Questão 1: Dada uma série formada por funções contínuas, um modo de se mostrar que a soma define uma função contínua é mostrar que a convergência é uniforme. Para isto temos a nosso dispor o M-teste de Weierstrass. Como a função x^n não é limitada em $\mathbb{R}$, vamos nos restringir a intervalos da forma $[-L,L]$, $L>0$. Temos

$$\frac{|x^n|}{n^n} \leq \frac{L^n}{n^n} \quad \text{para } x\in[-L,L]$$

Como $\sum_{n=1}^{\infty} L^n/n^n < \infty$ (e.g. pelo teste da raiz)

o M-teste mostra que a série converge uniformemente em $[-L,L]$ e, portanto define uma função contínua em $[-L,L]$. Como $L>0$ é arbitrário a série define uma função contínua em $\mathbb{R}$.

Questão 2 A função f é contínua em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

De fato, se $x_0\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ (aberto em $\mathbb{R}$) existe

$I_0\subseteq\mathbb{R}\setminus\{0\}$ intervalo aberto centrado em x_0.

Mas a restrição de f a I_0 é constante e portanto f é contínua em x_0.

Por outro lado, se f fosse uniformemente contínua em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ dado $\varepsilon>0$ existiria $\delta>0$:

$$x, y \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, \ |x-y|<\delta \Longrightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$$

Escolha $\varepsilon = 1/2$ e tome o $\delta>0$ correspondente. Pela propriedade arquimediana de $\mathbb{R}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $1/n < \delta/2$. Temos $1/n, -1/n \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ e $\left|1/n - (-1/n)\right| = \frac{2}{n} < \delta$ mas $|f(1/n) - f(-1/n)| = 1 > \varepsilon$.

<u>Questão 3</u> Pela propriedade arquimediana existe $n \in \mathbb{N}$: $n(b-a)>1$. Como $2^n > n$, $n \in \mathbb{N}$ (prova-se por indução) temos

$$2^n(b-a)>1, \text{ ie, } 2^n b - 2^n a > 1.$$

Conforme provado em aula, existe $m \in \mathbb{Z}$:

$2^n b > m > 2^n a$, de onde segue a conclusão do exercício.

<u>Questão 4</u> Seja (E,d) um espaço métrico com E enumerável. Fixemos $x_0 \in E$ e definamos $f(x) = d(x, x_0)$, $x \in E$. (esta sugestão foi dada na lista)

Note que f é contínua em E (exercício 8 da lista 2). Seja então $X \subseteq E$ conexo, não vazio. Como X é enumerável, $f(X)$ é enumerável. Mas, também, $f(X)$ é conexo em $\mathbb{R}$ e, portanto é um intervalo em $\mathbb{R}$. Mas um intervalo é enumerável se, e só, é um conjunto unitário (veja que este intervalo é não vazio!)

Neste caso $f(X)=\{0\}$.

Tome agora $x_0 \in X$. Então $d(x,x_0)=0$, para todo $x \in X$, ie, $X=\{x_0\}$.

<u>Questão 5</u>: Lembre que um subconjunto em um espaço métrico é fechado se, e só se, ele contém o limite de todas suas sequências convergentes. Seja então $Z_n \in F+K$, $Z_n \to Z_*$ em $\mathbb{R}^N$. Temos que mostrar que $Z_* \in F+K$. Escrevemos

$$Z_n = x_n + y_n, \quad x_n \in F,\ y_n \in K.$$

Como K é compacto, existe (y_{n_k}) subsequência de (y_n), $y_{n_k} \longrightarrow y_* \in K$.

Temos (z_{m_k}) também convergente para z_*

Logo $x_{m_k} = z_{m_k} - y_{m_k} \longrightarrow z_* - y_*$

Como (x_{m_k}) é uma sequência em F, que é fechado em $\mathbb{R}^N$, segue que $z_* - y_* \in F$

Logo $z_* = (z_* - y_*) + y_* \in F + K$.

Agora, se F+K são compactos temos que F, em particular, é fechado em $\mathbb{R}^N$. Logo, pela parte anterior, F+K é fechado em $\mathbb{R}^N$. Para provar que F+K é compacto basta mostrar que F+K é limitado (Heine-Borel). Como F e K são limitados

$$\begin{cases} \exists\, a>0 : |x| \leq a, \ \forall x \in F \\ \exists\, b>0 : |y| \leq b, \ \forall y \in K \end{cases}$$ e, portanto,

$$|x+y| \leq |x| + |y| \leq a+b, \ \forall\, x+y \in F+K.$$

<u>Questão 6</u> Temos que mostrar que, dado $L>0$, $g_n(x) \xrightarrow{u} c$, isto é, que dado $\varepsilon>0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N} : |g_n(x)-c|<\varepsilon$, $\forall n \geq n_0, \forall x \in [-L,L]$

Agora, se $x \in [-L,L]$ e $n \in \mathbb{N}$

$$|n-x| \geq |n|-|x| = n-|x| \geq n-L.$$

Tome $k>0$ como no enunciado, correspondente ao nosso $\varepsilon>0$ dado.

Tome $\cancel{n_0 \geq n-L}$. $n_0 > k+L$. Assim, se $n \geq n_0$ temos $|n-x| \geq n_0 - L > k$ e, portanto

$$|g_n(x)-c| = |f(x-n)-c| < \varepsilon$$

se $n \geq n_0$, $|x| \leq L$.

Para a outra pergunta, basta observar que $\arctan(x)$ tem limite igual a $\pi/2$ no infinito.