MAT0311/MAP0217 - 2o. Semestre de 2024

1a. prova - 4/10/2024

1. (1 ponto) Mostre que a série
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$$
define uma função contínua em $\mathbb{R}$.

2. (1 ponto) Defina $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ por $f(x) = 1$ se $x > 0$, $f(x) = 0$ se $x < 0$. Mostre que f é contínua, mas não uniformemente contínua, em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

3. (2 pontos) Mostre que dados $a < b$, números reais, existe um número racional da forma $q = m/2^n$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, com $a < q < b$.

4. (2 pontos) Mostre que um espaço métrico enumerável é totalmente desconexo.

5. (2 pontos) Sejam $F \subset \mathbb{R}^N$ fechado em $\mathbb{R}^N$ e $K \subset \mathbb{R}^N$ compacto. Mostre que
$$F + K = \{x + y : x \in F, \ y \in K\}$$
é fechado em $\mathbb{R}^N$. Mostre também que $F + K$ é compacto se F e K o forem.

6. (2 pontos) Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$. Dizemos que f tem limite igual a c no infinito se dado $\varepsilon > 0$ existe $k > 0$ tal que
$$|x| > k \implies |f(x) - c| < \varepsilon.$$
Mostre que se f tem limite igual a c no infinito, e se definirmos $g_n(x) = f(x - n)$, então $g_n \to c$ uniformemente sobre os compactos de $\mathbb{R}$. Conclua que $h_n(x) = \arctan |x - n|$ converge uniformemente para $\pi/2$ uniformemente sobre os compactos de $\mathbb{R}$.