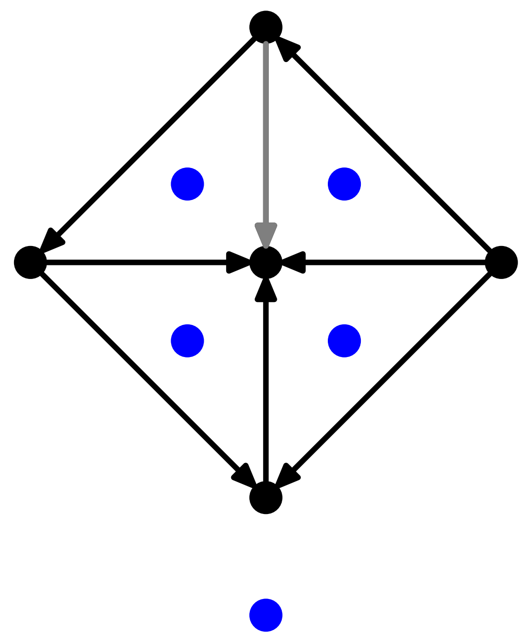
ops... a face externa também



Dualidade no plano

$D = (V, A)$ grafo orientado planar

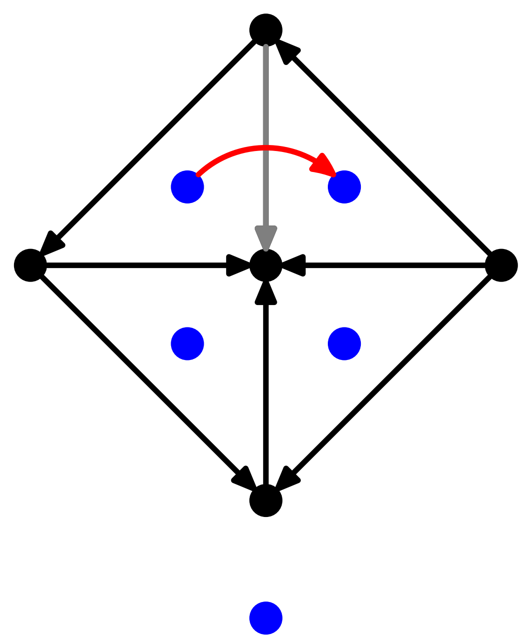
um arco novo para cada arco velho



Dualidade no plano

$D = (V, A)$ grafo orientado planar

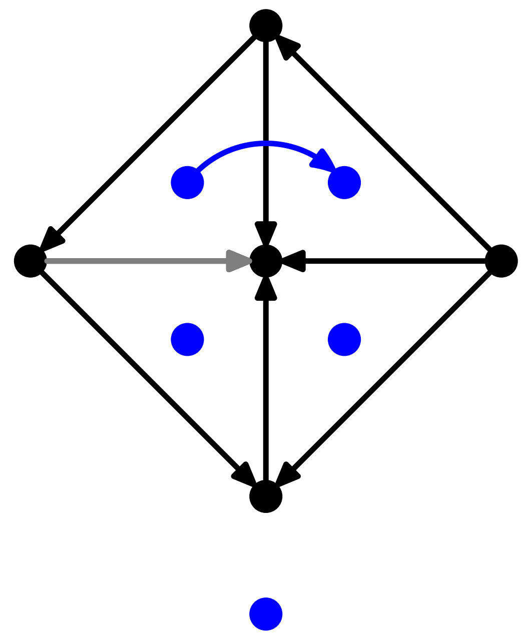
um arco novo para cada arco velho



Dualidade no plano

$D = (V, A)$ grafo orientado planar

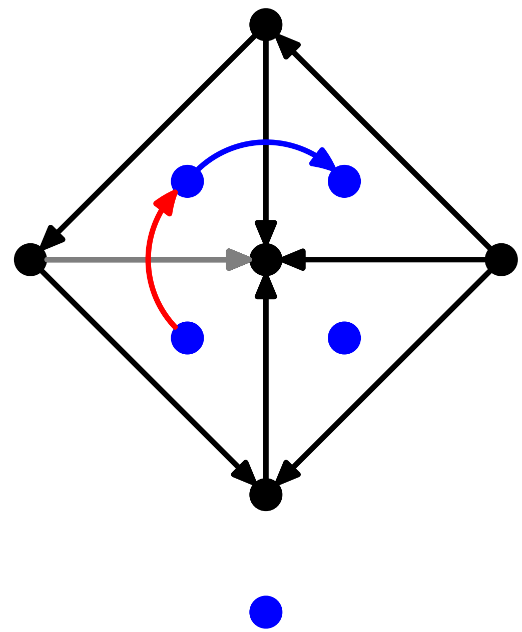
um arco novo para cada arco velho



Dualidade no plano

$D = (V, A)$ grafo orientado planar

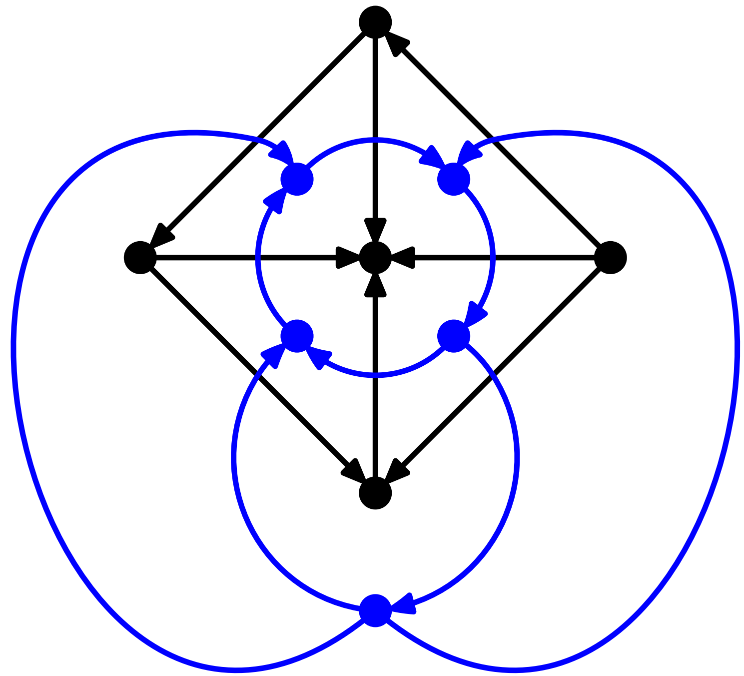
um arco novo para cada arco velho



Dualidade no plano

$D = (V, A)$ grafo orientado planar

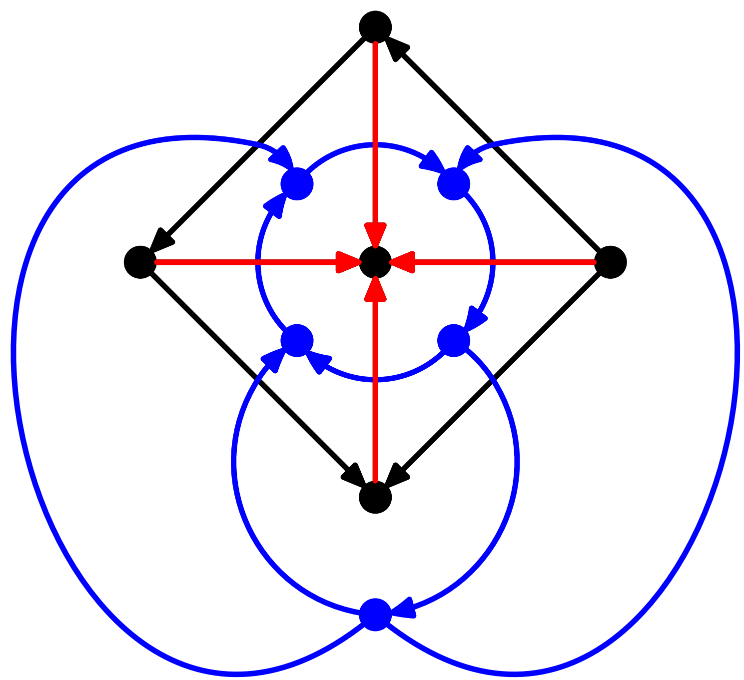
grafo dual



Dualidade no plano

$D = (V, A)$ grafo orientado planar

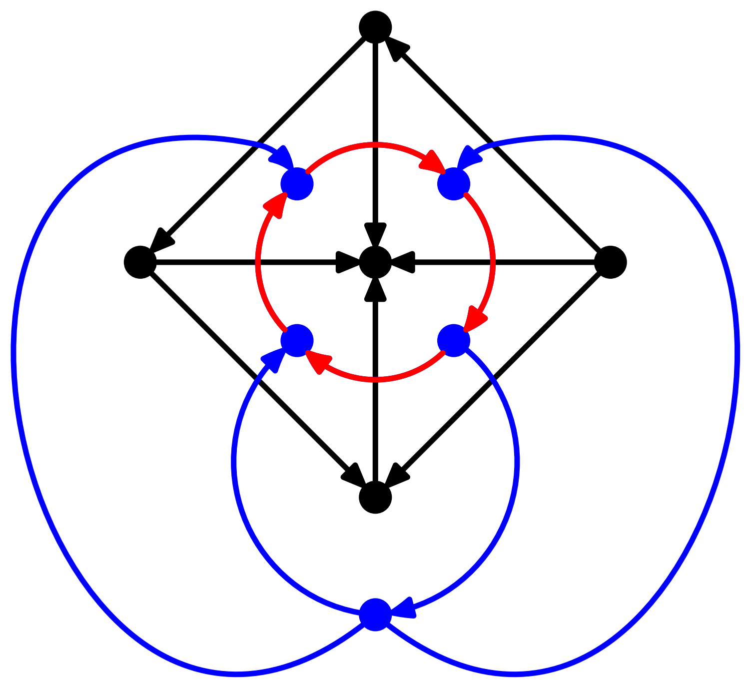
cortes orientados



Dualidade no plano

$D = (V, A)$ grafo orientado planar

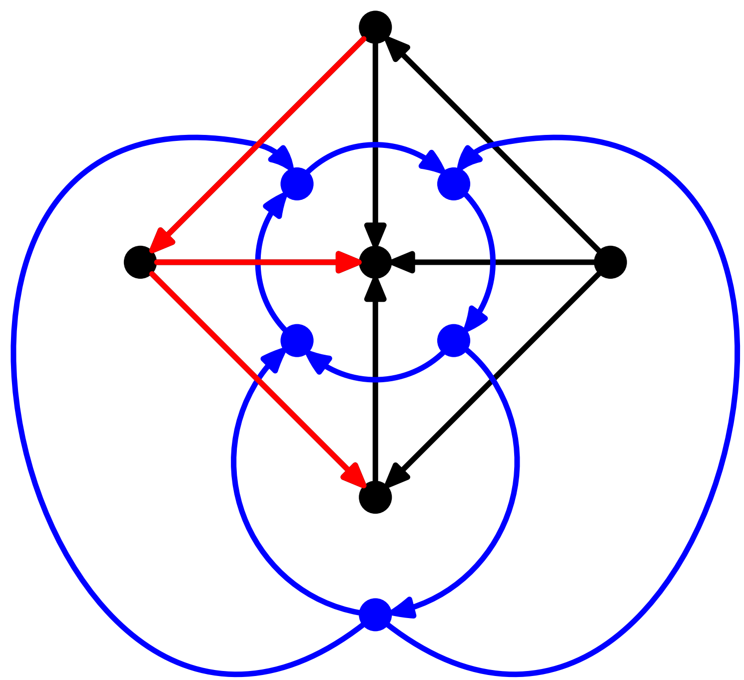
cortes orientados viram circuitos



Dualidade no plano

$D = (V, A)$ grafo orientado planar

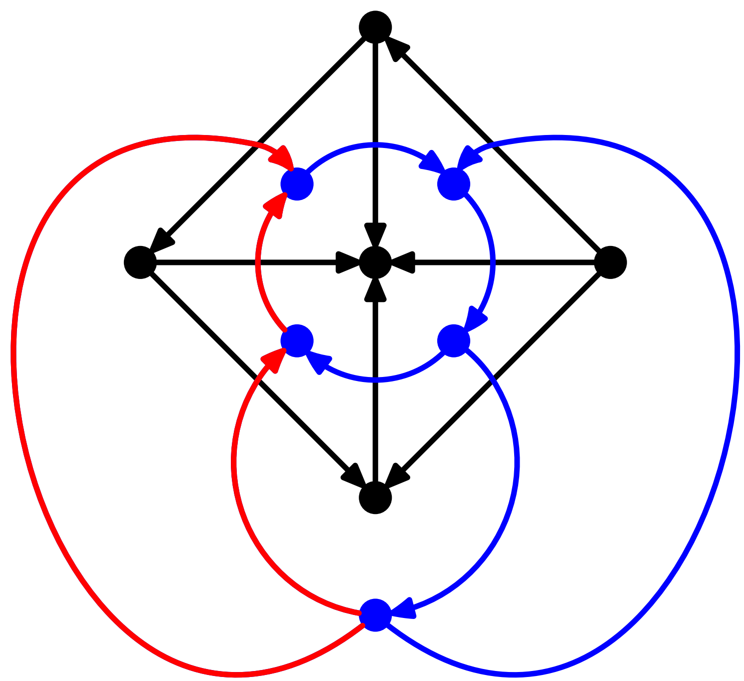
cortes não-orientados



Dualidade no plano

$D = (V, A)$ grafo orientado planar

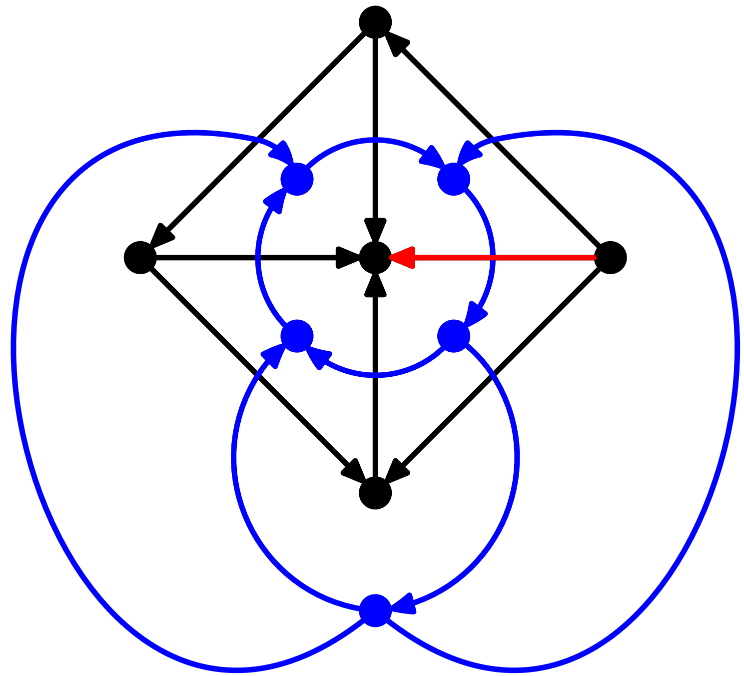
cortes não-orientados não viram circuitos



Dualidade no plano

$D = (V, A)$ grafo orientado planar

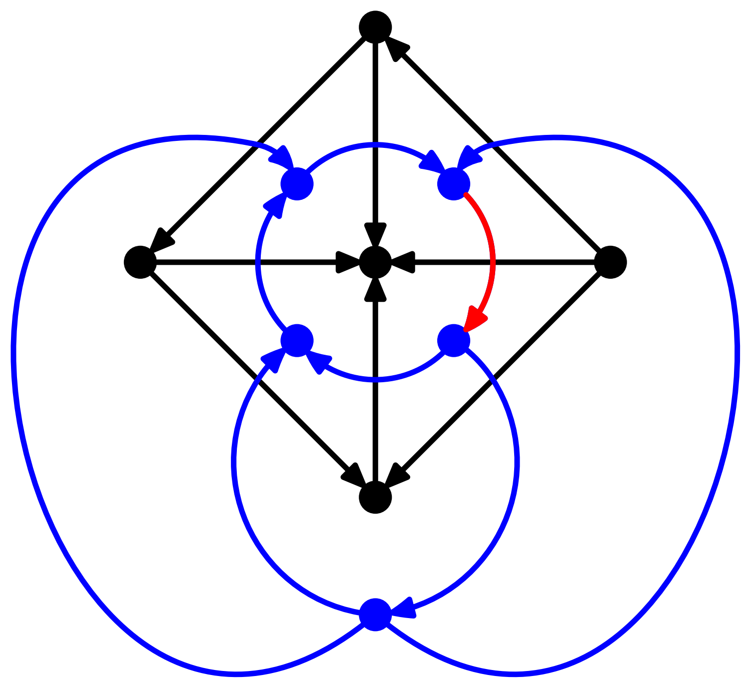
junções



Dualidade no plano

$D = (V, A)$ grafo orientado planar

viram quebra-ciclos



O que dualiza?

Correspondência:

corte orientado $\overset{\text{dual}}{\Longleftrightarrow}$ circuito

O que dualiza?

Correspondência:

corte orientado $\stackrel{\text{dual}}{\Longleftrightarrow}$ circuito

junção $\stackrel{\text{dual}}{\Longleftrightarrow}$ quebra-ciclos

O que dualiza?

Correspondência:

corte orientado $\overset{\text{dual}}{\Longleftrightarrow}$ circuito

junção $\overset{\text{dual}}{\Longleftrightarrow}$ quebra-ciclos

quebra-ciclos (= *feedback arc set*):
conjunto de arcos que intersecta cada circuito

A conjectura planar de Woodall

$D = (V, A)$ grafo orientado planar

Conjectura de Woodall
n$^{\text{o}}$ máximo de junções disjuntas
$=$ tamanho mínimo de um corte orientado

A conjectura planar de Woodall

$D = (V, A)$ grafo orientado planar

Conjectura de Woodall
n$^{\rm o}$ máximo de junções disjuntas
$=$ tamanho mínimo de um corte orientado

Conjectura planar de Woodall
n$^{\rm o}$ máximo de quebra-ciclos disjuntos
$=$ tamanho mínimo de um circuito

Tudo ok?

Tópicos

- As conjecturas
  - Preliminares
  - Os enunciados
  - ▷ As relações
- Os contra-exemplos
- As provas

Observações

Edmonds-Giles $\Longrightarrow$ Woodall $\Longrightarrow$ Woodall planar

Observações

Edmonds-Giles $\Longrightarrow$ Woodall $\Longrightarrow$ Woodall planar

$\neg$ Woodall planar $\Longrightarrow$ $\neg$ Woodall $\Longrightarrow$ $\neg$ Edmonds-Giles

Observações

Edmonds-Giles $\Longrightarrow$ Woodall $\Longrightarrow$ Woodall planar

$\neg$ Woodall planar $\Longrightarrow$ $\neg$ Woodall $\Longrightarrow$ $\neg$ Edmonds-Giles

Situação:

- Edmonds-Giles
- Woodall
- Woodall planar

Observações

Edmonds-Giles $\Longrightarrow$ Woodall $\Longrightarrow$ Woodall planar

$\neg$ Woodall planar $\Longrightarrow$ $\neg$ Woodall $\Longrightarrow$ $\neg$ Edmonds-Giles

Situação:

- Edmonds-Giles FALSA!
- Woodall
- Woodall planar

Observações

Edmonds-Giles $\Longrightarrow$ Woodall $\Longrightarrow$ Woodall planar

$\neg$ Woodall planar $\Longrightarrow$ $\neg$ Woodall $\Longrightarrow$ $\neg$ Edmonds-Giles

Situação:

- Edmonds-Giles FALSA!
- Woodall ?
- Woodall planar ?

Observações

Edmonds-Giles $\Longrightarrow$ Woodall $\Longrightarrow$ Woodall planar

$\neg$ Woodall planar $\Longrightarrow$ $\neg$ Woodall $\Longrightarrow$ $\neg$ Edmonds-Giles

Situação:

- Edmonds-Giles FALSA!
- Woodall ?
- Woodall planar ?

"Em geral": caso capacitado $\Longleftrightarrow$ caso não-capacitado

Observações

Edmonds-Giles $\Longrightarrow$ Woodall $\Longrightarrow$ Woodall planar

$\neg$ Woodall planar $\Longrightarrow$ $\neg$ Woodall $\Longrightarrow$ $\neg$ Edmonds-Giles

Situação:

- Edmonds-Giles FALSA!
- Woodall ?
- Woodall planar ?

"Em geral": caso capacitado $\Longleftrightarrow$ caso não-capacitado

Edmonds-Giles $\overset{?}{\Longleftrightarrow}$ Woodall

Redução

$D = (V, A)$ grafo orientado
$c\colon A \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ capacidades

Redução

$D = (V, A)$ grafo orientado
$c\colon A \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ capacidades

Queremos:

grafo orientado D'
D' “codifica” capacidades em sua estrutura

Redução

$D = (V, A)$ grafo orientado
$c\colon A \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ capacidades

Queremos:

grafo orientado D'
D' “codifica” capacidades em sua estrutura

arco a com capacidade $c(a)$

Redução

$D = (V, A)$ grafo orientado
$c\colon A \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ capacidades

Queremos:
grafo orientado D'
D' “codifica” capacidades em sua estrutura

arco a com capacidade $c(a)$
contribui com $c(a)$ para a capacidade de cortes orientados

Redução

$D = (V, A)$ grafo orientado
$c\colon A \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ capacidades

Queremos:
grafo orientado D'
D' "codifica" capacidades em sua estrutura

arco a com capacidade $c(a)$
contribui com $c(a)$ para a capacidade de cortes orientados
aparece em $\leq c(a)$ junções

Redução

$D = (V, A)$ grafo orientado
$c\colon A \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ capacidades

Queremos:
grafo orientado D'
D' “codifica” capacidades em sua estrutura

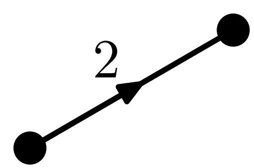
arco a com capacidade $c(a)$
contribui com $c(a)$ para a capacidade de cortes orientados
aparece em $\leq c(a)$ junções

corte orientado de capacidade k em D
$\Longleftrightarrow$
corte orientado de tamanho k em D'

Redução

$D = (V, A)$ grafo orientado
$c\colon A \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ capacidades

arco a com $c(a) = 2$

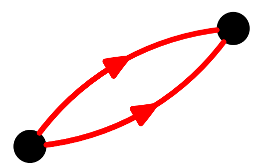


Redução

$D = (V, A)$ grafo orientado
$c\colon A \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ capacidades

arco a com $c(a) = 2$

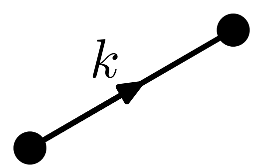
vira 2 arcos paralelos em D'



Redução

$D = (V, A)$ grafo orientado
$c\colon A \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ capacidades

arco a com $c(a) = k \geq 1$

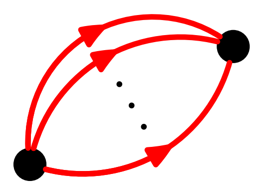


Redução

$D = (V, A)$ grafo orientado
$c\colon A \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ capacidades

arco a com $c(a) = k \geq 1$

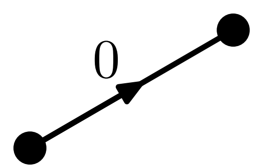
vira k arcos paralelos em D'



Redução

$D = (V, A)$ grafo orientado
$c\colon A \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ capacidades

arco a com $c(a) = 0$

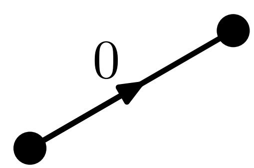


Redução

$D = (V, A)$ grafo orientado
$c\colon A \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ capacidades

arco a com $c(a) = 0$

2 opções: contrair ou remover

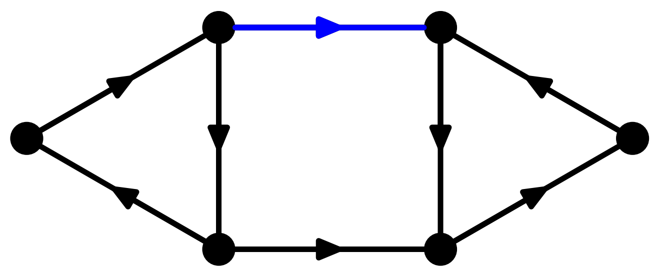


Arcos incapacitados

$D = (V, A)$ grafo orientado
$c\colon A \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ capacidades
arco a com $c(a) = 0$

Arcos incapacitados

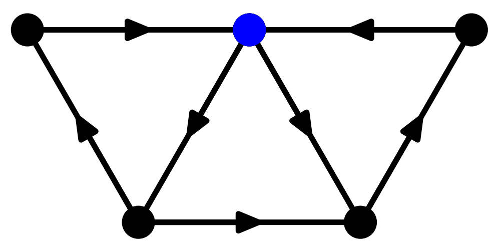
$D = (V, A)$ grafo orientado
$c\colon A \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ capacidades
arco a com $c(a) = 0$



Arcos incapacitados

$D = (V, A)$ grafo orientado
$c\colon A \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ capacidades
arco a com $c(a) = 0$

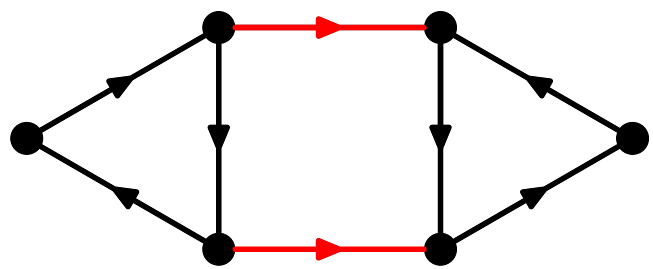
contraindo...



Arcos incapacitados

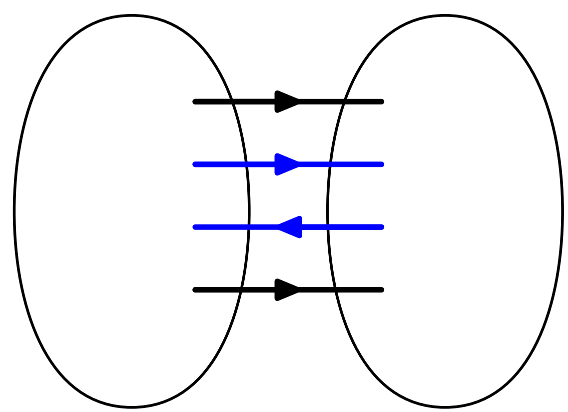
$D = (V, A)$ grafo orientado
$c\colon A \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ capacidades
arco a com $c(a) = 0$

contraindo... ops



Arcos incapacitados

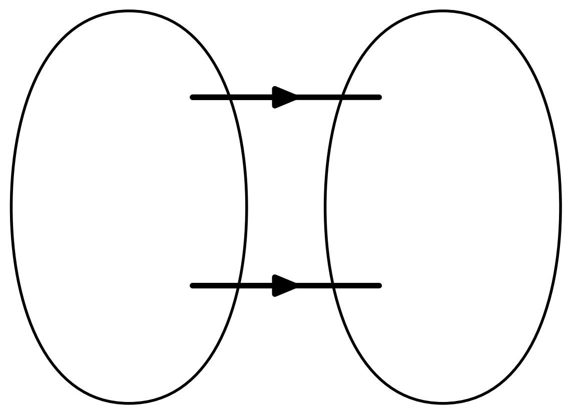
$D = (V, A)$ grafo orientado
$c\colon A \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ capacidades
arco a com $c(a) = 0$



Arcos incapacitados

$D = (V, A)$ grafo orientado
$c\colon A \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ capacidades
arco a com $c(a) = 0$

removendo... ops



Algoritmicamente

$D = (V, A)$ grafo orientado, $c\colon A \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ capacidades

$\exists$ algoritmo polinomial para encontrar

- corte orientado de capacidade mínima?

Algoritmicamente

$D = (V, A)$ grafo orientado, $c\colon A \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ capacidades

$\exists$ algoritmo polinomial para encontrar

- corte orientado de capacidade mínima?

Sim!

Algoritmicamente

$D = (V, A)$ grafo orientado, $c\colon A \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ capacidades

$\exists$ algoritmo polinomial para encontrar

- corte orientado de capacidade mínima?

Sim!

- família máxima de junções disjuntas?

Algoritmicamente

$D = (V, A)$ grafo orientado, $c\colon A \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ capacidades

$\exists$ algoritmo polinomial para encontrar

- corte orientado de capacidade mínima?

Sim!

- família máxima de junções disjuntas?

Não sei!

Algoritmicamente

$D = (V, A)$ grafo orientado, $c\colon A \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ capacidades

$\exists$ algoritmo polinomial para encontrar

- corte orientado de capacidade mínima?

Sim!

- família máxima de junções disjuntas?

Não sei!

$\overset{?}{\in} \mathbf{P}$

Algoritmicamente

$D = (V, A)$ grafo orientado, $c\colon A \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ capacidades

$\exists$ algoritmo polinomial para encontrar

- corte orientado de capacidade mínima?

Sim!

- família máxima de junções disjuntas?

Não sei!

$\stackrel{?}{\in} \mathbf{P}$, $\stackrel{?}{\in} \mathbf{NPC}$

Algoritmicamente

$D = (V, A)$ grafo orientado, $c \colon A \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ capacidades

$\exists$ algoritmo polinomial para encontrar

- corte orientado de capacidade mínima?

Sim!

- família máxima de junções disjuntas?

Não sei!

$\overset{?}{\in} \mathbf{P}$, $\overset{?}{\in} \mathbf{NPC}$, $\overset{?}{\in} \mathbf{NP} \setminus (\mathbf{P} \cup \mathbf{NPC})$

Algoritmicamente

$D = (V, A)$ grafo orientado, $c\colon A \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ capacidades

$\exists$ algoritmo polinomial para encontrar

- corte orientado de capacidade mínima?

Sim!

- família máxima de junções disjuntas?

Não sei!

$\overset{?}{\in} \mathbf{P}$, $\overset{?}{\in} \mathbf{NPC}$, $\overset{?}{\in} \mathbf{NP} \setminus (\mathbf{P} \cup \mathbf{NPC})$

Teorema de Ladner (1975)
Se $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$, então $\mathbf{NP} \setminus (\mathbf{P} \cup \mathbf{NPC}) \neq \emptyset$.

Algoritmo

$D = (V, A)$ grafo orientado, $c\colon A \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ capacidades

Algoritmo

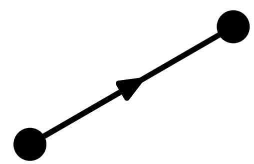
$D = (V, A)$ grafo orientado, $c\colon A \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ capacidades

Construindo D' e c':

Algoritmo

$D = (V, A)$ grafo orientado, $c\colon A \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ capacidades

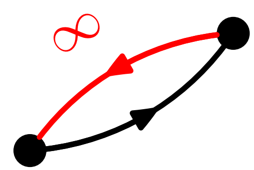
Construindo D' e c':
arco a de D



Algoritmo

$D = (V, A)$ grafo orientado, $c\colon A \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ capacidades

Construindo D' e c':
arco a de $D \Longrightarrow$ arco a^{-1} de D', com $c'(a^{-1}) = \infty$



Algoritmo

$D = (V, A)$ grafo orientado, $c\colon A \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ capacidades

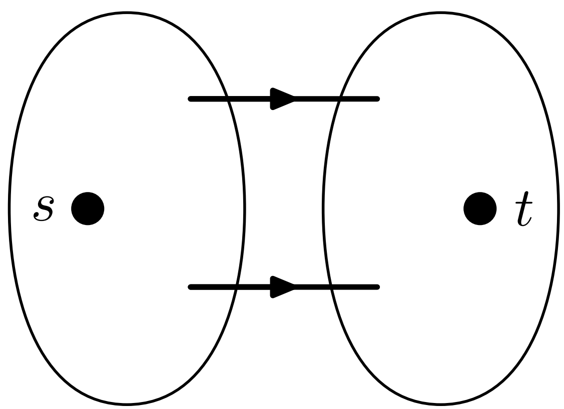
s, t vértices

Algoritmo

$D = (V, A)$ grafo orientado, $c\colon A \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ capacidades

s, t vértices

(s, t)-cortes orientados em D
têm capacidade finita em D'

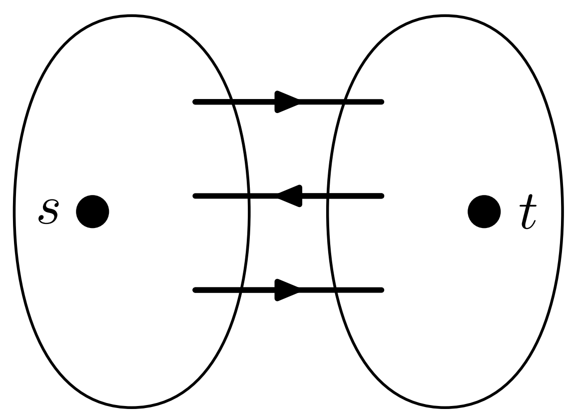


Algoritmo

$D = (V, A)$ grafo orientado, $c\colon A \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ capacidades

s, t vértices

(s, t)-cortes não-orientados em D
têm capacidade infinita em D'

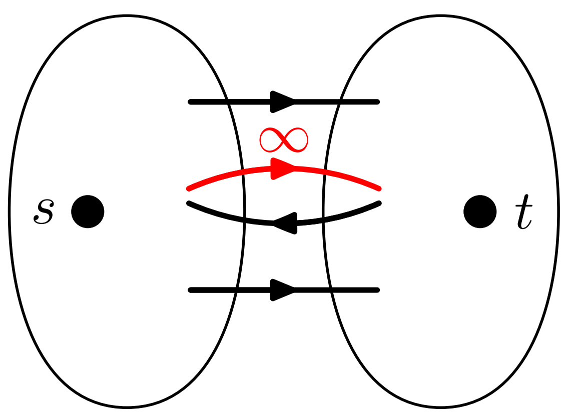


Algoritmo

$D = (V, A)$ grafo orientado, $c\colon A \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ capacidades

s, t vértices

(s, t)-cortes não-orientados em D
têm capacidade infinita em D'



Algoritmo

$D = (V, A)$ grafo orientado, $c\colon A \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ capacidades

s, t vértices

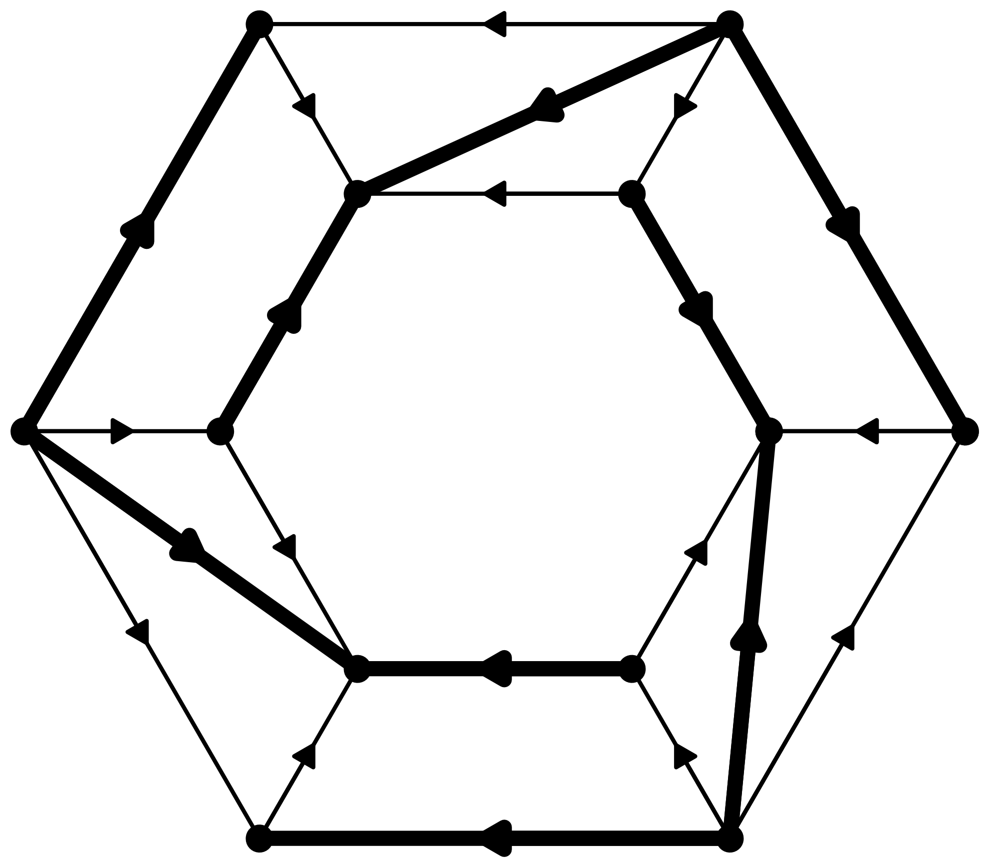
(s, t)-corte tem capacidade finita em D'
$\iff$ é orientado em D

E aí?

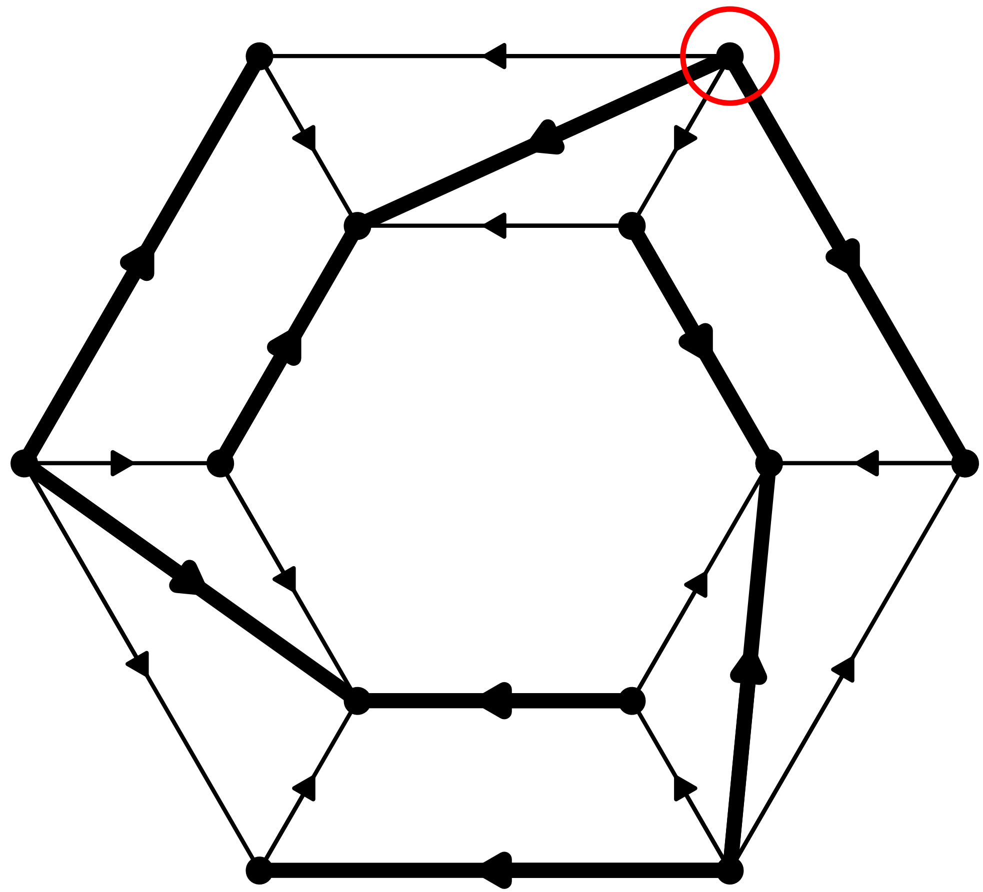
Tópicos

- As conjecturas
  - Preliminares
  - Os enunciados
  - As relações
- ▷ Os contra-exemplos
- As provas

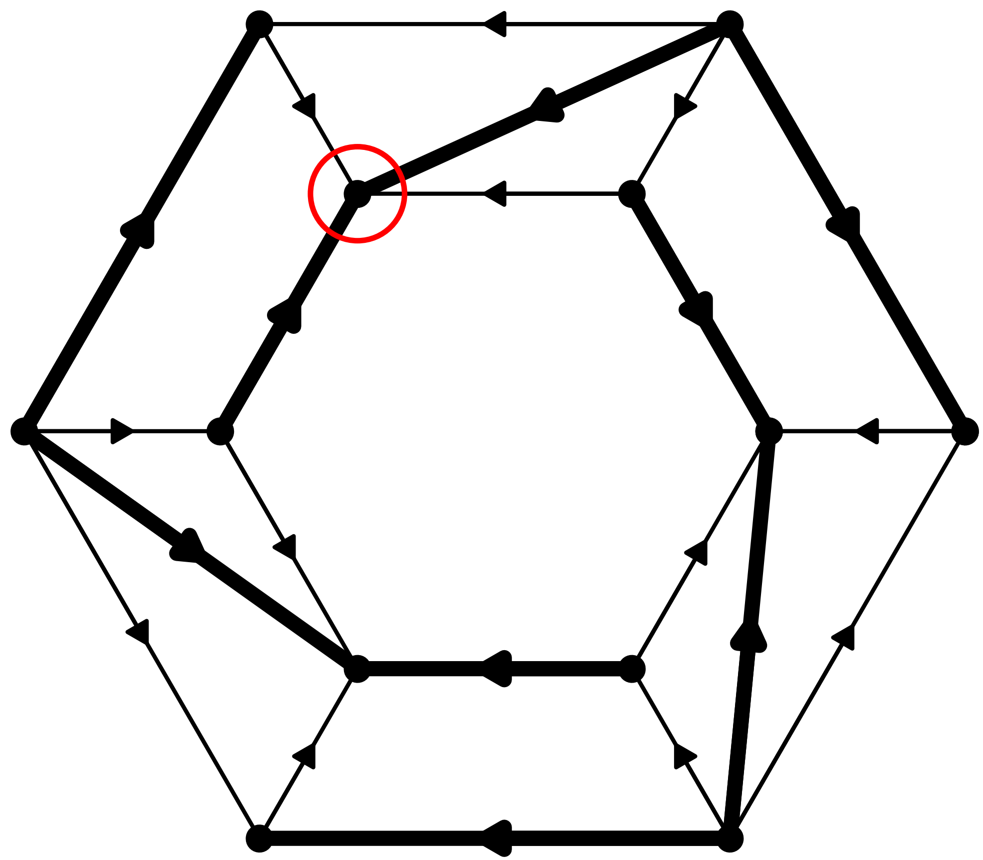
Schrijver



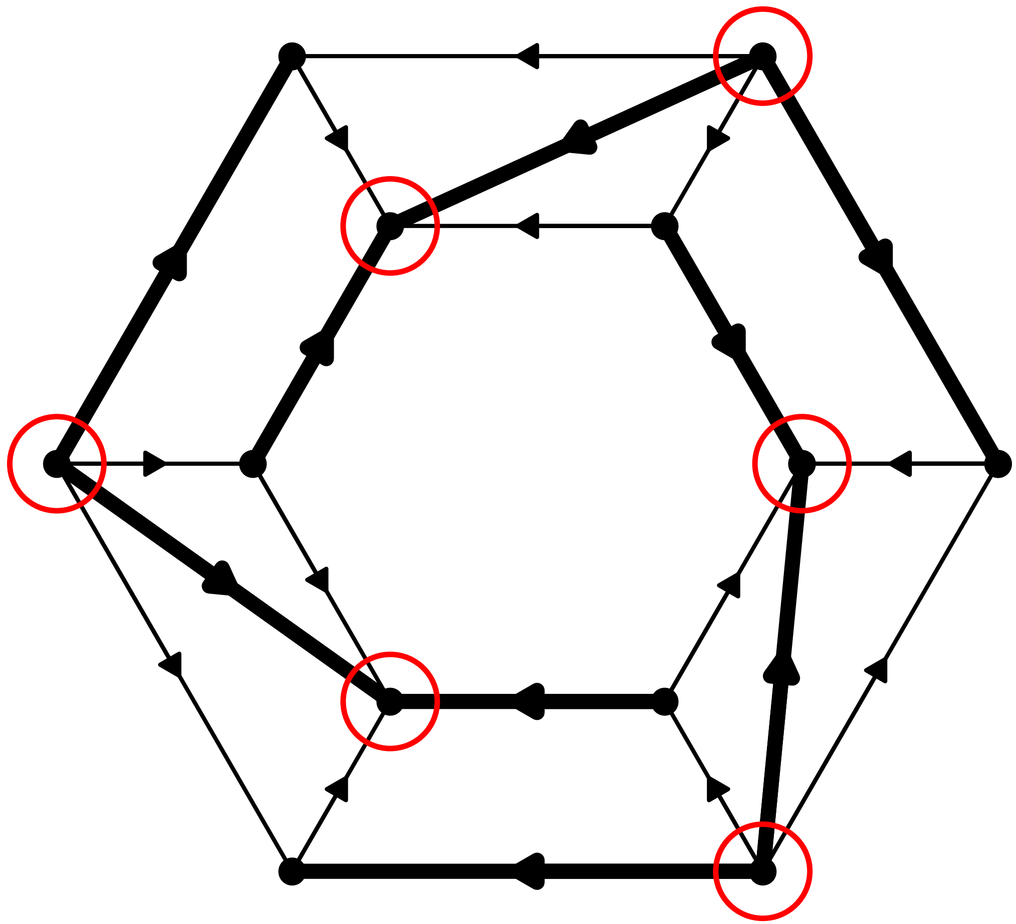
Schrijver



Schrijver

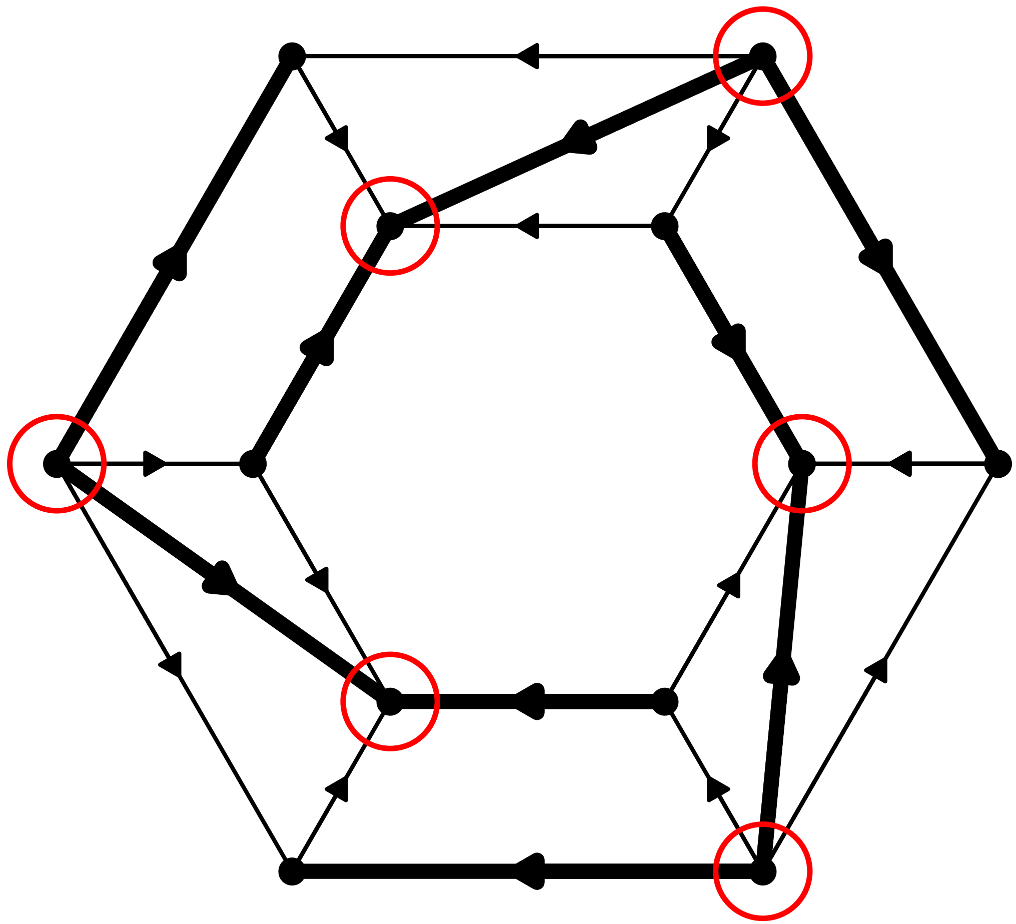


Schrijver



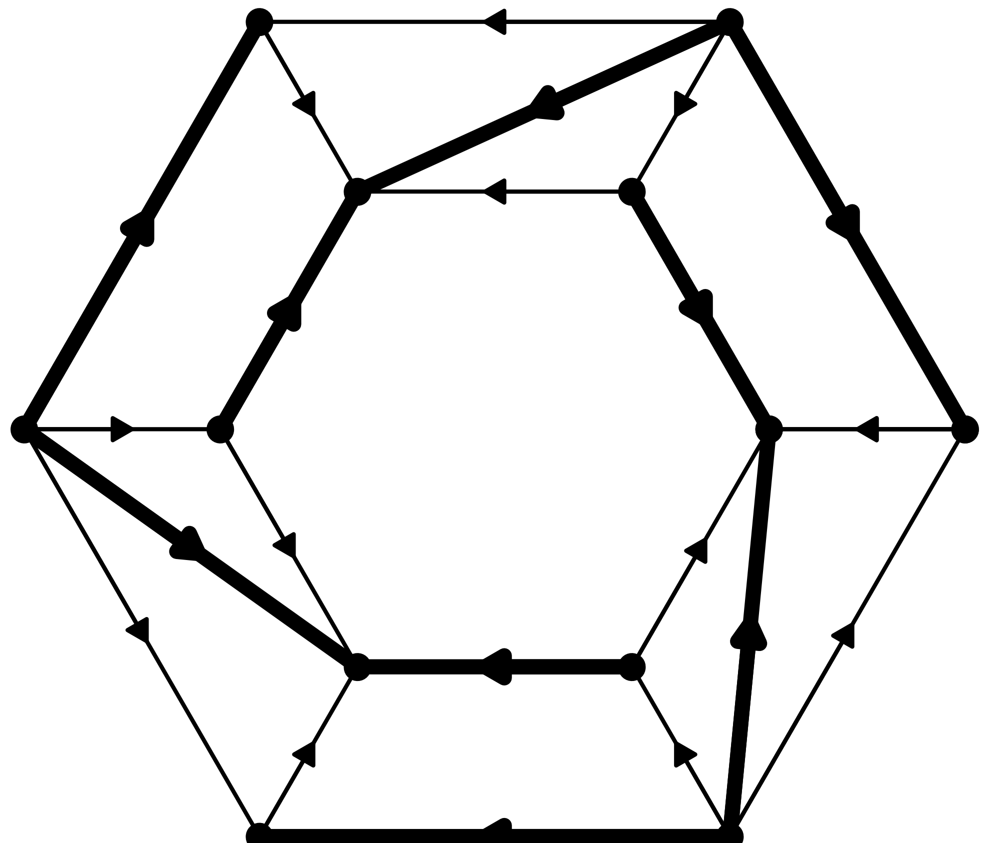
Schrijver

cap. mínima $= 2$



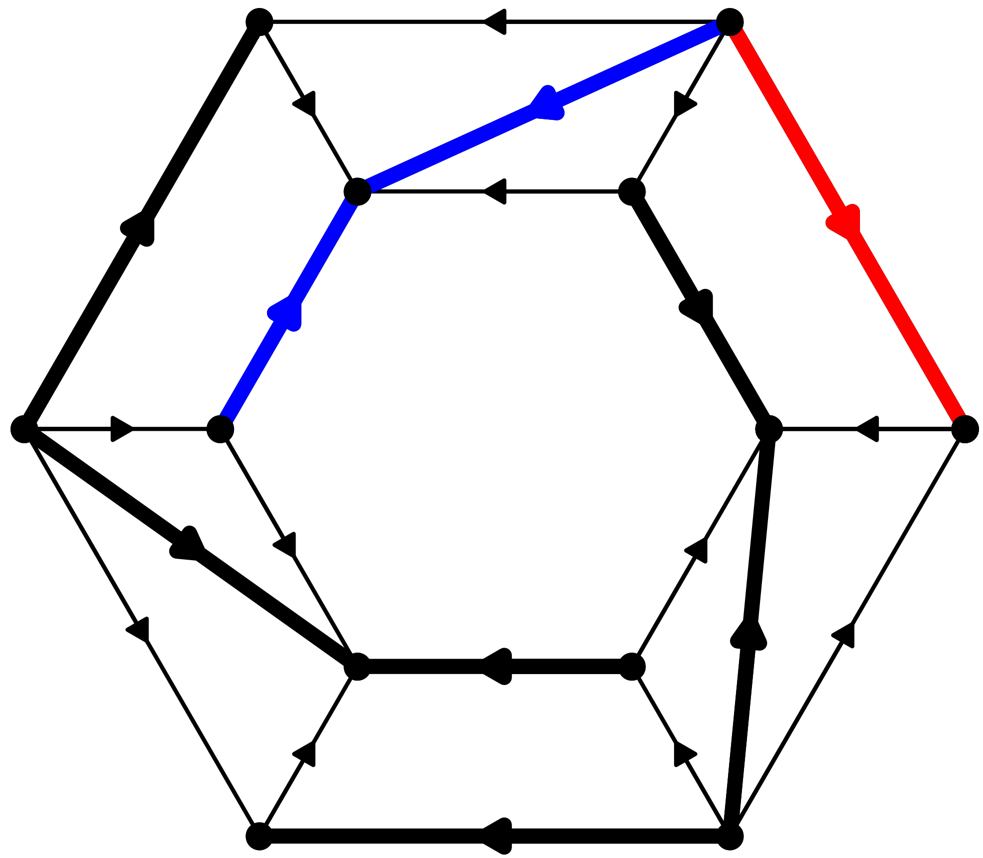
Schrijver

cap. mínima $= 2 \therefore$ quero 2 junções disjuntas $($●,●$)$



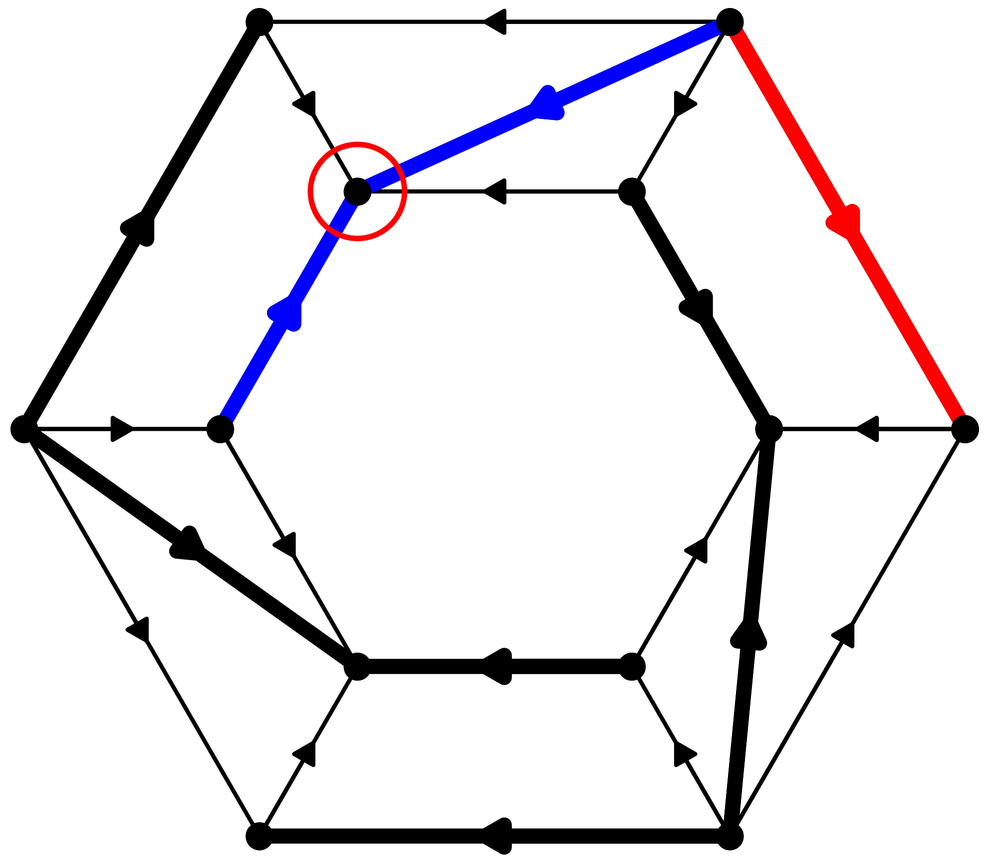
Schrijver

cap. mínima $= 2 \therefore$ quero 2 junções disjuntas ($\bullet$,$\bullet$)



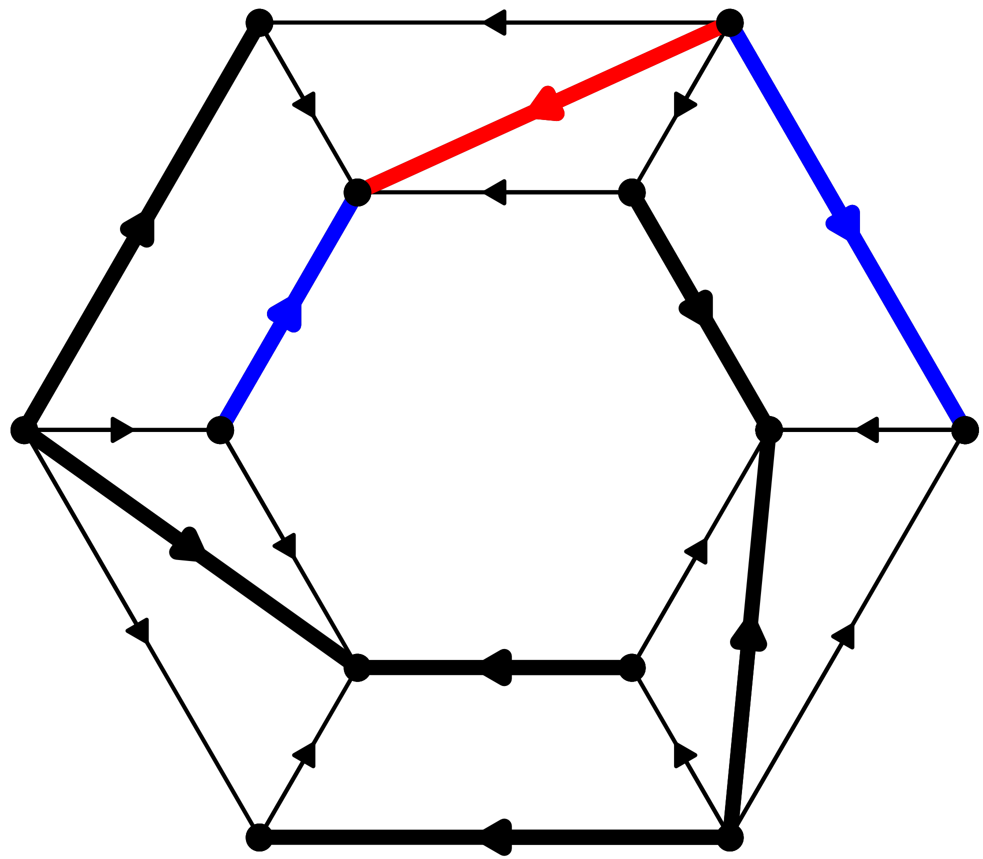
Schrijver

cap. mínima $= 2 \therefore$ quero 2 junções disjuntas (•,•)



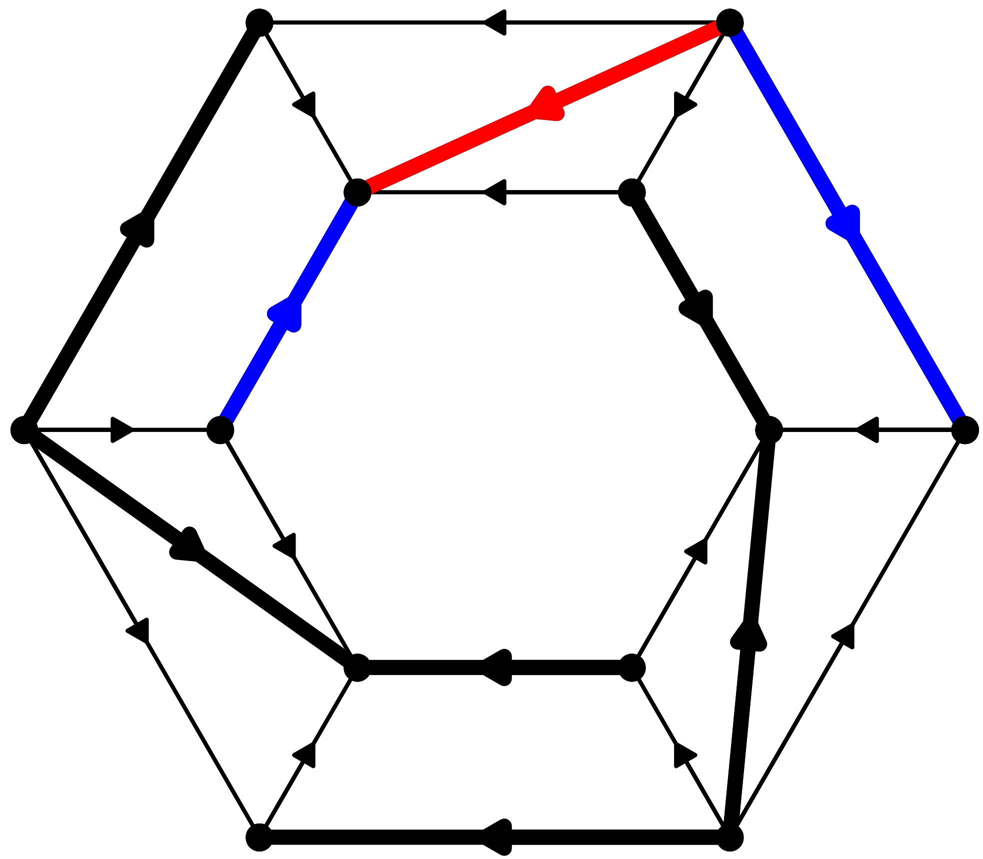
Schrijver

backtrack!



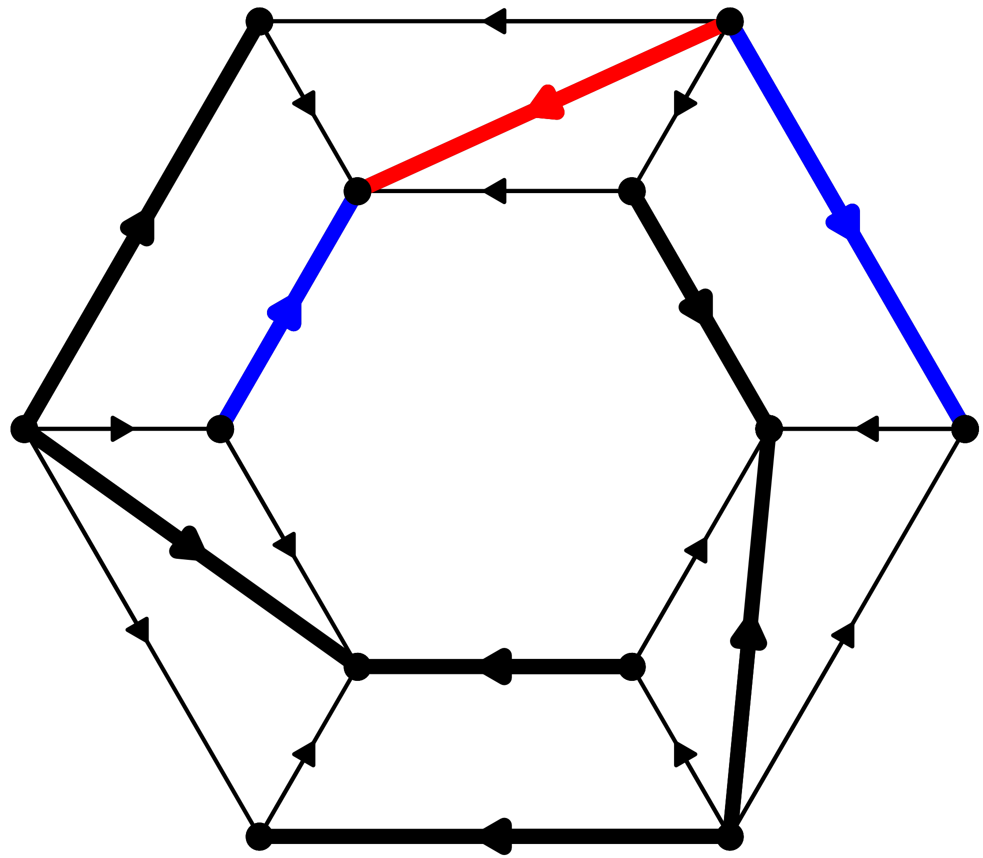
Schrijver

backtrack! 4 possibilidades para arcos do meio



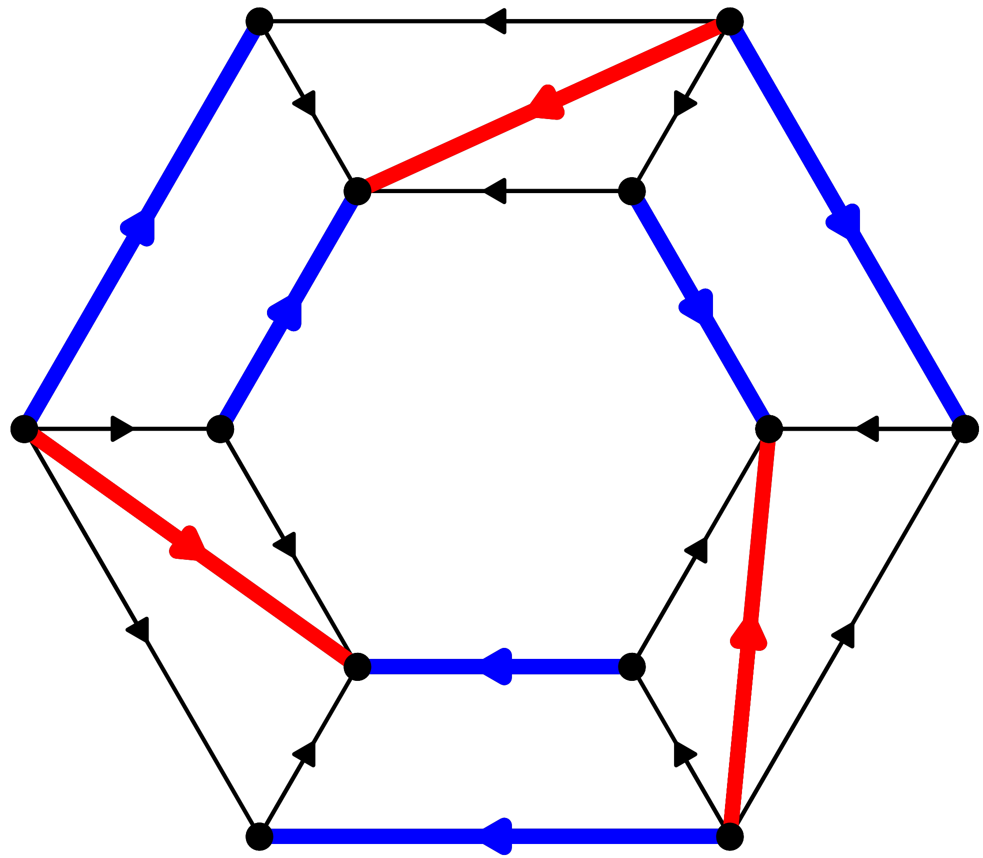
Schrijver

$(\textcolor{red}{\bullet}, \textcolor{red}{\bullet}, \textcolor{red}{\bullet})$ $(\textcolor{red}{\bullet}, \textcolor{red}{\bullet}, \textcolor{blue}{\bullet})$ $(\textcolor{red}{\bullet}, \textcolor{blue}{\bullet}, \textcolor{red}{\bullet})$ $(\textcolor{red}{\bullet}, \textcolor{blue}{\bullet}, \textcolor{blue}{\bullet})$



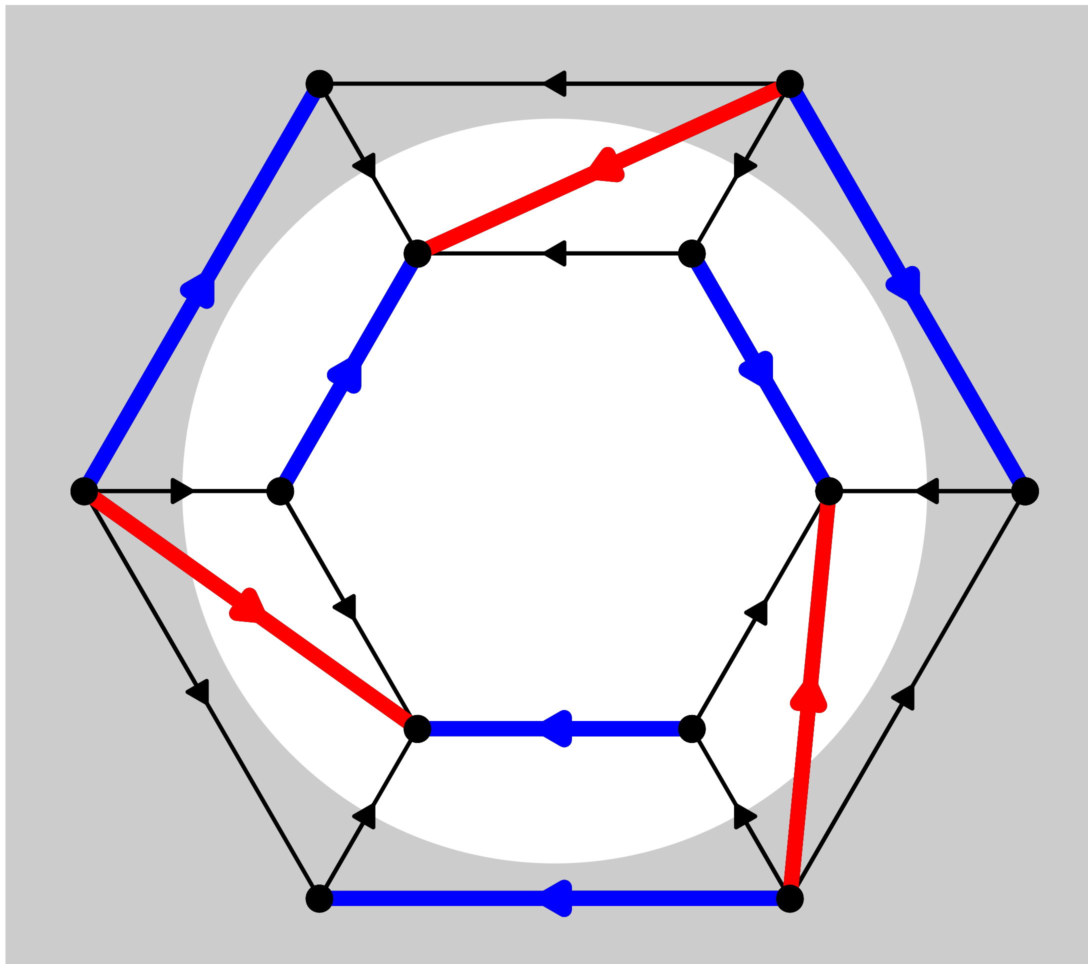
Schrijver

$(\bullet, \bullet, \bullet)$



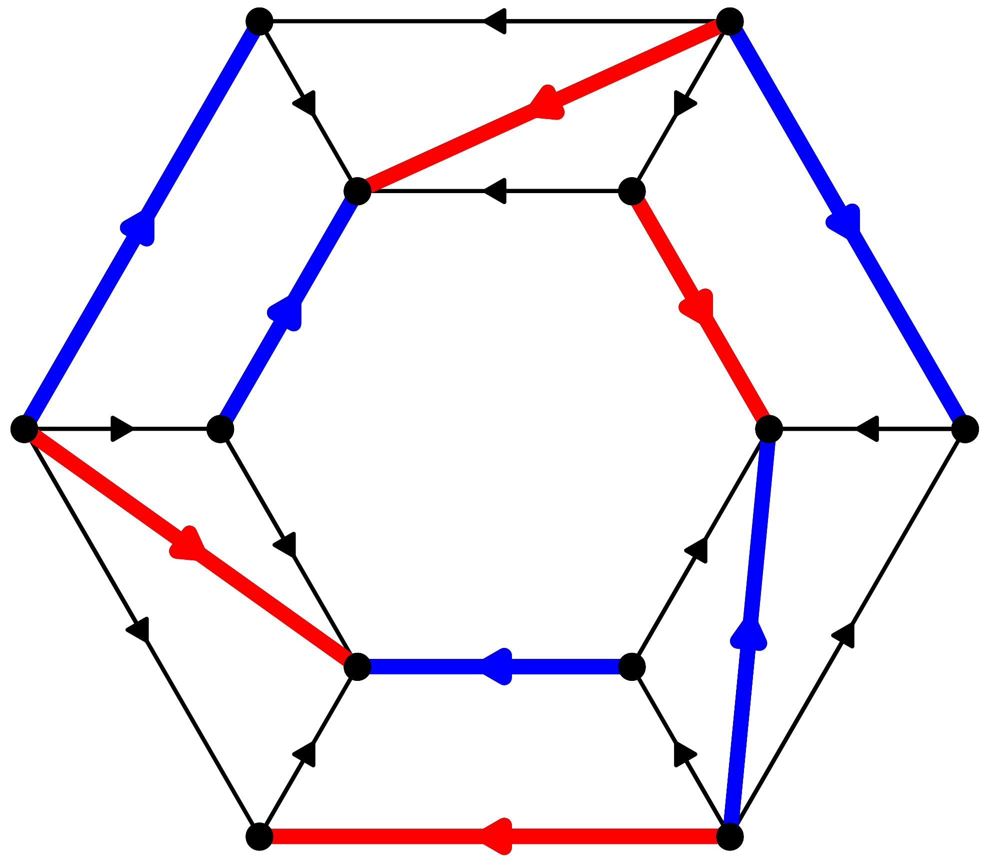
Schrijver

(•,•,•) WA



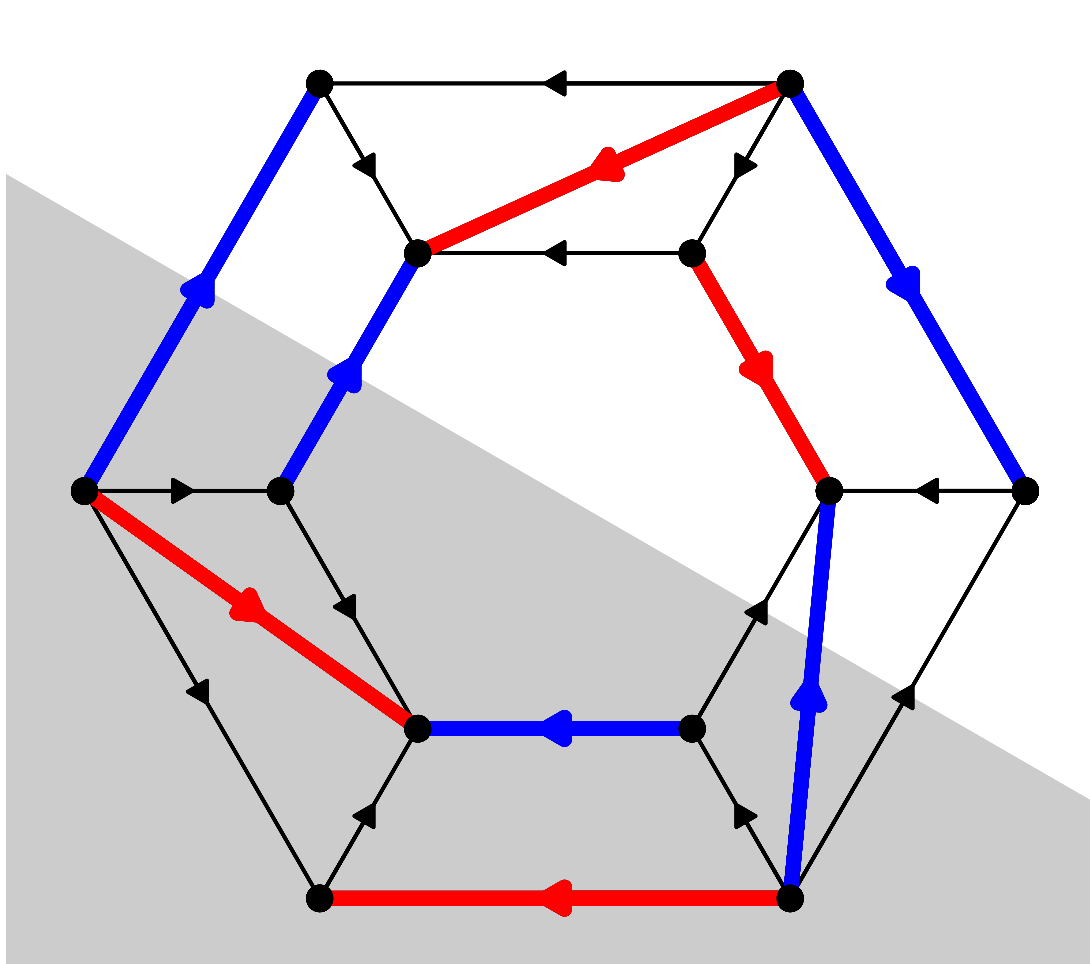
Schrijver

(●,●,●) WA; (●,●,●)



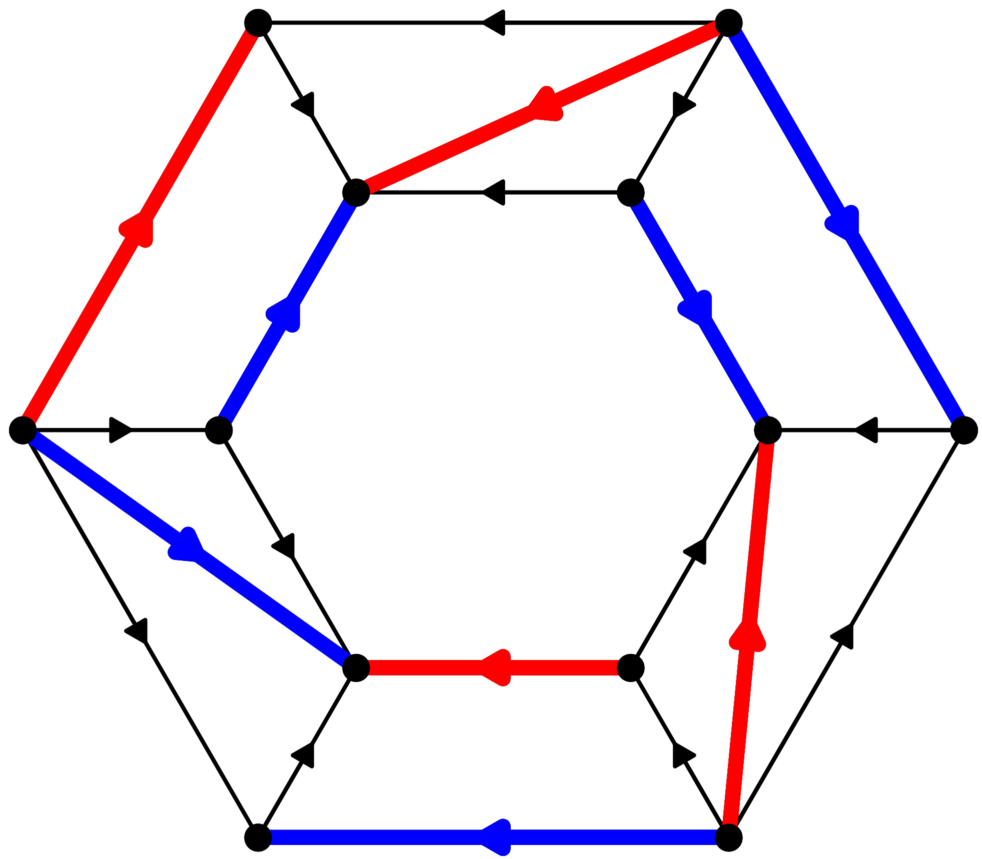
Schrijver

(•,•,•) WA; (•,•,•) WA



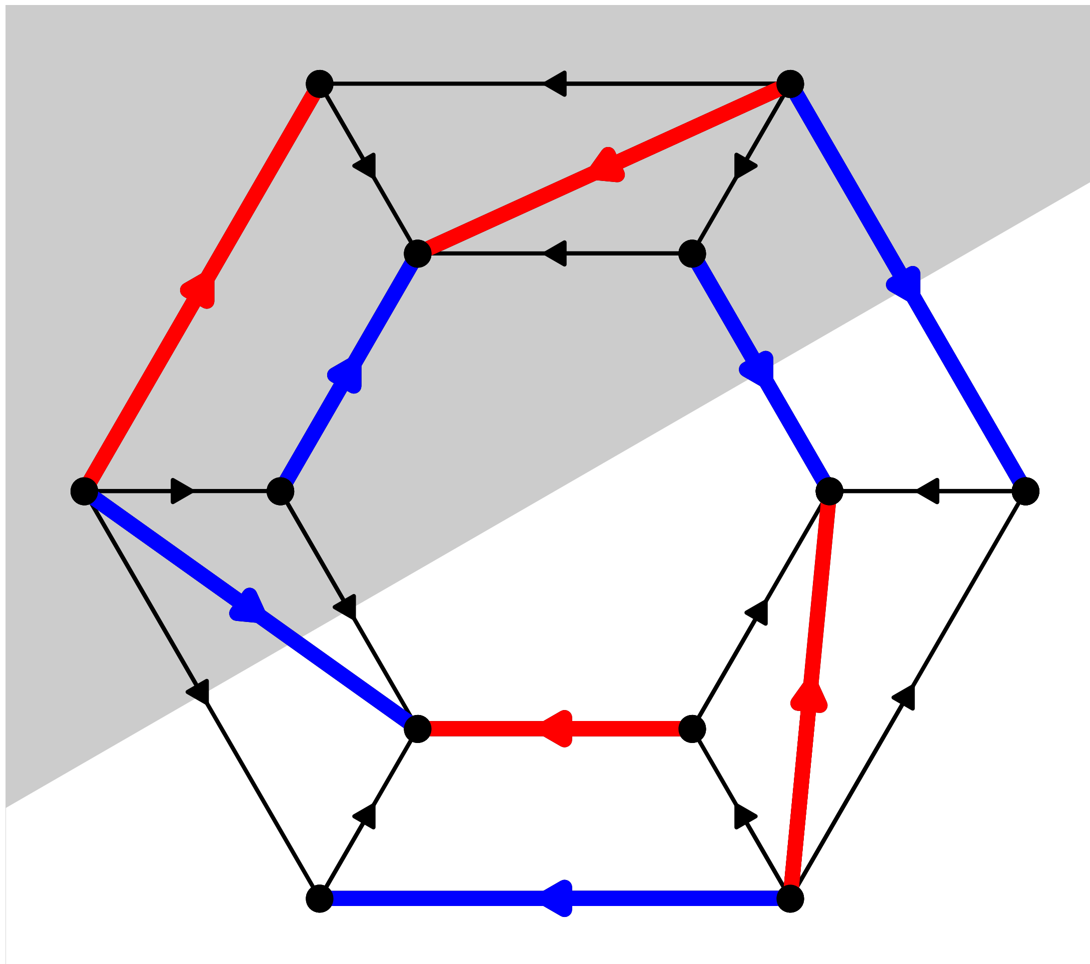
Schrijver

(•,•,•) WA; (•,•,•) WA; (•,•,•)



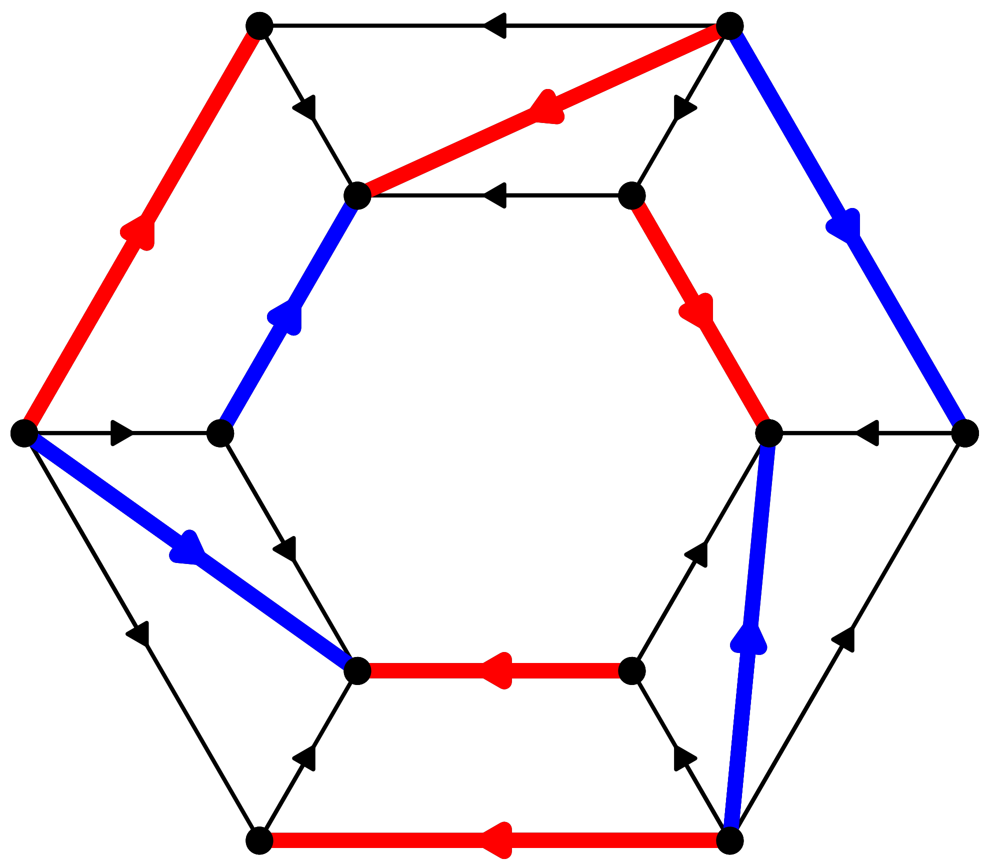
Schrijver

(•,•,•) WA; (•,•,•) WA; (•,•,•) WA



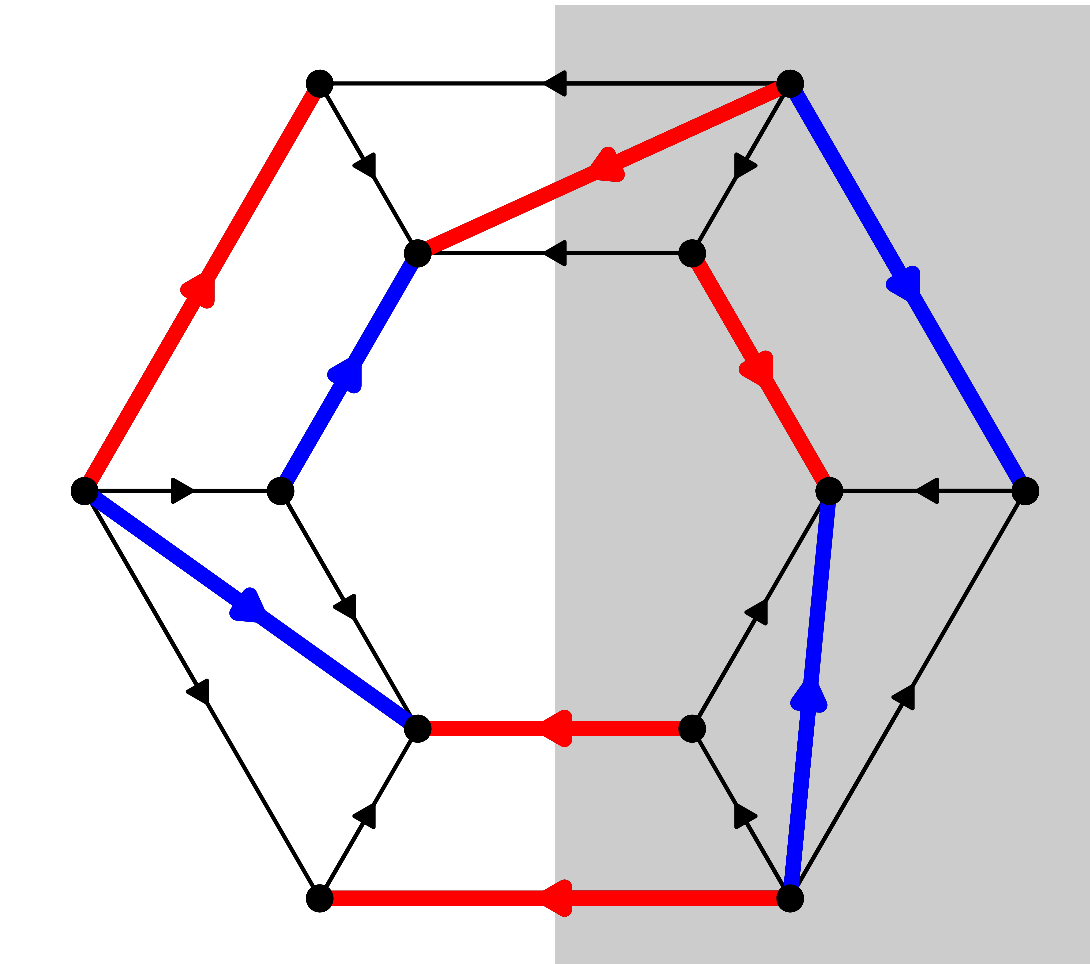
Schrijver

(●,●,●) WA; (●,●,●) WA; (●,●,●) WA; (●,●,●)



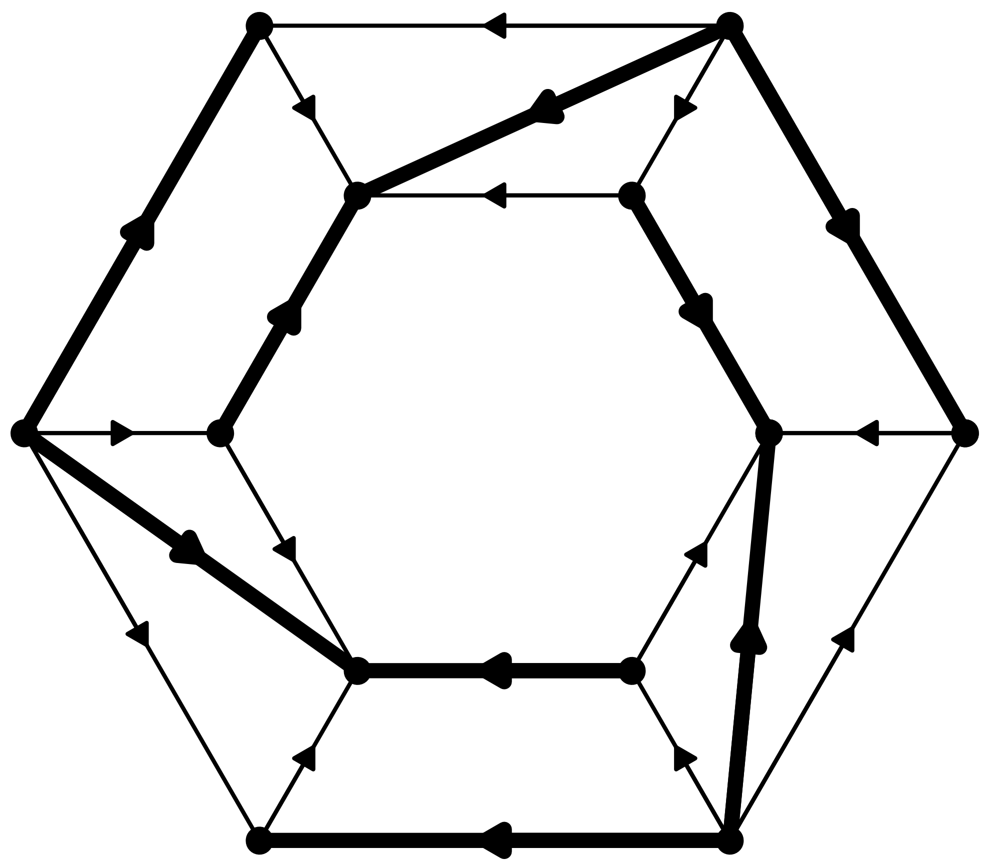
Schrijver

(●,●,●) WA; (●,●,●) WA; (●,●,●) WA; (●,●,●) WA!

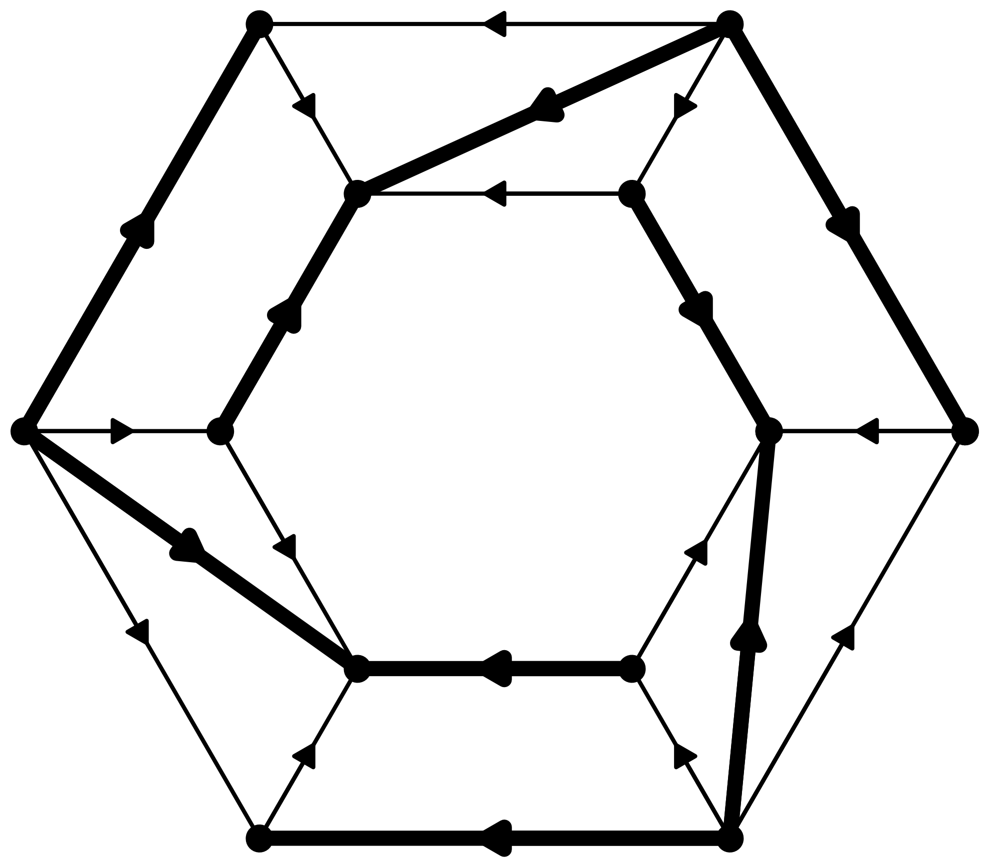


Schrijver

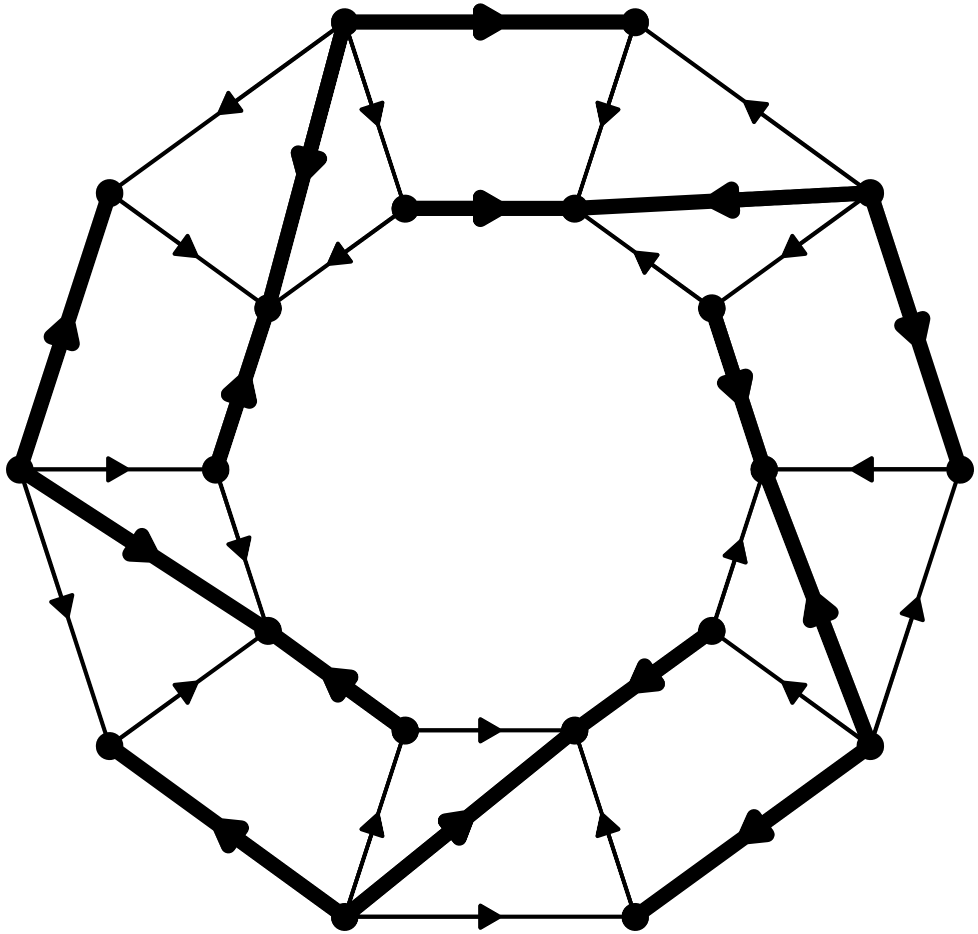
contra-exemplo!



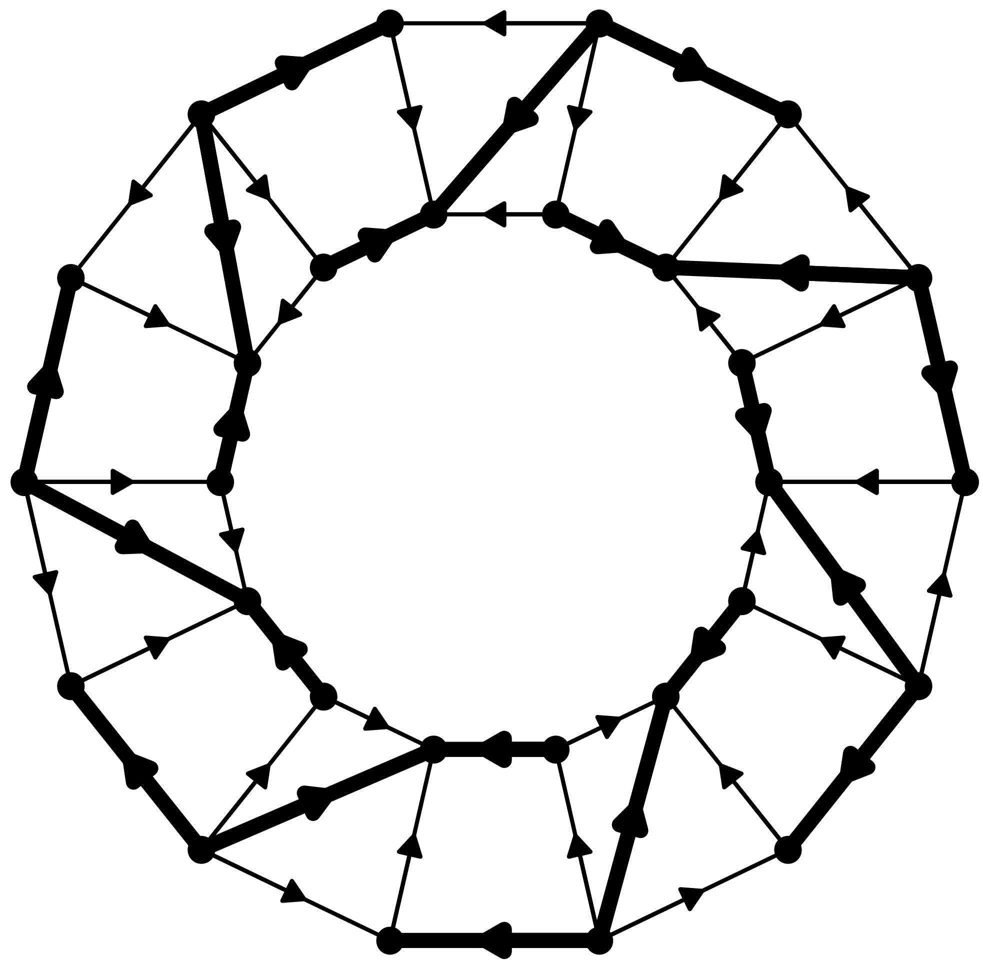
Schrijver generalizado



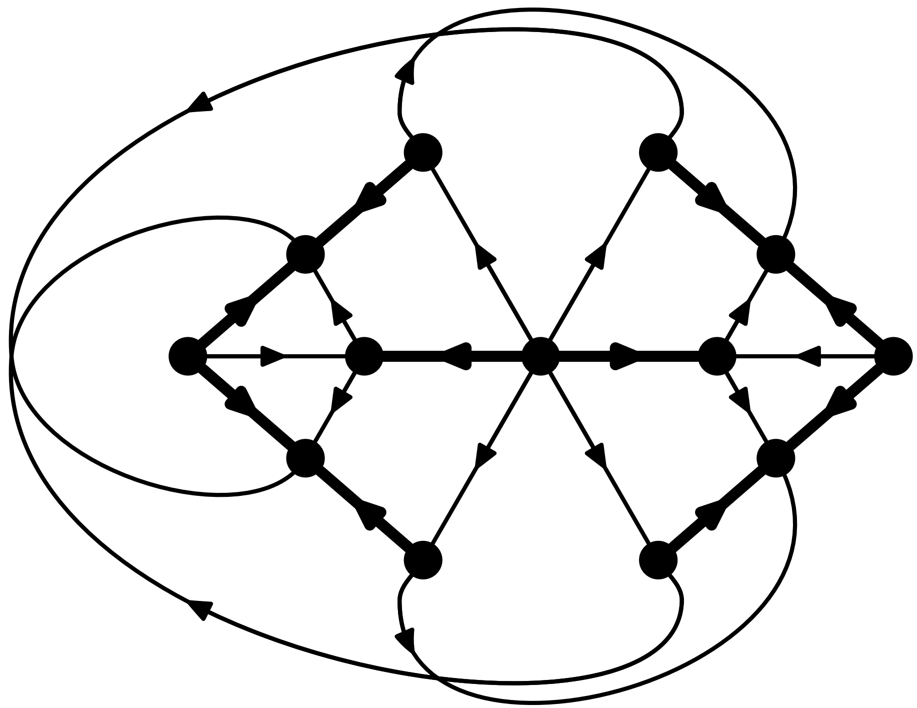
Schrijver generalizado



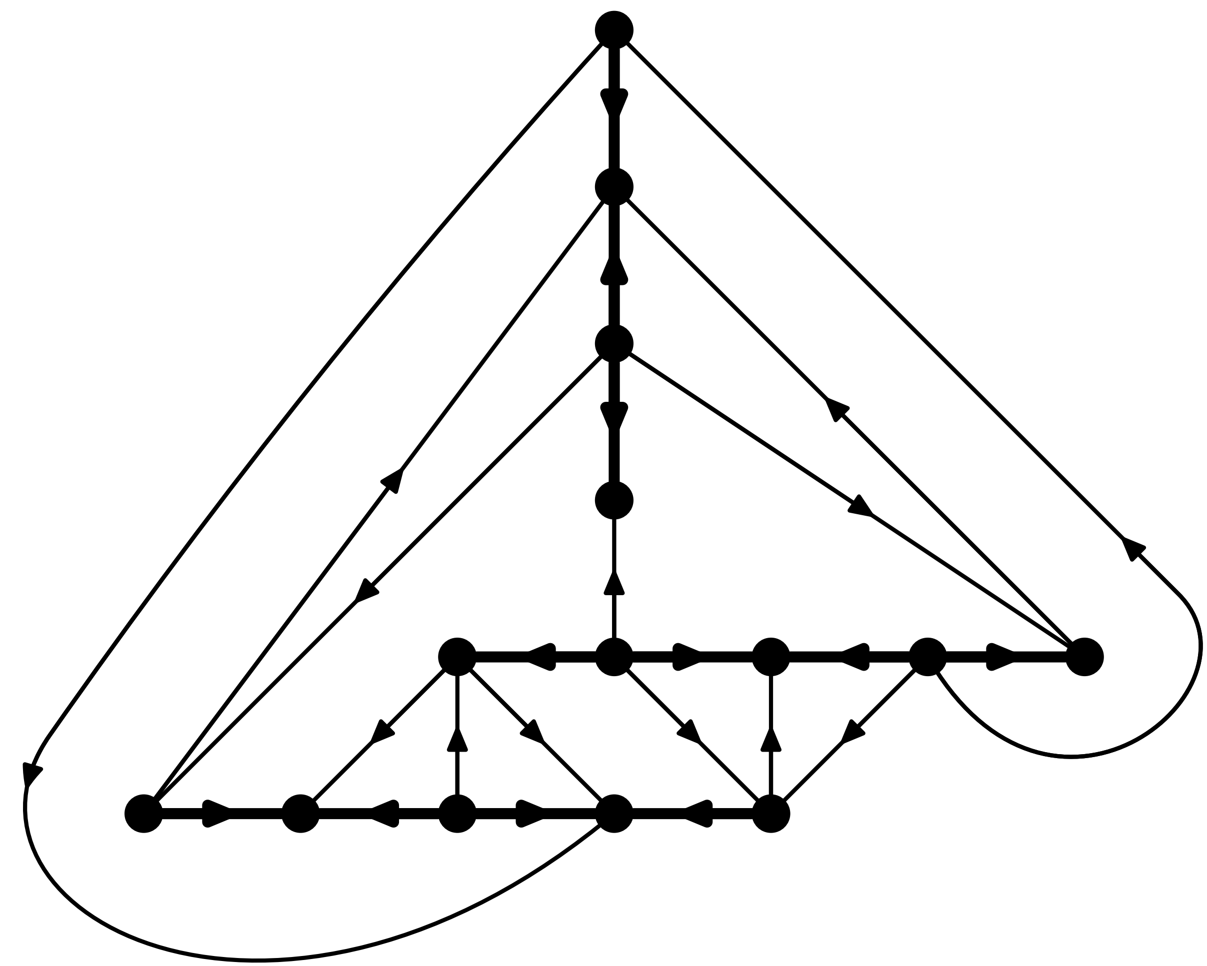
Schrijver generalizado



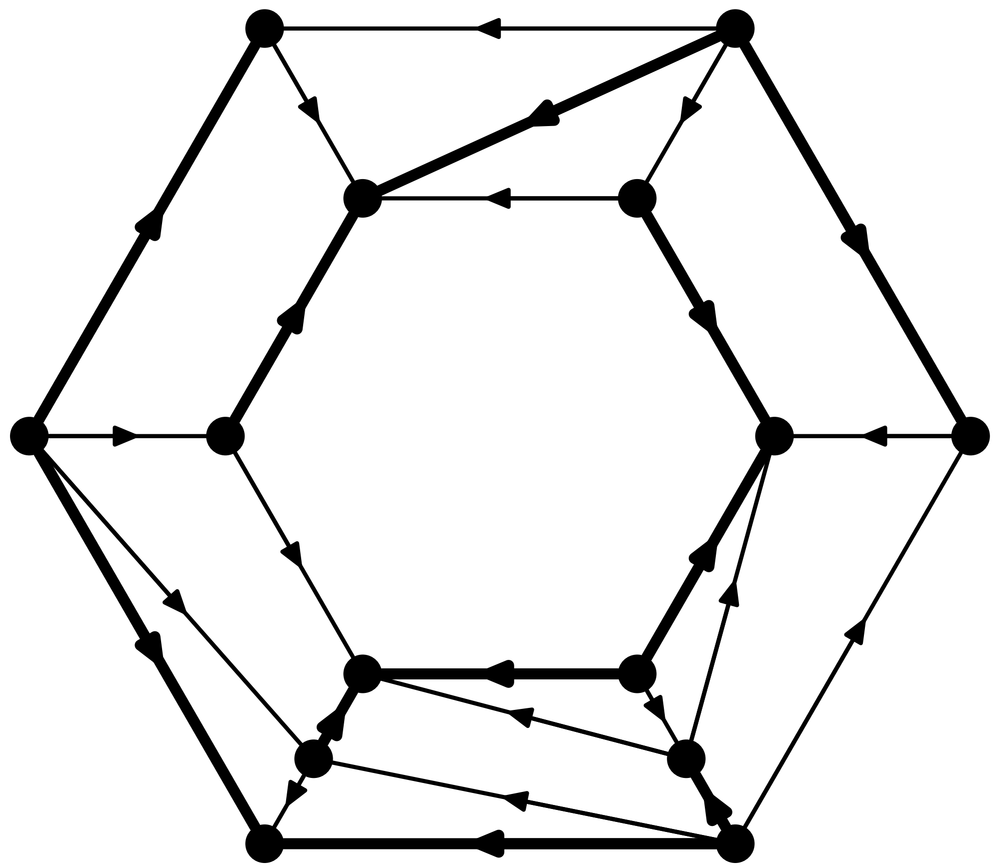
Cornuéjols e Guenin



Cornuéjols e Guenin



Cornuéjols e Guenin



Thomassen

Conjectura planar de Woodall
n$^{\text{o}}$ máximo de quebra-ciclos disjuntos
$=$ tamanho mínimo de um circuito

Thomassen

Conjectura planar de Woodall

n$^{\mathrm{o}}$ máximo de quebra-ciclos disjuntos

$=$ tamanho mínimo de um circuito

se não é planar, então é falsa

Thomassen

Conjectura planar de Woodall
n$^{\text{o}}$ máximo de quebra-ciclos disjuntos
$=$ tamanho mínimo de um circuito

se não é planar, então é falsa

Contra-exemplo de Thomassen:

Thomassen

Conjectura planar de Woodall
n$^{\mathrm{o}}$ máximo de quebra-ciclos disjuntos
$=$ tamanho mínimo de um circuito

se não é planar, então é falsa

Contra-exemplo de Thomassen:

torneio com 15 vértices

Thomassen

Conjectura planar de Woodall
n$^{\text{o}}$ máximo de quebra-ciclos disjuntos
$=$ tamanho mínimo de um circuito

se não é planar, então é falsa

Contra-exemplo de Thomassen:

torneio com 15 vértices $\therefore$ 105 arcos

Thomassen

Conjectura planar de Woodall
n$^{\text{o}}$ máximo de quebra-ciclos disjuntos
$=$ tamanho mínimo de um circuito

se não é planar, então é falsa

Contra-exemplo de Thomassen:

torneio com 15 vértices $\therefore$ 105 arcos

circuito mínimo $= 3$

Thomassen

Conjectura planar de Woodall
n$^{\mathrm{o}}$ máximo de quebra-ciclos disjuntos
$=$ tamanho mínimo de um circuito

se não é planar, então é falsa

Contra-exemplo de Thomassen:

torneio com 15 vértices $\therefore$ 105 arcos

circuito mínimo $= 3$

para destruir todos os circuitos,
é preciso remover mais que $105/3$ arcos

Thomassen

Conjectura planar de Woodall
n$^{\text{o}}$ máximo de quebra-ciclos disjuntos
$=$ tamanho mínimo de um circuito

se não é planar, então é falsa

Contra-exemplo de Thomassen:

torneio com 15 vértices $\therefore$ 105 arcos

circuito mínimo $= 3$

para destruir todos os circuitos,
é preciso remover mais que $105/3$ arcos

Jair Donadelli e Yoshi Kohayakawa:
"A tedious case analysis shows that..."

Thomassen

torneio T

$V(T) = X \cup Y \cup Z$

Thomassen

torneio T

$V(T) = X \cup Y \cup Z$

$X = \{x_1, \dots, x_5\} \quad Y = \{y_1, \dots, y_5\} \quad Z = \{z_1, \dots, z_5\}$

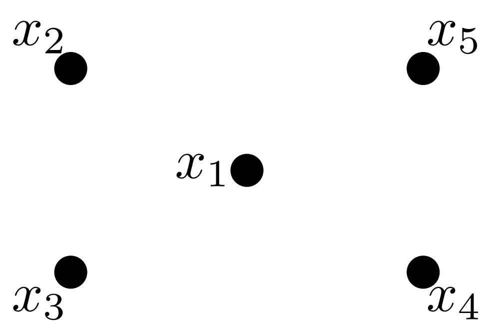
Thomassen

torneio T

$V(T) = X \cup Y \cup Z$

$X = \{x_1, \ldots, x_5\} \quad Y = \{y_1, \ldots, y_5\} \quad Z = \{z_1, \ldots, z_5\}$

$T[X]$



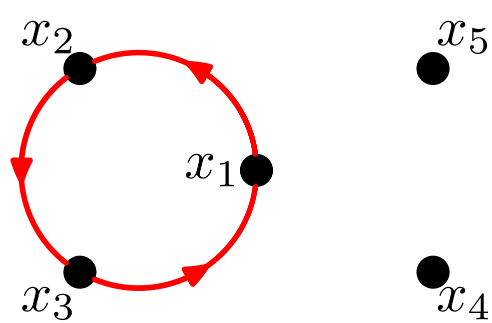
Thomassen

torneio T

$V(T) = X \cup Y \cup Z$

$X = \{x_1, \ldots, x_5\} \quad Y = \{y_1, \ldots, y_5\} \quad Z = \{z_1, \ldots, z_5\}$

$T[X]$



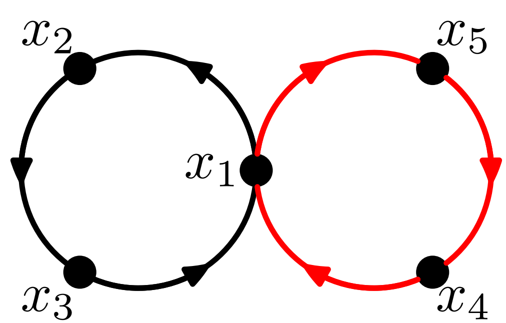
Thomassen

torneio T

$V(T) = X \cup Y \cup Z$

$X = \{x_1, \ldots, x_5\} \quad Y = \{y_1, \ldots, y_5\} \quad Z = \{z_1, \ldots, z_5\}$

$T[X]$



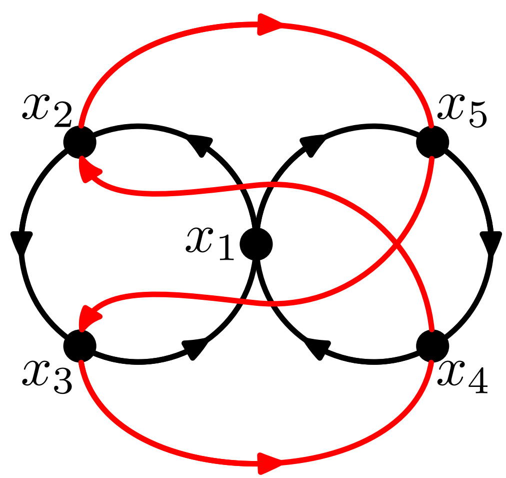
Thomassen

torneio T

$V(T) = X \cup Y \cup Z$

$X = \{x_1, \ldots, x_5\} \quad Y = \{y_1, \ldots, y_5\} \quad Z = \{z_1, \ldots, z_5\}$

$T[X]$



Thomassen

torneio T

$V(T) = X \cup Y \cup Z$

$X = \{x_1, \ldots, x_5\} \quad Y = \{y_1, \ldots, y_5\} \quad Z = \{z_1, \ldots, z_5\}$

$(y_i, x_i), (x_i, z_i), (z_i, y_i), \forall i$

Thomassen

torneio T

$V(T) = X \cup Y \cup Z$

$X = \{x_1, \ldots, x_5\} \quad Y = \{y_1, \ldots, y_5\} \quad Z = \{z_1, \ldots, z_5\}$

$(y_i, x_i), (x_i, z_i), (z_i, y_i), \forall i$

$(x_i, y_j), (x_i, z_j), (z_i, y_j), \forall i \neq j$

Thomassen

torneio T

$V(T) = X \cup Y \cup Z$

$X = \{x_1, \ldots, x_5\} \quad Y = \{y_1, \ldots, y_5\} \quad Z = \{z_1, \ldots, z_5\}$

$(y_i, x_i), (x_i, z_i), (z_i, y_i), \forall i$

$(x_i, y_j), (x_i, z_j), (z_i, y_j), \forall i \neq j$

Para destruir circuitos, é preciso remover pelo menos $20 + 5 + 5 + 3 + 3 + 3 = 39 > 105/3$ arcos

Problemas?

Tópicos

- As conjecturas
  - Preliminares
  - Os enunciados
  - As relações
- Os contra-exemplos

▷ As provas

Grafos série-paralelos

G grafo não-orientado

Grafos série-paralelos

G grafo não-orientado

G é série-paralelo se
G pode ser obtido a partir de uma floresta através de

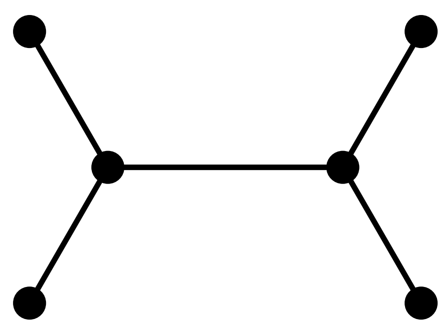
- subdivisões de arestas
- duplicações de arestas

Grafos série-paralelos

G grafo não-orientado

G é série-paralelo se
G pode ser obtido a partir de uma floresta através de

- subdivisões de arestas
- duplicações de arestas

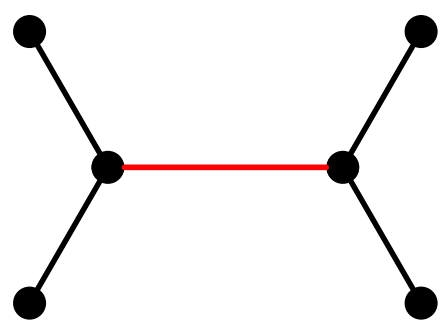


Grafos série-paralelos

G grafo não-orientado

G é série-paralelo se
G pode ser obtido a partir de uma floresta através de

- subdivisões de arestas
- duplicações de arestas

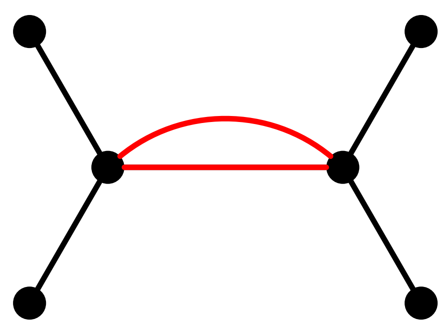


Grafos série-paralelos

G grafo não-orientado

G é série-paralelo se
G pode ser obtido a partir de uma floresta através de

- subdivisões de arestas
- duplicações de arestas

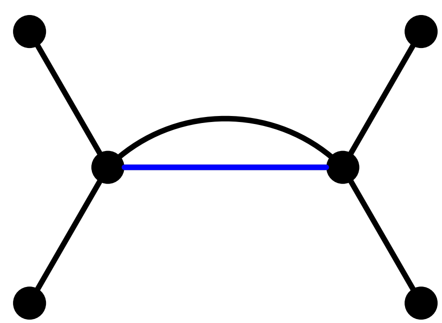


Grafos série-paralelos

G grafo não-orientado

G é série-paralelo se
G pode ser obtido a partir de uma floresta através de

- subdivisões de arestas
- duplicações de arestas

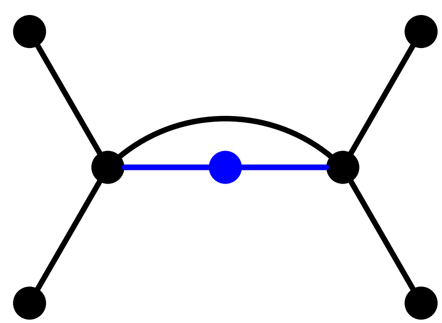


Grafos série-paralelos

G grafo não-orientado

G é série-paralelo se
G pode ser obtido a partir de uma floresta através de

- subdivisões de arestas
- duplicações de arestas

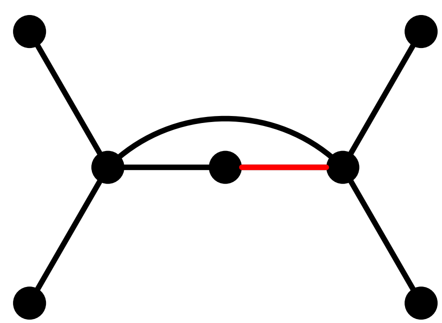


Grafos série-paralelos

G grafo não-orientado

G é série-paralelo se
G pode ser obtido a partir de uma floresta através de

- subdivisões de arestas
- duplicações de arestas

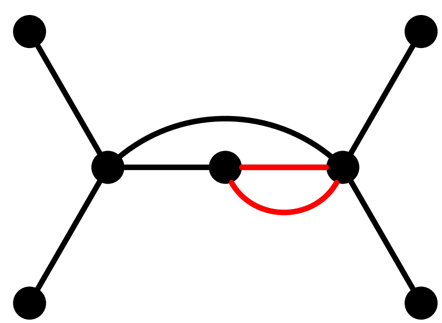


Grafos série-paralelos

G grafo não-orientado

G é série-paralelo se
G pode ser obtido a partir de uma floresta através de

- subdivisões de arestas
- duplicações de arestas



Teorema de Lee-Wakabayashi

D grafo orientado série-paralelo com circuito

Teorema de Lee-Wakabayashi

D grafo orientado série-paralelo com circuito

Teorema
O número máximo de quebra-ciclos disjuntos
é igual ao comprimento mínimo de um circuito.

Teorema de Lee-Wakabayashi

D grafo orientado série-paralelo com circuito
$\ell \in \mathbb{Z}^A_{\geq 0}$ função comprimento

Teorema
O número máximo de quebra-ciclos disjuntos
é igual ao comprimento mínimo de um circuito.

Teorema de Lee-Wakabayashi

D grafo orientado série-paralelo com circuito
$\ell \in \mathbb{Z}^{A}_{\geq 0}$ função comprimento

Teorema
O número máximo de quebra-ciclos disjuntos
é igual ao comprimento mínimo de um circuito.

Teorema
O número máximo de quebra-ciclos
com cada arco a em no máximo $\ell(a)$ quebra-ciclos
é igual ao comprimento mínimo de um circuito segundo ℓ.

Teorema de Lee-Wakabayashi

D grafo orientado série-paralelo com circuito
$\ell \in \mathbb{Z}^{A}_{\geq 0}$ função comprimento

Teorema
O número máximo de quebra-ciclos disjuntos
é igual ao comprimento mínimo de um circuito.

Teorema
O número máximo de quebra-ciclos
com cada arco a em no máximo $\ell(a)$ quebra-ciclos
é igual ao comprimento mínimo de um circuito segundo ℓ.

$\mathrm{cint}(D, \ell)$

Visão geral da prova

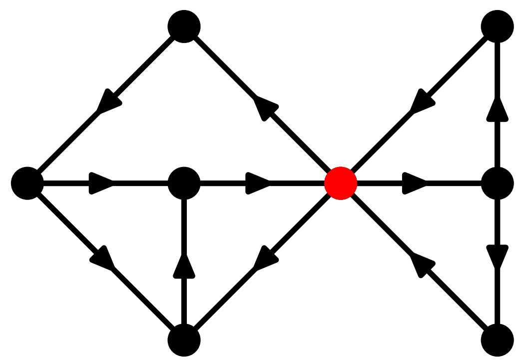
Indução em $|V(D)| + |A(D)|$

Visão geral da prova

Indução em $|V(D)| + |A(D)|$

Podemos supor

- D fortemente conexo sem vértices de corte

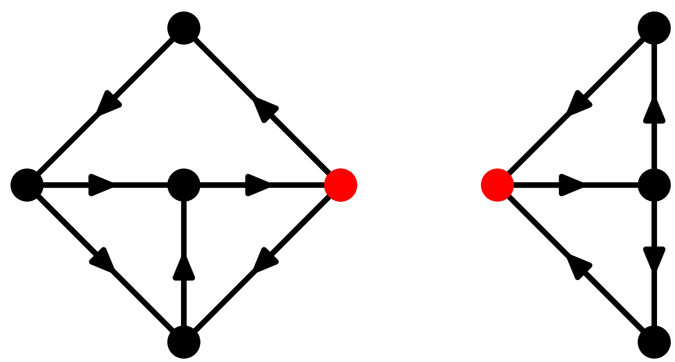


Visão geral da prova

Indução em $|V(D)| + |A(D)|$

Podemos supor

- D fortemente conexo sem vértices de corte



Visão geral da prova

Indução em $|V(D)| + |A(D)|$

Podemos supor

- D fortemente conexo sem vértices de corte
- pelo menos 3 vértices e $\mathrm{cint}(D, \ell) > 0$

Visão geral da prova

Indução em $|V(D)| + |A(D)|$

Podemos supor

- D fortemente conexo sem vértices de corte
- pelo menos 3 vértices e $\mathrm{cint}(D, \ell) > 0$

Casos:

- arcos em série

Visão geral da prova

Indução em $|V(D)| + |A(D)|$

Podemos supor

- D fortemente conexo sem vértices de corte
- pelo menos 3 vértices e $\mathrm{cint}(D, \ell) > 0$

Casos:

- arcos em série
- arcos paralelos

Visão geral da prova

Indução em $|V(D)| + |A(D)|$

Podemos supor

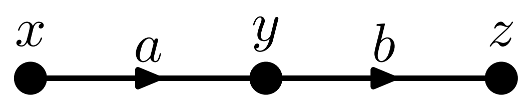
- D fortemente conexo sem vértices de corte
- pelo menos 3 vértices e $\mathrm{cint}(D, \ell) > 0$

Casos:

- arcos em série
- arcos paralelos
- D é crítico (2 casos)

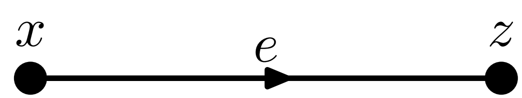
Arcos em série

$d(y) = 2$



Arcos em série

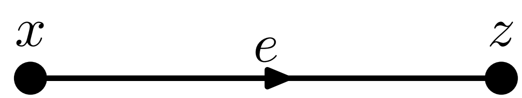
$d(y) = 2$
$\ell'(e) = \ell(a) + \ell(b)$



Arcos em série

$d(y) = 2$
$\ell'(e) = \ell(a) + \ell(b)$

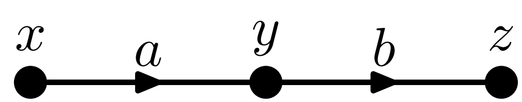
HI $\Longrightarrow F'_1, \ldots, F'_p$
$p := \mathrm{cint}(D', \ell') = \mathrm{cint}(D, \ell)$



Arcos em série

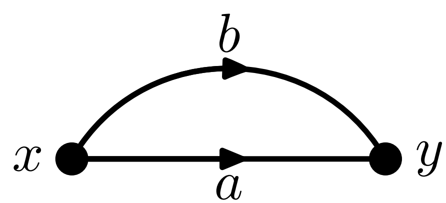
$d(y) = 2$
$\ell'(e) = \ell(a) + \ell(b)$

HI $\Longrightarrow F'_1, \ldots, F'_p$
$p := \mathrm{cint}(D', \ell') = \mathrm{cint}(D, \ell)$



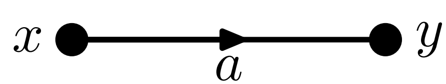
Arcos paralelos

$\ell(a) \leq \ell(b)$



Arcos paralelos

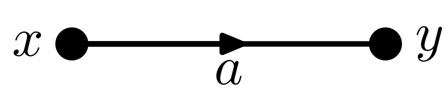
$\ell(a) \leq \ell(b)$
$\ell'(a) = \ell(a)$



Arcos paralelos

$\ell(a) \leq \ell(b)$
$\ell'(a) = \ell(a)$

HI $\Longrightarrow F'_1, \ldots, F'_p$
$p := \text{cint}(D', \ell') = \text{cint}(D, \ell)$

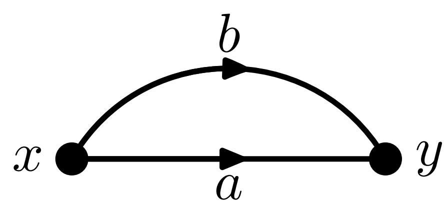


Arcos paralelos

$\ell(a) \leq \ell(b)$
$\ell'(a) = \ell(a)$

HI $\Longrightarrow F'_1, \ldots, F'_p$
$p := \mathrm{cint}(D', \ell') = \mathrm{cint}(D, \ell)$

$F_i := F'_i \cup \{b\}$ se $a \in F'_i$
$F_i := F'_i$ c.c.



Visão geral da prova (cont.)

D não tem arcos em série ou paralelos

Visão geral da prova (cont.)

D não tem arcos em série ou paralelos

Podemos supor que D é crítico:

Visão geral da prova (cont.)

D não tem arcos em série ou paralelos

Podemos supor que D é crítico:
todo arco a com $\ell(a) > 0$ está em algum circuito mínimo

Visão geral da prova (cont.)

D não tem arcos em série ou paralelos

Podemos supor que D é crítico:
todo arco a com $\ell(a) > 0$ está em algum circuito mínimo

se D não é crítico,
diminua o máximo possível o comprimento dos arcos
sem alterar $\mathrm{cint}(D, \ell)$

Visão geral da prova (cont.)

D não tem arcos em série ou paralelos

Podemos supor que D é crítico:
todo arco a com $\ell(a) > 0$ está em algum circuito mínimo

se D não é crítico,
diminua o máximo possível o comprimento dos arcos
sem alterar $\mathrm{cint}(D, \ell)$

obtenho assim $\ell' \leq \ell$

Visão geral da prova (cont.)

D não tem arcos em série ou paralelos

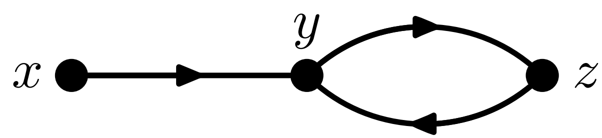
Podemos supor que D é crítico:
todo arco a com $\ell(a) > 0$ está em algum circuito mínimo

se D não é crítico,
diminua o máximo possível o comprimento dos arcos
sem alterar $\mathrm{cint}(D, \ell)$

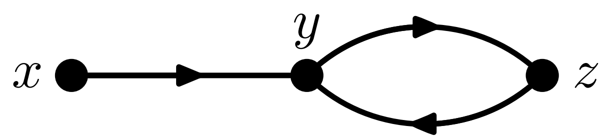
obtenho assim $\ell' \leq \ell$

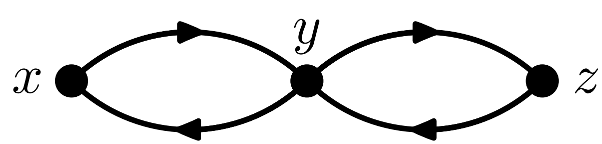
Fato: D é 2-conexo série-paralelo
$\Longrightarrow D$ tem um vértice com exatamente 2 vizinhos

Casos

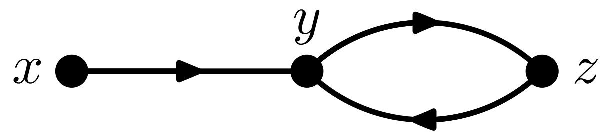


Casos



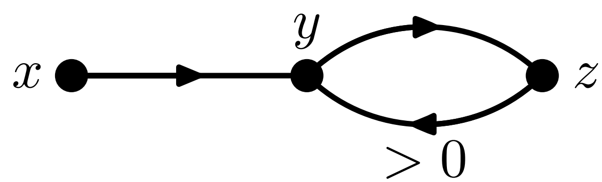


Casos



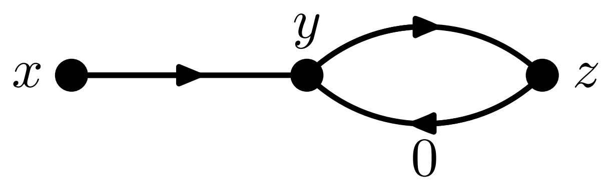
$\mathrm{cint}(D, \ell) = \ell(zy) + \ell(yz)$

Casos



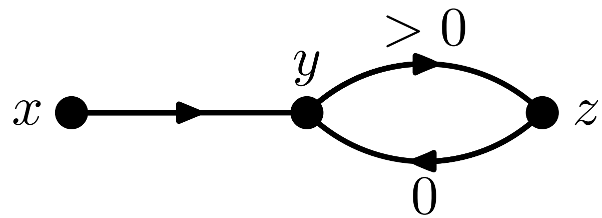
$\mathrm{cint}(D, \ell) = \ell(zy) + \ell(yz)$

Casos



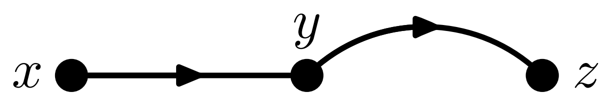
$$\mathrm{cint}(D, \ell) = \ell(zy) + \ell(yz)$$

Casos



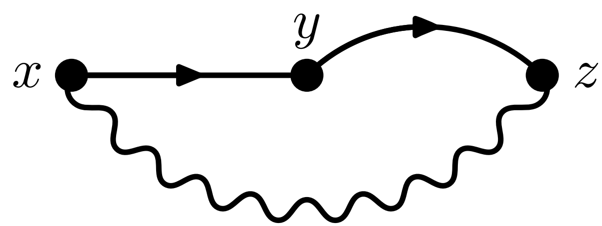
$$\mathrm{cint}(D, \ell) = \ell(zy) + \ell(yz)$$

Casos



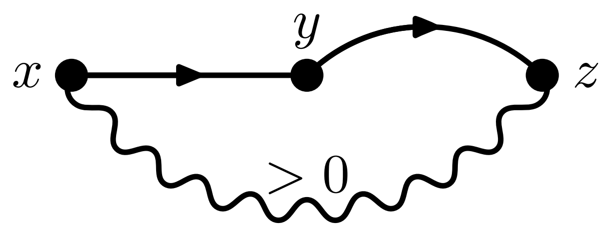
$\mathrm{cint}(D, \ell) = \ell(zy) + \ell(yz)$
$\mathrm{cint}(D', \ell') \geq \mathrm{cint}(D, \ell)$
$\mathrm{cint}(D', \ell') = \mathrm{cint}(D, \ell)$

Casos



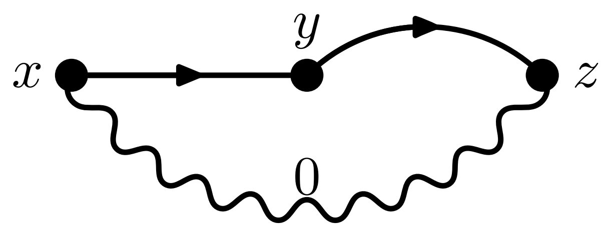
$\mathrm{cint}(D, \ell) = \ell(zy) + \ell(yz)$
$\mathrm{cint}(D', \ell') \geq \mathrm{cint}(D, \ell)$
$\mathrm{cint}(D', \ell') = \mathrm{cint}(D, \ell)$

Casos



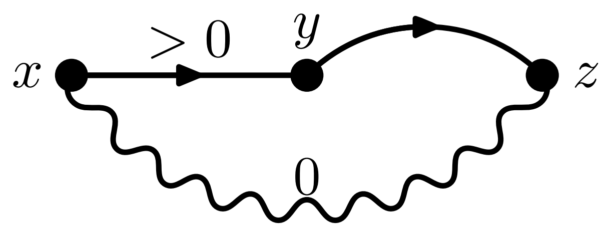
$\text{cint}(D, \ell) = \ell(zy) + \ell(yz)$
$\text{cint}(D', \ell') \geq \text{cint}(D, \ell)$
$\text{cint}(D', \ell') = \text{cint}(D, \ell)$

Casos



$\mathrm{cint}(D, \ell) = \ell(zy) + \ell(yz)$
$\mathrm{cint}(D', \ell') \geq \mathrm{cint}(D, \ell)$
$\mathrm{cint}(D', \ell') = \mathrm{cint}(D, \ell)$

Casos

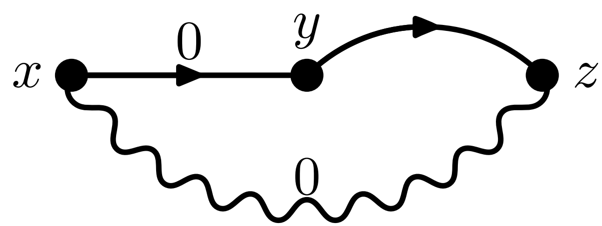


$\mathrm{cint}(D, \ell) = \ell(zy) + \ell(yz)$

$\mathrm{cint}(D', \ell') \geq \mathrm{cint}(D, \ell)$

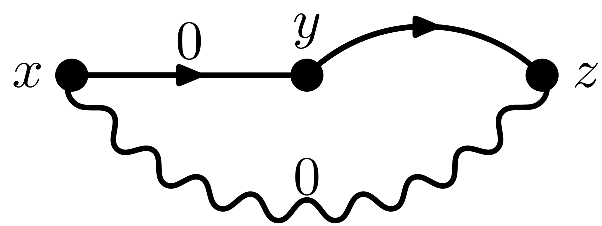
$\mathrm{cint}(D', \ell') = \mathrm{cint}(D, \ell)$

Casos



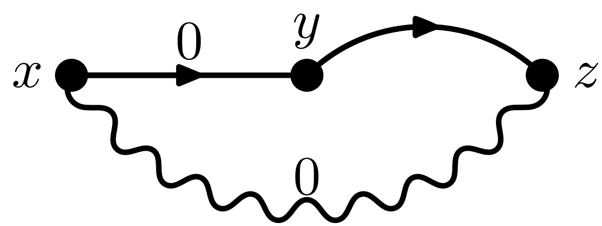
$\mathrm{cint}(D, \ell) = \ell(zy) + \ell(yz)$
$\mathrm{cint}(D', \ell') \geq \mathrm{cint}(D, \ell)$
$\mathrm{cint}(D', \ell') = \mathrm{cint}(D, \ell)$

Casos



$$p := \mathrm{cint}(D', \ell') = \mathrm{cint}(D, \ell) = \ell(zy) + \ell(yz)$$

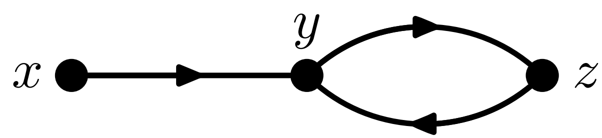
Casos



$$p := \mathrm{cint}(D', \ell') = \mathrm{cint}(D, \ell) = \ell(zy) + \ell(yz)$$

$$\mathsf{HI} \Longrightarrow F'_1, \ldots, F'_p$$

Casos



$p := \mathrm{cint}(D', \ell') = \mathrm{cint}(D, \ell) = \ell(zy) + \ell(yz)$

HI $\Longrightarrow F'_1, \ldots, F'_p$

$$F_i := \begin{cases} F'_i & \text{se } yz \in F'_i \\ F'_i \cup \{zy\} & \text{se } yz \notin F'_i \end{cases}$$

Tópicos

- As conjecturas
  - Preliminares
  - Os enunciados
  - As relações
- Os contra-exemplos

▷ Mais provas (próximo seminário)