MAT0311/MAP0217 - 2o. Semestre de 2024

Teorema 1. *Sejam (X, d), (Y, ρ) espaços métricos, com Y completo. Seja $f_n : E \to Y$ uma sequência de funções, convergindo uniformemente sobre E para $f : E \to Y$. Seja $x_0 \in E'$ e suponha que exista , para todo $n \in \mathbb{N}$,*

$$\lim_{x \to x_0} f_n(x) \doteq y_n \in Y.$$

Então $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge em Y para um elemento y_0 e

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0.$$

Em outras palavras:

$$\lim_{x \to x_0} \lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} \lim_{x \to x_0} f_n(x).$$

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$. Pelo critério de Cauchy para convergência uniforme existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que, se $m, n \in \mathbb{N}$ então

$$\rho(f_m(x), f_n(x)) \leq \varepsilon, \;\; \forall x \in E.$$

Fixando m, n nesta desigualdade e fazendo $x \to x_0$ obtemos

$$\rho(y_m, y_n) \leq \varepsilon, \text{ se } m, n \geq n_0.$$

Logo (y_n) é de Cauchy em Y e, portanto, existe $y_0 \in Y$ tal que $y_n \longrightarrow y_0$ em Y.

Seja $\varepsilon > 0$ e fixemos $n \in \mathbb{N}$ tal que $\rho(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon/3$ para todo $x \in E$ e $\rho(y_n, y_0) \leq \varepsilon/3$. Tomamos a seguir $\delta > 0$ tal que se $x \in E$ e $d(x, x_0) < \delta$ então $\rho(f_n(x), y_n) \leq \varepsilon/3$. Aplicando a desigualdade triangular

$$\rho(f(x), y_0) \leq \rho(f(x), f_n(x)) + \rho(f_n(x), y_n) + \rho(y_n, y_0)$$

concluímos que $\rho(f(x), y_0) \leq \varepsilon$ se $x \in E$, $d(x, x_0) < \delta$. $\square$.

Teorema 2. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto convexo e limitado e $f_n : \Omega \to \mathbb{R}^M$ uma sequência de funções diferenciáveis em Ω. Suponha que:*

(i) Existe $x_\bullet \in \Omega$ tal que a sequência $(f_n(x_\bullet))$ converge em $\mathbb{R}^M$;

(ii) A sequência $f_n' : \Omega \to L(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M)$ converge uniformemente para $g : \Omega \to L(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M)$.

Então a sequência (f_n) converge uniformemente para $f : \Omega \to \mathbb{R}^M$, a função f é diferenciável em Ω e $f' = g$ em Ω.

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$. Por (i) e (ii) e também pelo critério de Cauchy para a convergência uniforme, podemos determinar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $m, n \geq n_0$, temos

$$|f_m(x_\bullet) - f_n(x_\bullet)| \leq \varepsilon, \tag{1}$$

$$\|f'_m(x) - f'_n(x)\| \le \varepsilon, \quad \forall x \in \Omega. \tag{2}$$

Logo, pela desigualdade do valor médio e por (2), se $m, n \ge n_0$ e $x \in \Omega$ obtemos

$$|(f_m(x) - f_n(x)) - (f_m(x_\bullet) - f_n(x_\bullet))| \le \varepsilon|x - x_\bullet| \le D\varepsilon,$$

onde D denota o diâmetro de Ω. Assim, pela desigualdade triangular e por (i), temos

$$|f_m(x) - f_n(x)| \le |f_m(x) - f_n(x) - (f_m(x_\bullet) - f_n(x_\bullet))| + |f_m(x_\bullet) - f_n(x_\bullet))| \le D\varepsilon + \varepsilon,$$

desigualdade esta válida para $m, n \ge n_0$ e para todo $x \in \Omega$.

Consequentemente a sequência (f_n) satisfaz o critério de Cauchy para convergência uniforme e portanto existe $f : \Omega \to \mathbb{R}^M$ tal que $f_n \to f$ uniformemente em Ω. Para concluir a demonstração temos que mostrar que f é diferenciável em um ponto arbitrário $x_0 \in \Omega$ e que $f'(x_0) = g(x_0)$.

Para tal seja $\rho > 0$ tal que $B_\rho(x_0) \subset \Omega$. Então, se $h \in B_\rho(0)$, podemos definir

$$r(h) = f(x_0 + h) - f(x_0) - g(x_0)h \tag{3}$$

e a demonstração ficará concluída se provarmos que

$$\lim_{h \to 0} r(h)/|h| = 0$$

(note que $r(h)/|h|$ está definida em $B_\rho(0)\backslash\{0\}$ e que 0 é ponto de acumulação de $B_\rho(0)\backslash\{0\}$).

Para cada n escrevemos

$$r_n(h) = f_n(x_0 + h) - f(x_0) - f'_n(x_0)h. \tag{4}$$

Fixando $h \in B_\rho(0)$ e fazendo $n \to \infty$ em (4) segue de (3) que $r_n(h) \to r(h)$.

Seja $\varepsilon > 0$. Tomemos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que (2) valha para $m, n \ge n_0$. Então, para $h \in B_\rho(0) \setminus \{0\}$ podemos estimar

$$\begin{aligned} \left| \frac{r_m(h)}{|h|} - \frac{r_n(h)}{|h|} \right| &\le \frac{1}{|h|} \left|(f_m(x_0 + h) - f_n(x_0 + h)) - (f_m(x_0) - f_n(x_0))\right| \\ &+ \frac{1}{|h|} |f'_m(x_0)h - f'_n(x_0)h| \end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade do valor médio ao primeiro termo do lado direito desta última desigualdade, e levando em conta (2), obtemos

$$\left| \frac{r_m(h)}{|h|} - \frac{r_n(h)}{|h|} \right| \le \varepsilon + \frac{1}{|h|} |f'_m(x_0)h - f'_n(x_0)h|$$

se $m, n \geq n_0$. Finalmente, por (2) também temos

$$\frac{1}{|h|}\,|f'_m(x_0)h - f'_n(x_0)h| = \frac{1}{|h|}\,|(f'_m(x_0) - f'_n(x_0))h| \leq \|f'_m(x_0) - f'_n(x_0)\| \leq \varepsilon,$$

novamente para $m, n \geq n_0$.

Concluímos, então, que a sequência $r_n(h)/|h|$ satisfaz o critério de Cauchy para convergência uniforme em $B_\rho(0) \setminus \{0\}$. Com já vimos que $r_n(h) \to r(h)$ pontualmente em $B_\rho(x_0)$ segue que $r_n(h)/|h| \to r(h)/|h|$ uniformemente em $B_\rho(0) \setminus \{0\}$. Como, para cada $n \in \mathbb{N}$, $r_n(h)/|h| \to 0$ quando $h \to 0$, segue do Teorema 1 que $r(h)/|h| \to 0$ quando $h \to 0$. A demonstração do Teorema 2 está completa.