MAT0311/MAP0217 - 2o. Semestre de 2024

2a. prova - 29/11/2024

1. (1.5 pontos) Seja $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ diferenciável e suponha que exista $a > 0$ tal que $f(tx) = t^a f(x)$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^N$. Mostre, derivando em relação a t, a identidade de Euler:

$$\vec{\nabla} f(x) \cdot x = af(x), \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

2. (2 pontos) Sejam $U \subset \mathbb{R}^N$ aberto, $0 \in U$, e $f : U \to \mathbb{R}^N$ de classe C^1 tal que $f(0) = 0$ e que $I - f'(0)$ é inversível (aqui I representa a transformação identidade em $\mathbb{R}^N$)

(a) Mostre que existe um aberto $V \subset U$, $0 \in V$, tal que $f(x) \neq x$ para todo $x \in V$, $x \neq 0$;

(b) Mostre que este resultado continua válido sem a hipótese de f ser de classe C^1: basta assumir f diferenciável.

Sugestão: no ítem (a) use o Teorema da Função Inversa para $g(x) = x - f(x)$. Para (b) estime $|g(x)| \geq \ldots$

3. (2 pontos) Considere a equação

$$e^{2x-y} + \cos(x^2 + xy) - 2 - 2y = 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 .$$

O conjunto das soluções desta equação próximo de $(0, 0)$ define, implicitamente, uma das variáveis como função da outra? Se sim, determine a(s) derivada(s) desta(s) função(ões) na origem.

4. (valor 2.5 pontos) Sejam $U \subset \mathbb{R}^N$ um aberto conexo e $f : U \to \mathbb{R}^M$. Suponha que existam constantes $\alpha > 1$ e $C > 0$ tais que $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha$, $x, y \in U$. Conclua que f é constante. *Sugestão*: mostre, primeiramente, que f é diferenciável.

5. (2 pontos) Determine os valores máximo e o mínimo da função $f(x, y, z) = x^2 + xy + y^2 + yz + z^2$ na esfera $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

6. Esta questão contém dois ítens:

(a) (2 pontos) Se $p, q > 0$ são tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, mostre que o mínimo de

$$f(x, y) = \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \qquad x, y > 0$$

sujeito a $xy = 1$ é igual a 1.

(b) (1 ponto) Usando o ítem anterior mostre que se a e b são números não negativos e p e q são como acima, então

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$