FUNÇÕES HARMÔNICAS

Notas escritas por Antonio Victor da Silva Junior

para um curso ministrado por Paulo D. Cordaro

5a. versão - Janeiro de 2025

Mathematics, rightly viewed, possesses not only truth, but supreme beauty cold and austere, like that of sculpture, without appeal to any part of our weaker nature, without the gorgeous trappings of painting or music, yet sublimely pure, and capable of a stern perfection such as only the greatest art can show. The true spirit of delight, the exaltation, the sense of being more than Man, which is the touchstone of the highest excellence, is to be found in mathematics as surely as in poetry.

- BERTRAND RUSSELL, Study of Mathematics

1 Preliminares

Iniciamos fixando algumas notações. Escreveremos $\mathbb{Z}_+$ para denotar o conjunto dos números inteiros não negativos e $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ para denotar o conjunto dos números naturais. Por um *multi-índice* entendemos como sendo um elemento do produto cartesiano $\mathbb{Z}_+^N$, onde $N \in \mathbb{N}$. Se $\alpha = (\alpha_1, \ldots \alpha_N)$ é um multi-índice seu *comprimento* é o número $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_N$. Denotamos, também, por ∂^α o operador diferencial em $\mathbb{R}^N$ definido por

$$\partial^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_N}}{\partial x_N^{\alpha_N}}.$$

Se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é aberto denotamos por $C(\Omega) = C^0(\Omega)$ o espaço das funções contínuas definidas em Ω e a valores complexos. Se $k \in \mathbb{N}$ denotamos também por $C^k(\Omega)$ o espaço das funções definidas em Ω e a valores complexos tais que suas derivadas parciais de ordem $\leq k$ existem e são contínuas em Ω. Note então que $u \in C^k(\Omega)$ se, e só se, as derivadas parciais $\partial^\alpha u$ existem e são contínuas em Ω, para todo $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$ com $|\alpha| \leq k$ (Teorema de Schwarz). Definimos também $C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k \geq 0} C^k(\Omega)$. Observe que cada espaço $C^k(\Omega)$, com suas operações usuais, tem estrutura de $\mathbb{C}$-álgebra.

Usaremos também a notação $C^k(\overline{\Omega})$ ($k \in \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$) para denotar o subespaço de $C^k(\Omega)$ constituído das funções que se estendem a uma vizinhança de $\overline{\Omega}$ como funções de classe C^k.

Um *operador diferencial parcial linear (ODPL) com coeficientes constantes* é um operador da forma

$$P(\partial) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \partial^\alpha, \quad a_\alpha \in \mathbb{C}.$$

Dizemos que $P(\partial)$ tem *ordem* m se para algum α com $|\alpha| = m$ tem-se $a_\alpha \neq 0$. Note que se $k \geq m$ então $P(\partial)$ define um operador $\mathbb{C}$-linear, para cada aberto Ω de $\mathbb{R}^N$:

$$P(\partial) : C^k(\Omega) \longrightarrow C^{k-m}(\Omega).$$

Passamos agora a apresentar alguns exemplos:

1. O *operador de Cauchy-Riemann*. Aqui $N = 2$ e $m = 1$.

$$P(\partial) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2} \right\}.$$

2. O *operador de Laplace (ou laplaciano)*. Aqui $N \geq 1$ e $m = 2$.

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_N^2}.$$

3. O *operador do calor*. Aqui $N \geq 1$ e $m = 2$:

$$Q = \frac{\partial}{\partial t} - \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_N^2} \right\} = \frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x.$$

4. O *operador das ondas (ou d'Alambertiano)*. Aqui $N \geq 1$ e $m = 2$:

$$\Box = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_N^2} \right\} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_x.$$

5. O *operador de Schrödinger*. Aqui $N \geq 1$ e $m = 2$:

$$P(\partial_x, \partial_t) = -i\frac{\partial}{\partial t} - \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_N^2} \right\} = -i\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x.$$

Nos exemplos (3), (4) e (5) os operadores agem em $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$, onde escrevemos as coordenadas como $(x, t) = (x_1, \ldots, x_N, t)$

2 O problema de Dirichlet

2.1 DEFINIÇÃO. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um subconjunto aberto. Uma função $u \in C^2(\Omega)$ é dita *harmônica em* Ω se $\Delta u = 0$ em Ω.

Note que se u é a valores complexos então u é harmônica se, e somente se, $\mathsf{Re}u$ e $\mathsf{Im}u$ são harmônicas; isto se deve ao fato de Δ ser um operador com coeficientes reais. Assim, para o estudo das propriedades das funções harmônicas podemos nos restringir ao caso em que as funções são a valores reais.

2.2 EXEMPLO. São exemplos de funções harmônicas em Ω as funções u e v abaixo:

1. $\Omega = \mathbb{R}^N$ e $u(x) = a + \langle x, b \rangle$, com $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}^N$.

2. $\Omega \subset \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ aberto e $u = \mathsf{Re}f$, $v = \mathsf{Im}f$. Aqui $f : \Omega \to \mathbb{C}$ é uma função holomorfa.

3. $\Omega = \mathbb{R}^N$ e $u(x) = \mathsf{Re}\, e^{\langle x,\zeta\rangle}$, $v(x) = \mathsf{Im}\, e^{\langle x,\zeta\rangle}$. Aqui $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_N) \in \mathbb{C}^N$ satisfaz $\zeta_1^2 + \cdots + \zeta_N^2 = 0$

Um observação importante, e que motiva o resultado a seguir, é a seguinte: se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é aberto, se $u \in C^2(\Omega)$ e se $x_0 \in \Omega$ é ponto de mínimo local (resp. máximo local) de u então $\Delta u(x_0) \geq 0$ (resp. $\Delta u(x_0) \leq 0$).

2.3 TEOREMA. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um subconjunto aberto limitado e $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.*

1. Se $\Delta u \geq 0$, então

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u;$$

2. Se $\Delta u \leq 0$, então

$$\min_{\overline{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u.$$

2.4 COROLÁRIO. *(Princípio do máximo, forma fraca) Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um subconjunto aberto limitado e $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ harmônica em Ω. Então*

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u, \quad \min_{\overline{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u.$$

2.5 OBSERVAÇÃO. Se u é harmônica e se $|u(x)| \leq M$ para $x \in \partial\Omega$ segue do Corolário 2.4 que $|u(x)| \leq M$ para $x \in \Omega$. Em particular, se $u \equiv 0$ em $\partial\Omega$ então $u \equiv 0$ em $\overline{\Omega}$.

Demonstração do Teorema 2.3. Mostraremos (1.), a demonstração de (2.) é análoga. Consideremos

$$m = \max_{\partial\Omega} u\,,$$
$$M = \max_{\overline{\Omega}} u\,.$$

Suponha, por absurdo, que $m < M$. Então existe $x_0 \in \Omega$ tal que $u(x_0) = M$ e, ademais, vale $\nabla u(x_0) = 0$ e $\Delta u(x_0) \leq 0$. Seja $v \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ a função dada por

$$v(x) = u(x) + \varepsilon |x - x_0|^2,$$

em que $\varepsilon > 0$ é um número que determinaremos a seguir. Temos $v(x_0) = M$, e para $x \in \partial\Omega$, vale $v(x) \leq m + \varepsilon\delta(\Omega)^2$, em que $\delta(\Omega)$ é o *diâmetro* de Ω. Logo, se escolhermos $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon < (M - m)/\delta(\Omega)^2$, teremos $v(x) < M$. Tal escolha implica que existe $x_1 \in \Omega$ um ponto no qual a função v assume seu valor máximo. Mas $\Delta v(x_1) = \Delta u(x_1) + 2N\varepsilon \geq 2N\varepsilon > 0$, uma contradição. $\square$

O *problema de Dirichlet* para Ω consiste em, dada $u_0 : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ contínua, determinar $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ tal que

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } \Omega, \\ u = u_0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

2.6 DEFINIÇÃO. Um subconjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é dito um *aberto de Dirichlet* se o problema de Dirichlet tiver solução para toda u_0.

Note que o problema de Dirichlet admite no máximo uma solução, uma consequência do resultado enunciado na observação 2.5.

2.7 DIGRESSÃO. Sejam Ω um aberto de Dirichlet e $x \in \Omega$. O funcional

$$T : C(\partial\Omega) \to \mathbb{R},$$

que associa a cada $u_0 \in C(\partial\Omega)$ o valor $u(x)$, em que u é a solução do problema de Dirichlet com dado de fronteira u_0, está bem definido, é contínuo, pois $|T(u_0)| \leq \max |u_0|$, e é positivo. Pelo teorema de Riesz, existe uma medida de Borel regular μ_x sobre $\partial\Omega$ tal que

$$u(x) = T(u_0) = \int_{\partial\Omega} u_0(y)\, \mathrm{d}\mu_x(y),$$

e portanto a função u é reconstituída através de integração de seu valor de fronteira com relação a uma medida apropriada.

3 Identidades de Green

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um *aberto com fronteira regular*, como definido no texto “Cálculo Integral e o Teorema de Stokes", publicado na série Textuniversitários, no. 24, pela LF-Editorial em 2024. Sejam $\vec{\mathrm{n}}$ o campo unitário normal a $\partial\Omega$ e $\mathrm{d}\sigma$ a medida de superfície definida em $\partial\Omega$. Neste texto encontra-se a demonstração do *teorema da divergência: se $\vec{X}$ é um campo vetorial com coeficientes em $C^1(\bar{\Omega})$ vale*

$$\int_\Omega \operatorname{div}\vec{X}\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \langle \vec{X}(y), \vec{\mathrm{n}}(y)\rangle\,\mathrm{d}\sigma(y). \tag{1}$$

Sejam $u \in C^2(\overline{\Omega})$, $v \in C^1(\overline{\Omega})$. Aplicando o teorema da divergência para $\vec{X} = v\nabla u$ obtemos a *primeira identidade de Green*

$$\int_\Omega (v\Delta u + \langle \nabla v, \nabla u\rangle)\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial \vec{\mathrm{n}}}\,\mathrm{d}\sigma. \tag{2}$$

Assumindo agora que $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$, trocando u por v (2) e subtraindo as identidades obtemos a *segunda identidade de Green*

$$\int_\Omega (v\Delta u - u\Delta v)\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \left(v\frac{\partial u}{\partial \vec{\mathrm{n}}} - u\frac{\partial v}{\partial \vec{\mathrm{n}}}\right)\mathrm{d}\sigma. \tag{3}$$

Como consequência da primeira identidade de Green temos a seguinte proposição

3.1 PROPOSIÇÃO. *Seja $u \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ uma função harmônica em Ω.*

1. *Se $\partial u/\partial\vec{\mathrm{n}} = 0$ em $\partial\Omega$ então u é localmente constante em Ω;*
2. *Vale a seguinte identidade*

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \vec{\mathrm{n}}}\,\mathrm{d}\sigma = 0.$$

Demonstração. Ambos os ítens seguem da primeira identidade de Green (2). Para (1.) tome $u = v$ e para (2.) tome $v = 1$. □

4 A propriedade da média

Denotaremos a *esfera de raio $R > 0$ e centrada em $x_0 \in \mathbb{R}^N$* por $S_R(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^N\ |x - x_0| = R\}$ e a *bola aberta de raio $R > 0$ e centrada em $x_0 \in \mathbb{R}^N$* por $B_R(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^N\ |x - x_0| < R\}$. Note que $B_R(x_0)$ é um aberto com fronteira regular. A passagem a *coordenadas polares* em $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ é feita com as identidades

$$\begin{cases} x = ry,\ r = |x|,\ |y| = 1, \\ \mathrm{d}x = r^{N-1}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\sigma(y), \end{cases}$$

em que $\mathrm{d}\sigma$ é a medida de superfície em $S_1(0)$. Denotaremos a medida da esfera unitária em $\mathbb{R}^N$ por

$$\omega_N = |S_1(0)| = \int_{S_1(0)} \mathrm{d}\sigma.$$

Nosso objetivo agora é calcular ω_N e para isso introduzimos a *função gama*

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t, \quad x > 0.$$

Um simples cálculo[1] mostra que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. Ademais $\Gamma(1) = 1$, logo temos $\Gamma(n) = (n-1)!$ para $n \in \mathbb{N}$. Da identidade

$$\int_0^\infty e^{-t}t^{-1/2}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^\infty e^{-s^2}\,\mathrm{d}s,$$

segue que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. Agora

$$\begin{aligned} \pi^{N/2} &= \int_{\mathbb{R}^N} e^{-|x|^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^\infty \int_{S_1(0)} e^{-r^2}r^{N-1}\,\mathrm{d}\sigma(y)\,\mathrm{d}r \\ &= \omega_N \int_0^\infty e^{-r^2}r^{N-1}\,\mathrm{d}r \\ &= \frac{\omega_N}{2}\int_0^\infty e^{-s}s^{\frac{N-2}{2}}\mathrm{d}s \\ &= \frac{\omega_N}{2}\Gamma(N/2), \end{aligned}$$

logo

$$\omega_N = \frac{2\pi^{N/2}}{\Gamma(N/2)}.$$

[1] use $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}t^x = xt^{x-1}$ e integre por partes.

Assim, para $N = 2k$ temos $\Gamma(N/2) = (k-1)!$ e portanto

$$\omega_{2k} = \frac{2\pi^k}{(k-1)!}.$$

Por outro lado, para $N = 2k+1$ temos

$$\Gamma(N/2) = \Gamma(k+1/2) = \left(k - \frac{1}{2}\right)\left(k - \frac{3}{2}\right)\cdots\frac{1}{2}\Gamma(1/2) = \Gamma(1/2)\prod_{l=1}^{k}\left(k - \frac{2l-1}{2}\right),$$

portanto

$$\omega_{2k+1} = \frac{2^{k+1}\pi^k}{(2k-1)(2k-3)\cdots 1}.$$

Podemos também calcular o volume da bola

$$\begin{aligned} |B_R(x_0)| &= |B_R(0)| \\ &= \int_{B_R(0)} \mathrm{d}x \\ &= \int_0^R \int_{S_1(0)} r^{N-1}\,\mathrm{d}\sigma(y)\,\mathrm{d}r \\ &= \frac{R^N \omega_N}{N}. \end{aligned}$$

Aplicando o teorema da divergência (1), temos a identidade

$$N|B_R(0)| = \int_{S_R(0)} \langle y, y/R\rangle\,\mathrm{d}\sigma(y) = R|S_R(0)|,$$

o que implica $|S_R(x_0)| = \omega_N R^{N-1}$. Por fim, faremos uso constante do seguinte fato

$$\int_{S_R(0)} f(y)\,\mathrm{d}\sigma(y) = R^{N-1}\int_{S_1(0)} f(Rz)\,\mathrm{d}\sigma(z), \qquad f \in C(S_R(0)). \tag{4}$$

Para a demonstração da fórmula acima veja o exercício 8.

4.1 TEOREMA. (A PROPRIEDADE DA MÉDIA PARA FUNÇÕES HARMÔNICAS) *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um subconjunto aberto e u uma função harmônica em Ω. Se $B_R(x_0)$ tem fecho contido em Ω então*

$$u(x_0) = \frac{1}{|S_R(x_0)|}\int_{S_R(x_0)} u(y)\,\mathrm{d}\sigma(y).$$

4.2 OBSERVAÇÃO. Aplicando (4) no Teorema 4.1 obtemos

$$\begin{aligned} u(x_0) &= \frac{1}{\omega_N R^{N-1}} \int_{S_R(x_0)} u(y)\,\mathrm{d}\sigma(y) \\ &= \frac{1}{\omega_N R^{N-1}} \int_{S_R(0)} u(x_0+y)\,\mathrm{d}\sigma(y) \\ &= \frac{1}{\omega_N} \int_{S_1(0)} u(x_0+Rz)\,\mathrm{d}\sigma(z). \end{aligned}$$

Demonstração (do Teorema 4.1). Definimos

$$v(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{|x-x_0|^{N-2}}, & N \geq 3, \\ -\log|x-x_0|, & N = 2. \end{cases}$$

Um cálculo direto mostra que v é harmônica em $\mathbb{R}^N \setminus \{x_0\}$. Faremos a demonstração para o caso $N \geq 3$, o caso $N = 2$ tem demonstração análoga. Para $0 < \varepsilon < R$, seja $U_\varepsilon = B_R(x_0) \setminus \overline{B_\varepsilon(x_0)}$. Aplicando a segunda identidade de Green (3), temos

$$\int_{\partial U_\varepsilon} \left(u(y)\frac{\partial v}{\partial \vec{\mathrm{n}}}(y) - v(y)\frac{\partial u}{\partial \vec{\mathrm{n}}}(y) \right) \mathrm{d}\sigma(y) = 0.$$

Como v é constante em cada componente de $\partial U_\varepsilon = S_R(x_0) \cup S_\varepsilon(x_0)$, podemos aplicar a Proposição 3.1 e concluir

$$\int_{S_R(x_0)} u(y)\frac{\partial v}{\partial \vec{\mathrm{n}}}(y)\,\mathrm{d}\sigma(y) = \int_{S_\varepsilon(x_0)} u(y)\frac{\partial v}{\partial \vec{\mathrm{n}}}(y)\,\mathrm{d}\sigma(y).$$

Para $y \in S_R(x_0)$, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial \vec{\mathrm{n}}}(y) &= \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial v}{\partial y_j}(y)\frac{y_j - x_{0j}}{R} \\ &= \sum_{j=1}^{N} (2-N)|y-x_0|^{1-N}\frac{(y_j - x_{0j})^2}{|y-x_0|R} \\ &= (2-N)R^{1-N}, \end{aligned}$$

logo

$$(2-N)R^{1-N}\int_{S_R(x_0)} u(y)\,\mathrm{d}\sigma(y) = (2-N)\varepsilon^{1-N}\int_{S_\varepsilon(x_0)} u(y)\,\mathrm{d}\sigma(y),$$

e portanto

$$\frac{1}{\omega_N R^{N-1}}\int_{S_R(x_0)} u(y)\,\mathrm{d}\sigma(y) = \frac{1}{\omega_N \varepsilon^{N-1}}\int_{S_\varepsilon(x_0)} u(y)\,\mathrm{d}\sigma(y) \;\longrightarrow\; u(x_0),$$

quando $\varepsilon \longrightarrow 0$, pois u é contínua em x_0. De fato, para formalizar esta última afirmação seja $\eta > 0$ arbitrário e tomemos $\delta > 0$ tal que

$$|x - x_0| < \delta \implies |u(x) - u(x_0)| < \eta.$$

Certamente podemos escrever esta propriedade assumindo que a bola de centro x_0 e raio $\delta > 0$ está contida em Ω. Logo, se $0 < \varepsilon < \delta$,

$$\left|\frac{1}{\omega_N \varepsilon^{N-1}}\int_{S_\varepsilon(x_0)} u(y)\,\mathrm{d}\sigma(y) - u(x_0)\right| =$$

$$\left|\frac{1}{\omega_N \varepsilon^{N-1}}\int_{S_\varepsilon(x_0)} u(y)\,\mathrm{d}\sigma(y) - u(x_0)\frac{1}{\omega_N \varepsilon^{N-1}}\int_{S_\varepsilon(x_0)} \mathrm{d}\sigma(y)\right| \leq$$

$$\frac{1}{\omega_N \varepsilon^{N-1}}\int_{S_\varepsilon(x_0)} |u(y) - u(x_0)|\,\mathrm{d}\sigma(y) \leq \frac{1}{\omega_N \varepsilon^{N-1}}\int_{S_\varepsilon(x_0)} \eta\,\mathrm{d}\sigma(y) = \eta,$$

o que demonstra nossa afirmação. □

4.3 Corolário. (A propriedade da média volumétrica) *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um subconjunto aberto e u uma função harmônica em Ω. Se $B_R(x_0)$ tem fecho contido em Ω então*

$$u(x_0) = \frac{1}{|B_R(x_0)|}\int_{B_R(x_0)} u(x)\,\mathrm{d}x.$$

Demonstração. Para $0 \leq \rho \leq R$, temos

$$u(x_0) = \frac{1}{\omega_N}\int_{S_1(0)} u(x_0 + \rho y)\,\mathrm{d}\sigma(y),$$

logo

$$\int_0^R \rho^{N-1} u(x_0)\,\mathrm{d}\rho = \frac{1}{\omega_N}\int_0^R \int_{S_1(0)} u(x_0 + \rho y)\rho^{N-1}\,\mathrm{d}\sigma(y)\,\mathrm{d}\rho,$$

e portanto

$$u(x_0) = \frac{N}{R^N \omega_N} \int_{B_R(x_0)} u(x)\, \mathrm{d}x.$$

$\square$

4.4 COROLÁRIO. *(Princípio do máximo, forma forte) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um subconjunto aberto e conexo. Seja $u \in C^2(\Omega)$ harmônica. Suponha que $\sup u = a < \infty$. Se existir $x_0 \in \Omega$ tal que $u(x_0) = a$ então $u = a$ em Ω.*

Demonstração. Por hipótese o conjunto

$$A = \{x \in \Omega : \, u(x) = a\}$$

é não vazio. Como A é claramente fechado em Ω (por que?) e também como Ω é conexo, bastará mostrar que A é aberto em Ω. Seja então $x_* \in A$ e tomemos uma bola $B_r(x_*)$ com fecho contido em Ω. Como $a = \sup u$ temos, pela propriedade da média volumétrica,

$$\frac{N}{\omega_N R^N} \int_{B_r(x_*)} \underbrace{\{a - u(x)\}}_{\geq 0} \mathrm{d}x = 0,$$

de onde concluímos que $u(x) = a$ para $x \in B_r(x_*)$. A demonstração está completa. $\square$

Nosso objetivo agora é provar a recíproca do Teorema 4.1

4.5 TEOREMA. *Seja $u \in C(\Omega)$ e suponha que para cada $x_0 \in \Omega$ temos*

$$u(x_0) = \frac{1}{R^{N-1} \omega_N} \int_{S_R(x_0)} u(y)\, \mathrm{d}\sigma(y),$$

sempre que $0 < R < \mathrm{d}(x_0, \partial\Omega)$ (distância de x_0 a $\partial\Omega$). Então $u \in C^\infty(\Omega)$ e u é uma função harmônica em Ω.

Antes de apresentar a demonstração do Teorema 4.5, precisamos desenvolver algumas ferramentas

4.6 DIGRESSÃO. (FUNÇÕES TESTE) A função

$$h(t) = \begin{cases} e^{-1/t}, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

é de classe C^∞ em $\mathbb{R}$, logo a função $g(t) = h(1-t)h(1+t)$ é de classe C^∞, se anula fora do intervalo $[-1,1]$ e vale $g(0) > 0$. Para $x \in \mathbb{R}^N$, definimos

$$\varphi(x) = Ag(|x|^2), \quad \text{com } A = \left(\int_{\mathbb{R}^N} g(|y|^2)\,\mathrm{d}y \right)^{-1}.$$

Segue que φ é de classe C^∞ em $\mathbb{R}^N$, se anula fora de $B_1(0)$, vale $\int \varphi = 1$ e φ é *radial*, ou seja, o valor $\varphi(x)$ só depende de $|x|$. Para cada $\varepsilon > 0$, definimos

$$\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^N}\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

de modo que φ_ε é de classe C^∞ em $\mathbb{R}^N$, se anula fora de $B_\varepsilon(0)$, vale $\int \varphi_\varepsilon = 1$ e φ_ε é radial.

Demonstração (do Teorema 4.5) Para cada $\varepsilon > 0$, considere o conjunto

$$\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega : \ \mathrm{d}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$$

e a função

$$U_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi_\varepsilon(x-y)u(y)\,\mathrm{d}y,$$

definida para $x \in \Omega_\varepsilon$. Note que, na integral, a variável y é restrita à $B_\varepsilon(x)$, cujo fecho está contido em Ω. Isto torna U_ε bem definida e, de fato, de classe C^∞ em Ω_ε (derivação sob o sinal de integração). Mostraremos abaixo que para $x \in \Omega_\varepsilon$, tem-se $U_\varepsilon(x) = u(x)$, o que pela arbitrariedade de $\varepsilon > 0$ permite concluir que u

é de classe C^∞. De fato

$$\begin{aligned}
U_\varepsilon(x) &= \frac{1}{\varepsilon^N}\int_{\mathbb{R}^N}\varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)u(y)\,\mathrm{d}y\\
&= \int_{B_1(0)} u(x-\varepsilon y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y\\
&= \int_{S_1(0)}\int_0^1 u(x-\varepsilon r\dot{y})\varphi(r\dot{y})r^{N-1}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\sigma(\dot{y})\\
&= A\int_0^1 r^{N-1}g(r^2)\underbrace{\left(\int_{S_1(0)} u(x-\varepsilon r\dot{y})\,\mathrm{d}\sigma(\dot{y})\right)}_{=\omega_N u(x)}\mathrm{d}r\\
&= Au(x)\int_{B_1(0)} g(|x|^2)\,\mathrm{d}x\\
&= u(x), \qquad x\in\Omega_\varepsilon.
\end{aligned}$$

Resta mostrar que a função u é harmônica e para isto faremos uso do seguinte lema:

4.7 LEMA. *Sejam* $v\in C^2(\Omega)$, $x_0\in\Omega$ *e para* $0<r<\mathrm{d}(x_0,\partial\Omega)$ *defina*

$$\lambda(r) = \int_{S_1(0)} v(x_0+ry)\,\mathrm{d}\sigma(y).$$

Então

$$\lambda'(r) = r^{1-N}\int_{S_r(x_0)}\frac{\partial v}{\partial\vec{\mathrm{n}}}(z)\,\mathrm{d}\sigma(z).$$

Assumindo a validade do lema por um momento vamos concluir a demonstração do teorema. Aplicando o Lema 4.7 com u substituindo v e observando que então λ é constante seguirá que

$$\int_{S_r(x_0)}\frac{\partial u}{\partial\vec{\mathrm{n}}}\,\mathrm{d}\sigma(y) = \int_{B_r(x_0)}\Delta u\,\mathrm{d}x,$$

quaisquer que sejam $x_0\in\Omega$ e $0<r<\mathrm{d}(x_0,\partial\Omega)$. Assim $\Delta u = 0$ em Ω e portanto resta agora demonstrar o Lema 4.7.

Demonstração. (do Lema 4.7) Um cálculo direto fornece

$$\begin{aligned}
\lambda'(r) &= \int_{S_1(0)} \langle \nabla v(x_0 + ry), y \rangle \, \mathrm{d}\sigma(y) \\
&= r^{1-N} \int_{S_r(0)} \langle \nabla v(x_0 + z), z/r \rangle \, \mathrm{d}\sigma(z) \\
&= r^{1-N} \int_{S_r(x_0)} \langle \nabla v(y), (y - x_0)/r \rangle \, \mathrm{d}\sigma(y),
\end{aligned}$$

de onde segue a conclusão. □

4.8 COROLÁRIO. *Toda função harmônica é de classe C^∞.*

4.9 COROLÁRIO. *Seja $\{u_n\}$ uma sequência de funções harmônicas em Ω. Se $u_n \longrightarrow u$ uniformemente sobre os compactos de Ω, então u é uma função harmônica.*

Demonstração. A função u é contínua pois é limite uniforme sobre os compactos de Ω de uma sequência de funções contínuas. Para provar que u é harmônica basta então mostrar que u satisfaz a propriedade da média. Seja então $B_R(x_0)$ uma bola com fecho contido em Ω. Como cada u_n é harmônica temos

$$u_n(x_0) = \frac{1}{\omega_N R^{N-1}} \int_{S_R(x_0)} u_n(y) \, \mathrm{d}\sigma(y).$$

Passando ao limite estas igualdades quando $n \to \infty$ segue a propriedade desejada, uma vez que a convergência uniforme sobre os compactos de Ω da sequência $\{u_n\}$ implica

$$\frac{1}{\omega_N R^{N-1}} \int_{S_R(x_0)} u_n(y) \, \mathrm{d}\sigma(y) \longrightarrow \frac{1}{\omega_N R^{N-1}} \int_{S_R 6(x_0)} u(y) \, \mathrm{d}\sigma(y).$$

□

4.10 COROLÁRIO. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um subconjunto aberto e limitado. Suponha que o problema de Dirichlet para Ω possui solução sempre que o valor na fronteira for a restrição de um polinômio em $\mathbb{R}^N$. Então Ω é um aberto de Dirichlet.*

Demonstração. Seja $u_0 \in C(\partial\Omega)$. Pelo teorema de Weierstrass existe uma sequência $\{p_n\}$ de polinômios em $\mathbb{R}^N$ tal que $p_n \to u_0$ uniformemente em $\partial\Omega$.

Para cada n existe $u_n \in C^\infty(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ harmônica em Ω satisfazendo $u_n = p_n$ em $\partial\Omega$. Pelo Corolário 2.4

$$\max_{\bar{\Omega}} |u_m - u_n| = \max_{\partial\Omega} |u_m - u_n| = \max_{\partial\Omega} |p_m - p_n| \longrightarrow 0 \text{ quando } m, n \to \infty.$$

Pelo critério de Cauchy para convergência uniforme, existe $u \in C(\bar{\Omega})$ tal que $u_n \to u$ uniformente em Ω. Em particular $u = u_0$ em $\partial\Omega$. Finalmente, pelo corolário anterior u é harmônica, e portanto de classe C^∞ em Ω. $\square$

Vimos que toda solução de classe C^2 da equação $\Delta u = 0$ é automaticamente de classe C^∞. Na realidade podemos dizer mais: toda função harmônica é de fato real-analítica. Lembremos que se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é aberto e se $f \in C^\infty(\Omega)$ então f é *real-analítica* se para cada ponto $x_0 \in \Omega$ a série de Taylor de f centrada em x_0 converge para f, uniforme e absolutamente, em uma vizinhança de x_0. Uma propriedade equivalente é a seguinte: $f \in C^\infty(\Omega)$ é real-analítica se, e somente se, para toda bola fechada B contida em Ω existem constantes $C > 0$ e $h > 0$ tais que

$$\sup_B |\partial^\alpha u| \leq C h^{|\alpha|} |\alpha|!, \quad \alpha \in \mathbb{Z}_+^N. \tag{5}$$

4.11 TEOREMA. *Toda função harmônica u em um aberto Ω de $\mathbb{R}^N$ é real-analítica em Ω.*

Demonstração. Como u é de classe C^∞ é fácil então ver que $\partial^\alpha u$ também é harmônica, qualquer que seja $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$. Sejam $x_0 \in \Omega$ e $R > 0$ tal que $B_R(x_0)$ tem fecho contido em Ω. Se $j \in \{1, \ldots, N\}$ aplicando a propriedade da média volumétrica para $\partial u / \partial x_j$ obtemos

$$\frac{\partial u}{\partial x_j}(x_0) = \frac{N}{\omega_N R^N} \int_{B_R(x_0)} \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) \mathrm{d}x.$$

Seja $\vec{X}(x) = (0, \ldots, 0, u(x), 0, \ldots, 0)$, onde $u(x)$ aparece na j-ésima posição. Então div $\vec{X}(x) = (\partial u / \partial x_j)(x)$ e portanto, pelo teorema da divergência,

$$\frac{\partial u}{\partial x_j}(x_0) = \frac{N}{\omega_N R^N} \int_{S_r(x_0)} \langle \vec{X}(y), (y - x_0)/R \rangle \, \mathrm{d}\sigma(y).$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x_j}(x_0) \right| \leq \frac{N}{R} \sup_{S_R(x_0)} |u| \, .$$

Sejam $B \subset B' \subset \Omega$ bolas fechadas com raios r e r' respectivamente, $r < r'$. Aplicando a desigualdade precedente para um ponto arbitrário $x_0 \in B$ e $R = r' - r$ obtemos

$$\sup_{B} \left| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right| \leq \frac{N}{r' - r} \sup_{B'} |u|, \quad j = 1, \ldots, N. \tag{6}$$

Estamos agora em posição para concluir a demonstração do teorema. Fixemos $B_r(x_*)$ uma bola com fecho contido em Ω e seja $d > 0$ tal que a bola $B_{r+d}(x_*)$ também tenha fecho contido em Ω. Seja α um multi-índice e aplique (6) iteradamente, para as bolas $B \doteq B_{r+(i-1)d/|\alpha|}(x_*) \subset B' \doteq B_{r+id/|\alpha|}(x_*)$, $i = 1, \ldots, |\alpha|$. Obtemos

$$\sup_{B_r(x_*)} |D^\alpha u| \leq \frac{N^{|\alpha|}|\alpha|^{|\alpha|}}{d^{|\alpha|}} \sup_{B_{r+d}(x_*)} |u| \, .$$

Uma vez que $n^n < e^n n!$ para todo $n \in \mathbb{N}$ provamos que u satisfaz (5) e portanto u é real-analítica em Ω. A demonstração está completa. $\square$

4.12 COROLÁRIO. (PRINCÍPIO DA CONTINUAÇÃO ÚNICA PARA FUNÇÕES HARMÔNICAS) *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e conexo e u harmônica em Ω. Se u se anula de ordem infinito em um ponto de Ω então u se anula identicamente. Em particular, se u se anula em um aberto não vazio de Ω então u se anula identicamente.*

5 Potencial newtoniano

O *potencial newtoniano* é dado pela expressão

$$\mathrm{E}(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{(N-2)\omega_N |x|^{N-2}}, & N \geq 3, \\ \dfrac{1}{2\pi} \log |x|, & N = 2. \end{cases}$$

Demonstra-se que E é uma função harmônica em $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ e pertence a $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$. Para esta última informação basta mostrar que E é integrável em $B_1(0)$ e isto segue facilmente se escrevermos a integral de $-E(x)$ sobre $B_1(0)$ em coordenadas polares.

5.1 TEOREMA. (TERCEIRA IDENTIDADE DE GREEN) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto com fronteira regular. Seja $u \in C^2(\overline{\Omega})$. Para todo $x \in \Omega$ vale*

$$u(x) = \int_\Omega \mathrm{E}(x-y)\Delta u(y)\,\mathrm{d}y + \int_{\partial\Omega} \left(u(y)\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial \vec{\mathrm{n}}_y}(x-y) - \mathrm{E}(x-y)\frac{\partial u}{\partial \vec{\mathrm{n}}}(y) \right) \mathrm{d}\sigma(y).$$

Demonstração. Fixe $x \in \Omega$. Para $0 < \varepsilon < \mathrm{d}(x, \partial\Omega)$, seja $U_\varepsilon = \Omega \setminus B_\varepsilon(x)$. Temos

$$\begin{aligned}
\int_{U_\varepsilon} \mathrm{E}(x-y)\Delta u(y)\,\mathrm{d}y = \\
&\int_{\partial\Omega} \left(\mathrm{E}(x-y)\frac{\partial u}{\partial \vec{\mathrm{n}}}(y) - u(y)\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial \vec{\mathrm{n}}_y}(x-y) \right) \mathrm{d}\sigma(y) \\
&\quad - \int_{S_\varepsilon(x)} \left(\mathrm{E}(x-y)\frac{\partial u}{\partial \vec{\mathrm{n}}_\varepsilon}(y) - u(y)\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial \vec{\mathrm{n}}_\varepsilon}(x-y) \right) \mathrm{d}\sigma(y).
\end{aligned}$$

Usando $\nabla \mathrm{E}(x) = x/\big(\omega_N |x|^N\big)$ qualquer que seja $N \geq 2$, podemos passar ao limite

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{U_\varepsilon} \mathrm{E}(x-y)\Delta u(y)\,\mathrm{d}y = \int_\Omega \mathrm{E}(x-y)\Delta u(y)\,\mathrm{d}y, \\
&\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{S_\varepsilon(x)} \mathrm{E}(x-y)\frac{\partial u}{\partial \vec{\mathrm{n}}_\varepsilon}(y)\,\mathrm{d}\sigma(y) = 0, \\
&\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{S_\varepsilon(x)} u(y)\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial \vec{\mathrm{n}}_\varepsilon}(x-y)\,\mathrm{d}\sigma(y) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\omega_N \varepsilon^{N-1}} \int_{S_\varepsilon(x)} u(y)\,\mathrm{d}\sigma(y) = u(x),
\end{aligned}$$

e segue a tese. □

5.2 COROLÁRIO. *Seja $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$ uma função com suporte compacto, isto é, u se anula no complementar de um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^N$. Então*

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \mathrm{E}(x-y)\Delta u(y)\,\mathrm{d}y, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

6 Função de Green

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um subconjunto aberto e suponha que para cada $x \in \Omega$ o seguinte problema de Dirichlet tenha solução

$$\begin{cases} \Delta v_x = 0, & \text{em } \Omega, \\ v_x = \mathrm{E}(x - \,\cdot\,), & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{7}$$

com $v_x \in C^2(\overline{\Omega})$. A *função de Green para* Ω é dada por

$$\mathrm{G}(x,y) = \mathrm{E}(x-y) - v_x(y), \quad (x,y) \in (\Omega \times \overline{\Omega}) \setminus \{(z,z) : z \in \Omega\}.$$

Como função de y, a função $\mathrm{G}(x,\,\cdot\,)$ é harmônica para $y \neq x$ e $\mathrm{G}(x,\,\cdot\,) = 0$ em $\partial\Omega$.

Suponha agora que Ω seja um aberto com fronteira regular. Seja $u \in C^2(\overline{\Omega})$. Aplicando o Teorema 5.1 (terceira identidade de Green), temos

$$\begin{aligned} u(x) = &\int_\Omega \mathrm{G}(x,y)\Delta u(y)\,\mathrm{d}y + \int_\Omega v_x(y)\Delta u(y)\,\mathrm{d}y \\ &+ \int_{\partial\Omega} \left(u(y)\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial \vec{\mathrm{n}}_y}(x,y) + u(y)\frac{\partial v_x}{\partial \vec{\mathrm{n}}_y}(y) - v_x(y)\frac{\partial u}{\partial \vec{\mathrm{n}}_y}(y) \right) \mathrm{d}\sigma(y). \end{aligned}$$

Por outro lado, a segunda identidade de Green (3) nos dá

$$\int_{\partial\Omega} \left(u(y)\frac{\partial v_x}{\partial \vec{\mathrm{n}}_y}(y) - v_x(y)\frac{\partial u}{\partial \vec{\mathrm{n}}_y}(y) \right) \mathrm{d}\sigma(y) = -\int_\Omega v_x(y)\Delta u(y)\,\mathrm{d}y.$$

Portanto, temos a seguinte identidade (denominada *fórmula de Poisson*)

$$u(x) = \int_\Omega \mathrm{G}(x,y)\Delta u(y)\,\mathrm{d}y + \int_{\partial\Omega} u(y)\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial \vec{\mathrm{n}}_y}(x,y)\,\mathrm{d}\sigma(y).$$

Em suma, temos o seguinte teorema

6.1 TEOREMA. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto um aberto com fronteira regular. Se $u \in C^2(\overline{\Omega})$ é solução do problema*

$$\begin{cases} \Delta u = f, & \textit{em } \Omega, \\ u = u_0, & \textit{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

em que $f \in C(\overline{\Omega})$ e $u_0 \in C(\partial\Omega)$, então

$$u(x) = \int_\Omega \mathrm{G}(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y + \int_{\partial\Omega} u_0(y)\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial \vec{\mathrm{n}}_y}(x,y)\,\mathrm{d}\sigma(y).$$

6.2 EXEMPLO. (FUNÇÃO DE GREEN PARA A BOLA UNITÁRIA) Consideremos $\Omega = B_1(0)$, com $N \geq 3$. Ou seja, temos

$$\mathrm{E}(x-y) = \frac{1}{\omega_N(2-N)}|x-y|^{2-N}, \quad x \neq y.$$

Seja $x \in B_1(0) \setminus \{0\}$. A função dada por $v_x(y) = |x|^{2-N}\mathrm{E}(x^* - y)$ é harmônica em $B_1(0)$ quando $x^* \notin \overline{B_1(0)}$. Tomemos x^* o simétrico de x com relação a $S_1(0)$, ou seja, tomemos $x^* = x/|x|^2$. A propriedade fundamental de x^* é

$$|x - y| = |x||x^* - y|, \quad \text{para } |y| = 1.$$

De fato

$$\langle x^* - y, x^* - y\rangle = \frac{1}{|x|^2} - \frac{2}{|x|^2}\langle x, y\rangle + |y|^2,$$

logo

$$|x|^2|x^* - y|^2 = 1 - 2\langle x, y\rangle + |x|^2 = |x - y|^2.$$

Portanto temos $v_x(y) = \mathrm{E}(x-y)$ se $|y| = 1$ e $x \neq 0$. Quando $x = 0$, temos $\mathrm{E}(0-y) = 1/(\omega_N(2-N))$ para $|y| = 1$. Logo podemos tomar $v_0(y) = 1/(\omega_N(2-N))$, $\forall y \in \overline{B_1(0)}$.

Conclusão Para cada $x \in \Omega = B_1(0)$ resolvemos o problema de Dirichlet (7) e, portanto, a função de Green para $B_1(0)$ é dada por

$$\mathrm{G}(x, y) = \begin{cases} \mathrm{E}(x - y) - |x|^{2-N}\mathrm{E}(x^* - y), & x \neq 0, \\ \mathrm{E}(y) - \dfrac{1}{\omega_N(2 - N)}, & x = 0, \end{cases} \tag{8}$$

em que $x^* = x/|x|^2$.

6.3 OBSERVAÇÃO. Um raciocínio análogo ao do Exemplo 6.2 permite concluir que a função de Green para $B_1(0)$ quando $N = 2$ é

$$\mathrm{G}(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\log|x - y| - \dfrac{1}{2\pi}\log|x||x^* - y|, & x \neq 0, \\ \dfrac{1}{2\pi}\log|y|, & x = 0, \end{cases} \tag{9}$$

em que $x^* = x/|x|^2$.

6.4 EXEMPLO. (NÚCLEO DE POISSON PARA A BOLA UNITÁRIA) Dando continuidade ao estudado no Exemplo 6.2, temos para $x \neq 0$

$$\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial \vec{\mathrm{n}}_y}(x, y) = \frac{1}{\omega_N}\left\langle -\frac{x - y}{|x - y|^N} + \frac{|x|^{2-N}(x^* - y)}{|x^* - y|^N}, y\right\rangle,$$

e usando o fato

$$\frac{|x|^{-N}}{|x^* - y|^N} = \frac{1}{|x - y|^N},$$

segue

$$\mathrm{K}(x,y) = \frac{\partial \mathrm{G}}{\partial \vec{\mathrm{n}}_y}(x,y) = \frac{1}{\omega_N |x-y|^N}\langle y - x + x - |x|^2 y, y\rangle = \frac{1-|x|^2}{\omega_N|x-y|^N} \quad (10)$$

É um exercício verificar que a fórmula (10) também vale quando $N = 2$. A função K definida pela fórmula (10) é denominada *núcleo de Poisson para* $B_1(0)$. O núcleo de Poisson possui as seguintes propriedades (exercício)

1. Quaisquer que sejam $x \in B_1(0)$ e $y \in S_1(0)$, temos $\mathrm{K}(x,y) > 0$;
2. Para todo $x \in B_1(0)$, vale
$$\int_{S_1(0)} \mathrm{K}(x,y)\,\mathrm{d}\sigma(y) = 1;$$
3. Quaisquer que sejam $x \in B_1(0)$ e $y \in S_1(0)$, temos $\Delta_x \mathrm{K}(x,y) = 0$ (exercício 5);
4. Se $u \in \mathcal{C}^2(\overline{B_1(0)})$ e $\Delta u = 0$ em $B_1(0)$, então
$$u(x) = \int_{S_1(0)} \mathrm{K}(x,y)u(y)\,\mathrm{d}\sigma(y), \quad x \in B_1(0).$$

6.5 TEOREMA. (SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE DIRICHLET PARA A BOLA UNITÁRIA) *Seja* $u_0 \in C(S_1(0))$. *A função dada por*

$$u(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_{S_1(0)} \mathrm{K}(x,y)u_0(y)\,\mathrm{d}\sigma(y), & x \in B_1(0), \\ u_0(x), & x \in S_1(0), \end{cases}$$

é harmônica em $B_1(0)$ *e contínua em* $\overline{B_1(0)}$.

Demonstração. Derivando sob o sinal de integração, a propriedade (3.) do núcleo de Poisson implica que u é harmônica em $B_1(0)$. Só precisamos então mostrar que u é contínua em $y_0 \in S_1(0)$, arbitrário. Ou seja, temos que mostrar

$$\lim_{B_1(0)\ni x \to y_0} \int_{S_1(0)} \mathrm{K}(x,y)u_0(y)\,\mathrm{d}\sigma(y) = u_0(y_0). \quad (11)$$

Aplicando a propriedade (2.) do núcleo de Poisson, temos

$$\int_{S_1(0)} \mathrm{K}(x,y)u_0(y)\,\mathrm{d}\sigma(y) - u_0(y_0) = \int_{S_1(0)} \mathrm{K}(x,y)(u_0(y)-u_0(y_0))\,\mathrm{d}\sigma(y).$$

Escrevamos esta última integral como $I_1 + I_2$ em que

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{V_0} \mathrm{K}(x,y)(u_0(y)-u_0(y_0))\,\mathrm{d}\sigma(y),\\ I_2 &= \int_{S_1(0)\setminus V_0} \mathrm{K}(x,y)(u_0(y)-u_0(y_0))\,\mathrm{d}\sigma(y), \end{aligned}$$

e V_0 é uma vizinhança de y_0 em $S_1(0)$ que escolheremos a seguir. Seja $\varepsilon > 0$. Tomemos V_0 tal que se $y \in V_0$, então $|u_0(y) - u_0(y_0)| < \varepsilon/2$. Aplicando as propriedades (1.) e (2.) do núcleo de Poisson, temos

$$|I_1| \leq \frac{\varepsilon}{2}\int_{S_1(0)} \mathrm{K}(x,y)\,\mathrm{d}\sigma(y) = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Para a outra parcela, temos

$$|I_2| \leq 2\sup|u_0| \int_{S_1(0)\setminus V_0} \mathrm{K}(x,y)\,\mathrm{d}\sigma(y),$$

mas

$$\lim_{B_1(0)\ni x\to y_0} \int_{S_1(0)\setminus V_0} \mathrm{K}(x,y)\,\mathrm{d}\sigma(y) = 0,$$

uma vez que para x próximo de y_0 o denominador em (10) será limitado inferiormente e o numerador em (10) tenderá a zero. Portanto, existe $\delta > 0$ tal que $|I_2| \leq \varepsilon/2$ se $x \in B_1(0) \cap B_\delta(y_0)$. $\square$

6.6 OBSERVAÇÃO. Seja $u_0 \in C(S_R(x_0))$. Então a função

$$S_1(0) \ni y \mapsto u_0(x_0 + Ry) \in \mathbb{C},$$

é contínua em $S_1(0)$. Seja $U \in C(\overline{B_1(0)})$ harmônica em $B_1(0)$ tal que $U(y) = u_0(x_0 + Ry)$ para $y \in S_1(0)$. Defina $u(x) = U((x-x_0)/R)$, $x \in \overline{B_R(x_0)}$. Então u é harmônica em $B_R(x_0)$, contínua em $\overline{B_R(x_0)}$ e coincide com u_0 em $S_R(x_0)$.

Se $x \in B_R(x_0)$, temos

$$\begin{aligned}
u(x) &= \int_{S_1(0)} \mathrm{K}\left(\frac{x-x_0}{R}, y\right) u_0(x_0+Ry)\, \mathrm{d}\sigma(y) \\
&= \frac{1}{R^{N-1}} \int_{S_R(0)} \mathrm{K}\left(\frac{x-x_0}{R}, \frac{z}{R}\right) u_0(x_0+z)\, \mathrm{d}\sigma(z) \\
&= \frac{1}{R^{N-1}} \int_{S_R(x_0)} \mathrm{K}\left(\frac{x-x_0}{R}, \frac{y-x_0}{R}\right) u_0(y)\, \mathrm{d}\sigma(y) \\
&= \int_{S_R(x_0)} \mathrm{K}_{R,x_0}(x,y) u_0(y)\, \mathrm{d}\sigma(y),
\end{aligned}$$

em que

$$\mathrm{K}_{R,x_0}(x,y) = \frac{1}{\omega_N R} \frac{R^2 - |x-x_0|^2}{|x-y|^N}.$$

A função K_{R,x_0} é denominada *núcleo de Poisson para* $B_R(x_0)$.

A seguir, apresentaremos algumas consequências do Teorema 6.5.

6.7 TEOREMA. (SINGULARIDADES REMOVÍVEIS) *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um subconjunto aberto e seja* $x_0 \in \Omega$. *Se* u *é uma função harmônica em* $\Omega \setminus \{x_0\}$ *tal que*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{u(x)}{\mathrm{E}(x-x_0)} = 0,$$

então existe $\tilde{u}$ *harmônica em* Ω *tal que* $\tilde{u} = u$ *em* $\Omega \setminus \{x_0\}$.

Demonstração. Suponha que $N \geq 3$ (a demonstração para $N = 2$ é análoga). Podemos supor que u é uma função real. Seja $\delta > 0$ tal que $B_\delta(x_0) \Subset \Omega$. Seja v a função harmônica em $B_\delta(x_0)$ tal que $v = u$ em $S_\delta(x_0)$. Seja $w = u - v$ em $\overline{B_\delta(x_0)} \setminus \{x_0\}$ (note que w é real e é harmônica em $B_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$). É suficiente mostrar $w = 0$. A hipótese sobre u garante a validade do seguinte limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{w(x)}{|x-x_0|^{2-N} - \delta^{2-N}} = 0.$$

Logo, dado $\varepsilon > 0$, tome $0 < r < \delta$ tal que

$$|w(x)| \leq \varepsilon(|x-x_0|^{2-N} - \delta^{2-N}), \qquad \forall x \in \overline{B_r(x_0)} \setminus \{x_0\}.$$

Observe que a função $x \mapsto \varepsilon(|x - x_0|^{2-N} - \delta^{2-N})$ é positiva e harmônica em $B_\delta(x_0) \setminus \overline{B_r(x_0)}$, vale zero em $S_\delta(x_0)$ e é limitante superior de $|w(x)|$ em $S_r(x_0)$. Aplicando o Corolário 2.4 (princípio do máximo) para $\pm w(x) - \varepsilon(|x - x_0|^{2-N} - \delta^{2-N})$ em $B_\delta(x_0) \setminus \overline{B_r(x_0)}$, podemos concluir

$$|w(x)| \leq \varepsilon(|x - x_0|^{2-N} - \delta^{2-N}), \qquad \forall x \in \overline{B_\delta(x_0)} \setminus \{x_0\}.$$

Como ε é arbitrário, segue que $w = 0$. $\square$

6.8 EXEMPLO. (ZAREMBA) Seja $\Omega = B_1(0) \setminus \{0\}$. E considere o seguinte problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } \Omega, \\ u(x) = 0 & \text{em } S_1(0), \\ u(0) = 1. \end{cases}$$

Suponha que o problema acima admita uma solucão $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Como u é limitada em Ω, podemos aplicar o Teorema 6.7 (singularidades removíveis) e concluir que u é harmônica em $B_1(0)$. Logo, pelo Corolário 2.4 (princípio do máximo), temos $u = 0$ em $\overline{B_1(0)}$, uma contradição. Portanto, o problema de Dirichlet acima não admite solução em $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

Para o que segue, denotaremos

$$\mathrm{H} = \{x \in \mathbb{R}^N : \, x = (x_1, \ldots, x_N), \; x_N > 0\}.$$

6.9 TEOREMA. (PRINCÍPIO DA REFLEXÃO DE SCHWARZ) *Seja* $u \in C(\overline{\mathrm{H}})$ *uma função harmônica em* H. *Suponha que* $u = 0$ *em* $\partial\mathrm{H}$ *e defina*

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x), & x \in \overline{\mathrm{H}}, \\ -u(x_1, \ldots, x_{N-1}, -x_N), & x \notin \overline{\mathrm{H}}. \end{cases}$$

Então $\tilde{u}$ *é harmônica em* $\mathbb{R}^N$.

Demonstração. A função $\tilde{u}$ é contínua e harmônica em $\mathbb{R}^N \setminus \partial\mathrm{H}$. Temos que mostrar que $\tilde{u}$ é harmônica em uma vizinhança de um ponto arbitrário de $\partial\mathrm{H}$. Sejam $x_0 \in \partial\mathrm{H}$ e $\delta > 0$ arbitrários. Seja $v \in C(\overline{B_\delta(x_0)})$ a função harmônica em $B_\delta(x_0)$ tal que $v = \tilde{u}$ em $S_\delta(x_0)$. Mostremos que $v = 0$ em $B_\delta(x_0) \cap \partial\mathrm{H}$.

De fato, pondo $v^\sharp(x) = -v(x_1, \dots, x_{N-1}, -x_N)$, $x \in \overline{B_\delta(x_0)}$, temos que $v^\sharp$ é harmônica em $B_\delta(x_0)$ e para $x \in S_\delta(x_0)$ temos

$$v^\sharp(x) = -v(x_1, \dots, x_{N-1}, -x_N) = -\tilde{u}(x_1, \dots, x_{N-1}, -x_N) = \tilde{u}(x) = v(x),$$

logo $v^\sharp = v$ em $\overline{B_\delta(x_0)}$, *i.e.*, a função v é ímpar em x_N, e portanto $v = 0$ quando $x_N = 0$. Considere $w = \tilde{u} - v$. A função w é harmônica em $B_\delta(x_0) \cap \mathrm{H}$, contínua em $\overline{B_\delta(x_0) \cap \mathrm{H}}$ e vale zero na fronteira deste conjunto, portanto $\tilde{u} = v$ em $\overline{B_\delta(x_0) \cap \mathrm{H}}$. Analogamente, temos $\tilde{u} = v$ em $\overline{B_\delta(x_0)} \cap \{x \in \mathbb{R}^N \ x_N \leq 0\}$. □

7 A desigualdade de Harnack

7.1 TEOREMA. *Seja u uma função harmônica em $B_R(x_0)$ tal que $u \geq 0$ e seja $x \in B_R(x_0)$. Então*

$$\left(\frac{R}{R + |x - x_0|}\right)^{N-2} \frac{R - |x - x_0|}{R + |x - x_0|} u(x_0) \leq u(x) \leq \left(\frac{R}{R - |x - x_0|}\right)^{N-2} \frac{R + |x - x_0|}{R - |x - x_0|} u(x_0).$$

Demonstração. Tome $|x - x_0| < \rho < R$. Temos

$$u(x) = \frac{\rho^2 - |x - x_0|^2}{\rho \omega_N} \int_{S_\rho(x_0)} \frac{u(y)}{|y - x|^N} \, \mathrm{d}\sigma(y),$$

e $\rho - |x - x_0| \leq |y - x| \leq \rho + |x - x_0|$, para $y \in S_\rho(x_0)$. Como $u \geq 0$, temos

$$\frac{\rho^2 - |x - x_0|^2}{\rho \omega_N} \frac{1}{(\rho + |x - x_0|)^N} \int_{S_\rho(x_0)} u(y) \, \mathrm{d}\sigma(y) \leq u(x) \leq$$
$$\frac{\rho^2 - |x - x_0|^2}{\rho \omega_N} \frac{1}{(\rho - |x - x_0|)^N} \int_{S_\rho(x_0)} u(y) \, \mathrm{d}\sigma(y),$$

então basta usar

$$\int_{S_\rho(x_0)} u(y) \, \mathrm{d}\sigma(y) = \omega_N \rho^{N-1} u(x_0),$$

simplificar e fazer $\rho \longrightarrow R$. □

Um maneira mais simples de se enunciar o resultado precedente é a seguinte:

7.2 COROLÁRIO. *Seja u uma função harmônica em $B_R(x_0)$ tal que $u \geq 0$ e seja $0 < r < R$. Então*

$$\left(\frac{R-r}{R+r}\right)^N u(x') \leq u(x) \leq \left(\frac{R+r}{R-r}\right)^N u(x'), \qquad \forall x, x' \in \overline{B_r(x_0)}.$$

Demonstração. Aplicando o Teorema 7.1, temos

$$\left(\frac{R}{R+r}\right)^{N-2} \frac{R-r}{R+r} u(x_0) \leq u(x) \leq \left(\frac{R}{R-r}\right)^{N-2} \frac{R+r}{R-r} u(x_0),$$

para $x \in \overline{B_r(x_0)}$ já que neste caso $|x - x_0| \leq r$. Agora, se $u = 0$ em $B_R(x_0)$, então a desigualdade é óbvia. Caso contrário, temos $u > 0$ (Corolário 4.4) e basta escrever a desigualdade acima para $u(x')$ e fazer uma divisão. $\square$

7.3 TEOREMA. (DESIGUALDADE DE HARNACK) *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto conexo e $K \subset \mathbb{R}^N$ compacto. Existe uma constante $C > 0$, tal que*

$$\max_K u \leq C \min_K u, \tag{12}$$

qualquer que seja u harmônica em Ω, $u \geq 0$.

Demonstração. Antes de embarcar na demonstração propriamente dita, vamos mostrar a existência de $K' \subset \Omega$ compacto e conexo, $K \subset K'$. De fato, sejam $B_1, \ldots, B_n \subset \Omega$ bolas fechadas tais que $K \subset \bigcup_{j=1}^n B_j$. Como Ω é conexo por caminhos, dados $i < j$ em $\{1, \ldots, n\}$ podemos determinar $\gamma_{ij} : [0,1] \to \Omega$ continua com $\gamma_{ij}(0) \in B_i$, $\gamma_{ij}(1) \in B_j$. Logo

$$K' \doteq \bigcup_{j=1}^n B_j \cup \bigcup_{i<j} \gamma_{ij}([0,1])$$

é conexo por caminhos, compacto, está contido em Ω e contém K.

Retornemos agora à demonstração do teorema. Fixemos u harmônica em Ω, $u \geq 0$. Em virtude da forma forte do princípio do máximo aplicado a $-u$ podemos assumir $u > 0$. Também, em virtude da observação precedente, podemos assumir K conexo. Tomemos, então, uma cobertura finita $\{B_1, \ldots, B_n\}$ de K formada por bolas fechadas contidas em Ω. Pelo Corolário 7.2 existe $D > 0$ tal que $u(x)/u(y) \leq D$, para quaiquer $x, y \in B_j$ e qualquer $j = 1, \ldots, n$.

Fixemos $x \in K$ e consideremos o conjunto $S_x \subset K$ formado pelos pontos $y \in K$ satisfazendo:

- Existe uma sequência $(i_1, \dots, i_m)$ de elementos de $\{1, \dots, n\}$ tais que $x \in B_{i_1}$, $y \in B_{i_m}$ e $B_{i_j} \cap B_{i_{j+1}} \neq \emptyset$ para todo $j \in \{1, \dots, m\}$.

É muito fácil ver que S_x e $K \setminus S_x$ são abertos em K. Como K é conexo segue que $S_x = K$ para todo $x \in K$. Assim se $x, y \in K$ então $y \in S_x$ e portanto podemos tomar $(i_1, \dots, i_m)$ como descrita acima com $x \in B_{i_1}$, $y \in B_{i_m}$. Tomando $y_j \in B_{i_j} \cap B_{i_{j+1}}$ podemos estimar

$$\frac{u(x)}{u(y)} = \frac{u(x)}{u(y_1)} \cdot \frac{u(y_1)}{u(y_2)} \cdots \frac{u(y_{m-1})}{u(y)} \leq D^m.$$

Definindo $C = \max\{1, D^m\}$ obtemos

$$u(x) \leq Cu(y), \quad x, y \in K,$$

propriedade esta que é equivalente a (12). $\square$

Daremos a seguir dois importantes resultados que seguem da Desigualdade de Harnack.

7.4 COROLÁRIO. (TEOREMA DA CONVERGÊNCIA MONÓTONA DE HARNACK) *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e conexo e $\{u_n\}$ uma sequência de funções harmônicas em Ω tal que $u_n \leq u_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{Z}_+$. Então ocorre um dos dois casos*

1. *Existe $x_0 \in \Omega$ tal que $\{u_n(x_0)\}$ é limitada. Neste caso, a sequência $\{u_n\}$ converge uniformemente sobre os compactos de Ω (para uma função harmônica);*

2. *Para todo $x \in \Omega$, temos $\lim u_n(x) = \infty$. Neste caso, temos $u_n \longrightarrow \infty$ uniformemente sobre os compactos de Ω.*

Demonstração. Considere os conjuntos

$$\Omega_1 = \big\{x \in \Omega : \sup_n u_n(x) < \infty\big\},$$
$$\Omega_2 = \big\{x \in \Omega : \sup_n u_n(x) = \infty\big\}.$$

Vamos mostrar que Ω_1 e Ω_2 são abertos. Se $x_1 \in \Omega_1$ tome $r > 0$ tal que $B_r(x_1)$ tem fecho contido em Ω. É uma simples consequência do corolário 7.2 a existência de $C > 0$ tal que

$$0 \leq u_{n+p}(x) - u_n(x) \leq C(u_{n+p}(x_1) - u_n(x_1)), \qquad \forall x \in \overline{B_r(x_1)},\ \forall n, p \in \mathbb{N}$$

Assim $B_r(x_1) \subset \Omega_1$ e $\{u_n\}$ é uniformemente convergente em $B_r(x_1)$. Em particular Ω_1 é aberto. Do mesmo modo, assumindo que $x_2 \in \Omega_2$ se tomarmos $\rho > 0$ tal que $B_\rho(x_2)$ tem fecho contido em Ω então $B_\rho(x_1) \subset \Omega_2$ e $\{u_n\}$ diverge uniformemente para $+\infty$ em $B_\rho(x_2)$. Em particular Ω_2 é também aberto e a tese segue do fato de Ω ser conexo. $\square$

7.5 COROLÁRIO. (TEOREMA DE LIOUVILLE) *Seja u uma função harmônica em $\mathbb{R}^N$ e real. Se $\sup u < \infty$ ou $\inf u > -\infty$, então u é constante. Em outras palavras, se u é harmônica em $\mathbb{R}^N$ então ou u é constante ou a imagem de u é igual a $\mathbb{R}$.*

Demonstração. Considerando $-u$ se necessário e subtraindo uma constante conveniente podemos assumir $u \geq 0$. Aplicamos o Corolário 7.2, com $x' = 0$ e $x \in \mathbb{R}^N$ arbitrário. Tomando $r > |x|$ e fazendo $R \longrightarrow \infty$ segue $u(x) = u(0)$. $\square$

O problema de Dirichlet para H consiste em, dada $u_0 \in C(\partial \mathrm{H})$, determinar u harmônica em H, contínua em $\overline{\mathrm{H}}$ e satisfazendo $u = u_0$ em $\partial\mathrm{H}$. Este problema não goza de unicidade pois se u é uma solução então $u(x) + x_N$ também será. Teremos unicidade, entretanto, se nos restingirmos ao ambiente das funções limitadas.

7.6 TEOREMA. *Seja u é harmônica em H, contínua em $\overline{\mathrm{H}}$ e limitada. Se $u = 0$ em $\partial\mathrm{H}$ então u é identicamente nula.*

Demonstração. Pelo teorema 6.9 existe $\tilde{u}$ harmônica em $\mathbb{R}$ coincidindo com u em H; além do mais, dada a representação explícita de $\tilde{u}$ no teorema 6.9 segue que $\tilde{u}$ é limitada se u o for. Pelo Teorema de Liouville $\tilde{u}$ é constante. Como porém $\tilde{u}$ se anula em $\partial\mathrm{H}$ segue que $\tilde{u}$, e a fortiori u, se anula identicamente. $\square$

Uma versão, em uma direção um pouco diferente, do Teorema de Liouville pode ser obtida simplesmente usando a propriedade da média volumétrica.

7.7 TEOREMA. *Seja u uma função harmônica em $\mathbb{R}^N$. Suponha que existam constantes $C > 0$ e $\theta \in [0,1[$ tais que*

$$|u(x)| \leq C(1 + |x|^\theta), \; x \in \mathbb{R}^N. \tag{13}$$

Então u é constante.

Note que este resultado é preciso uma vez que uma função polinomial de grau 1 em $\mathbb{R}^N$ é uma função harmônica que satisfaz (13) com $\theta = 1$.

Demonstração. Sejam $x \in \mathbb{R}^N$ fixado e $r > 0$. Pelo que foi apresentado na demonstração do Teorema 4.11, temos a validade da seguinte desigualdade:

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x_j}(x)\right| \leq \frac{N}{r} \sup_{S_r(x)} |u|, \quad j = 1, \ldots, N.$$

Agora, se $y \in S_r(x)$ então $|y| \leq |x| + r$ e, portanto,

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x_j}(x)\right| \leq \frac{CN}{r}(1 + (|x| + r)^\theta).$$

Fazendo $r \to \infty$ e usando que $\theta < 1$ concluímos que $(\partial u/\partial x_j)(x) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e todo $j = 1, \ldots, N$. Isto conclui a demonstração. □

8 O princípio do máximo de Hopf

O princípio do máximo de Hopf fornece uma estimativa para a derivada normal exterior de uma função harmônica em um ponto onde seu máximo é atingido. Para simplificar vamos enunciá-lo somente para a bola unitária (a extensão para uma bola aberta arbitrária é imediata). A demonstração foi extraída da monografia "Notions of Convexity"de Lars Hörmander, Modern Birkhäuser Classics, 2007. Um versão mais fraca deste resultado encontra-se enunciada no exercício 32.

8.1 TEOREMA. (PRINCÍPIO DO MÁXIMO DE HOPF) *Seja u contínua em $\overline{B_1(0)}$, harmônica em $B_1(0)$ e seja $x_0 \in S_1(0)$ tal que $u(x_0) = \max_{\overline{B_1(0)}} u$. Então existe o limite*

$$\lim_{t\to 1^-} \frac{u(tx_0) - u(x_0)}{t - 1} := N_{x_0} \in [0, \infty].$$

Além disto,

$$0 \leq u(x_0) - u(x) \leq (1 + |x|) \left(\frac{2}{1 - |x|}\right)^{N-1} N_{x_0}, \quad x \in B_1(0). \tag{14}$$

Em particular, $N_{x_0} > 0$ se u não é constante.

Demonstração. Iniciando lembrando que estamos denotando por $\mathrm{K}(x,y)$ o núcleo de Poisson para a bola unitária. Assim, podemos escrever

$$u(tx_0) - u(x_0) = \int_{S_1(0)} \mathrm{K}(tx_0, y)\,[u(y) - u(x_0)]\,\mathrm{d}\sigma(y)$$

e, portanto,

$$\frac{u(tx_0) - u(x_0)}{t-1} = \int_{S_1(0)} \frac{\mathrm{K}(tx_0, y)}{t-1}\,[u(y) - u(x_0)]\,\mathrm{d}\sigma(y).$$

Desde que

$$\frac{\mathrm{K}(tx_0,y)}{t-1} = \frac{1}{\omega_N}\frac{1-|tx_0|^2}{(t-1)|tx_0-y|^N} = \frac{1}{\omega_N}\frac{-(1+t)}{|tx_0-y|^N}$$

podemos finalmente escrever

$$\frac{u(tx_0) - u(x_0)}{t-1} = \frac{1}{\omega_N}\int_{S_1(0)} \frac{(1+t)(u(x_0) - u(y))}{|tx_0-y|^N}\,\mathrm{d}\sigma(y).$$

Note que este último integrando é maior ou igual a zero, pois u assume seu máximo em x_0. Notemos, agora, que podemos assumir

$$\liminf_{t\to 1^-} \frac{u(tx_0) - u(x_0)}{t-1} < \infty$$

já que, caso contrário, teríamos $N_{x_0} = \infty$ e a conclusão seria imediata. Pelo lema de Fatou temos, então,

$$N_{x_0} := \frac{2}{\omega_N}\int_{S_1(0)} \frac{u(x_0) - u(y)}{|x_0-y|^N}\,\mathrm{d}\sigma(y) < \infty.$$

Pelo teorema da convergência dominada de Lebesgue segue que

$$\lim_{t\to 1^-} \frac{u(tx_0) - u(x_0)}{t-1} = N_{x_0},$$

uma vez que $|x_0 - y| \leq 2|tx_0 - y|$, para $0 < t < 1$. De fato,

$$|x_0 - y| \leq |x_0 - tx_0 + tx_0 - y| \leq (1-t) + |tx_0 - y|.$$

Como, também, $|tx_0 - y| \geq |y| - t|x_0| = 1 - t$, fica provada nossa afirmação.

Neste ponto já é possível concluir que $N_{x_0} > 0$ se u não for constante (por que?). Procederemos, porém, à demonstração da estimativa (14), que fornece uma conclusão mais precisa.

Se $x \in B_1(0)$ temos

$$0 \leq u(x_0) - u(x) = \frac{1}{\omega_N} \int_{S_1(0)} \frac{1 - |x|^2}{|x - y|^N} \, [u(x_0) - u(y)] \, \mathrm{d}\sigma(y).$$

Mas

$$\frac{|x_0 - y|}{|x - y|} \leq \frac{2}{1 - |x|}, \quad y \in S_1(0),$$

de onde (14) segue imediatamente. □

9 Teoria espectral e expansão em auto-funções

Lembremos que $C^\infty(\overline{\Omega})$ denota o subespaço de $C^\infty(\Omega)$ constituído por todas as funções que se estendem como funções infinitamente diferenciáveis definidas em um aberto que contém $\overline{\Omega}$. No caso em que Ω é um aberto com fronteira regular é possível demonstrar que $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$ se, e somente se, todas as derivadas parciais de u se estendem continuamente a $\overline{\Omega}$.

Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto com fronteira regular e $\lambda \in \mathbb{R}$ consideremos o problema

$$\begin{cases} \lambda u + \Delta u = 0 & \text{em } \Omega; \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{15}$$

9.1 DEFINIÇÃO. Dizemos que λ é um auto-valor para o operador de Laplace em Ω (com condição de Dirichlet) se (15) admite uma solução $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ não trivial. Se λ é um auto-valor para o operador de Laplace em Ω então toda solução de (15) se denomina uma auto-função associada ao auto-valor λ.

É um fato não elementar da teoria das equações elípticas que toda auto-função do operador de Laplace em Ω pertence a $C^\infty(\overline{\Omega})$. Vamos assumir este resultado no que se segue.

9.2 PROPOSIÇÃO. *Se λ é um auto-valor para o operador de Laplace em Ω então $\lambda > 0$. Se u e v são auto-funções associadas a auto-valores distintos então u são ortogonais em $L^2(\Omega)$, isto é*

$$\int_\Omega u(x)v(x)\,dx = 0.$$

Demonstração. Seja u uma auto-função não nula associada ao auto-valor λ. Pela primeira identidade de Green temos

$$\int_\Omega \left[u(x)\Delta(x) + |\vec{\nabla}u(x)|^2\right] dx = 0,$$

donde

$$\lambda = \left(\int_\Omega |\vec{\nabla}u(x)|^2 dx\right)\left(\int_\Omega u(x)^2 dx\right)^{-1} > 0.$$

Agora, se u e v são auto-funções associadas aos auto-valores valores λ e μ respectivamente, com $\lambda \neq \mu$, então, pela segunda identidade de Green,

$$\begin{aligned}\lambda \int_\Omega u(x)v(x)\,dx = -\int_\Omega (\Delta u)(x)v(x)\,dx =\\ -\int_\Omega (\Delta v)(x)u(x)\,dx =\\ \mu\int_\Omega u(x)v(x)\,dx,\end{aligned}$$

de onde segue nossa afirmação. □

Se λ é um auto-valor para o operador de Laplace em Ω denotaremos por $E(\lambda)$ o auto-espaço correspondente a λ, isto é, o espaço das auto-funções associadas a λ. Note que $E(\lambda)$ é, claramente, um $\mathbb{R}$-espaço vetorial e que, pela Proposição 9.2 , $E(\lambda) \perp E(\mu)$ se $\lambda \neq \mu$.

O próximo resultado é uma consequência do *Teorema Espectral para Operadores Compactos Auto-Adjuntos*, um resultado clássico ensinado nos cursos de Análise Funcional. Assumiremos sua validade sem apresentar a demonstração.

9.3 TEOREMA. *São verdadeiras as seguintes afirmações:*

1. *O conjunto dos auto-valores para o operador de Laplace em Ω forma uma sequência não-decrescente $\nearrow \infty$;*

2. *Cada $E(\lambda)$ tem dimensão finita; a dimensão de $E(\lambda)$ denomina-se a multiplicidade (geométrica) de λ;*

3. *Escreva a sequência de auto-valores como*

$$\lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \le \lambda_j \le \cdots ,$$

com repetições de acordo com a multiplicidade de cada auto-valor. Associado a cada λ_j podemos tomar uma auto-função u_j com norma em $L^2(\Omega)$ igual a 1 de tal forma que $u_j \perp u_k$ em $L^2(\Omega)$, se $j \neq k$ (note que isto é possível de acordo com a Proposição 9.2 e por uma aplicação do processo de Gram-Schmidt em cada auto-espaço). Então $\{u_j\}$ forma uma base hilbertiana de $L^2(\Omega)$, isto é, toda $f \in L^2(\Omega)$ pode ser expressa na forma

$$f(x) = \sum_{j\in\mathbb{N}} c_j u_j(x) \tag{16}$$

onde

$$c_j = \int_\Omega f(x)u_j(x)\,dx, \quad j \in \mathbb{N},$$

e a convergência em (16) *se dá na norma de $L^2(\Omega)$.*

9.4 EXEMPLO. Seja $a > 0$. Vamos determinar os auto-valores e auto-funções para o operador de Laplace em $\Omega =]0, a[\subset \mathbb{R}$. Neste caso o problema (15) se escreve como

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda u(x) + u''(x) &=& 0, \quad x \in]0, a[; \\ u(0) = u(a) &=& 0. \end{array} \right. \tag{17}$$

Uma vez que $\lambda > 0$ a solução geral da EDO em (17) se exprime como

$$u(x) = A\cos(\sqrt{\lambda}\,x) + B\mathrm{sen}(\sqrt{\lambda}\,x),$$

onde A e B são números reais arbitrários. A condição $u(0) = 0$ implica que devemos tomar $A = 0$. Por outro lado, como estamos interessados em obter uma solução não trivial, devemos ter $B \neq 0$ e portanto a condição $u(a) = 0$ implica $\sqrt{\lambda}\,a = n\pi$, com $n \in \mathbb{N}$. Consequentemente os auto-valores para o operador de Laplace em $]0, a[$ são

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{a^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Note que a multiplicidade de cada λ_n é igual a 1, com $E(\lambda_n)$ gerado pela função $x \mapsto$ sen$(n\pi x/a)$. Defina

$$u_n(x) = \frac{2}{a}\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Como a norma de cada u_n em $L^2(0,]0, a[)$ é igual a um segue que $\{u_n\}$ forma uma base hilbertiana de $L^2(]0, a[)$. Explicitamente, dada $f \in L^2(]0, a[)$ podemos escrever

$$f(x) = \frac{2}{a}\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n \,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right),$$

com convergência em $L^2(]0, a[)$. Aqui

$$c_n = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\,dx,\ \ n \in \mathbb{N}.$$

- - - - - oooo - - - - -

Referências

- **Gerald B. Folland**, "Introduction to Partial Differential Equations" - Preliminary Informal Notes of University Courses and Seminars in Mathematics. Mathematical Notes, Princeton University Press and University of Tokyo Press, Princeton, New Jersey, 1976.
- **Antonio Gilioli**, "Equações Diferenciais Parciais Elípticas" - notas de curso ministrado durante o $10^{\underline{o}}$ Colóquio Brasileiro de Matemática, Poços de Caldas, 1975.

Exercícios

1. Mostre que se u é harmônica em $\mathbb{R}^N$ e se $T : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ é uma transformação ortogonal então $u \circ T$ também é harmônica em $\mathbb{R}^N$. Lembre que uma transformação linear $T : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ é *ortogonal* se $({}^tT)T = T({}^tT) = I$, a aplicação identidade.

2. Determine todas as funções harmônicas em $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ da forma $u(x) = f(|x|)$, onde $f :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ é de classe C^2.

3. Use o resultado obtido no exercício anterior para obter u harmônica em $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^N : r < |x| < R\}$, onde $0 < r < R < \infty$, contínua em $\overline{\Omega}$ e satisfazendo $u(x) = a$ se $|x| = r$, $u(x) = b$ se $|x| = R$ (aqui $a, b \in \mathbb{R}$).

4. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto, u harmônica em Ω e $x_0 \in \Omega$. Mostre que se $N \geq 2$ então $u^{-1}\{u(x_0)\}$ é infinito. E quando $N = 1$?

5. Fixado $y \in \mathbb{R}^N$ defina
$$V(x) = \frac{|y|^2 - |x|^2}{|y - x|^N}, \quad x \in \mathbb{R}^N \setminus \{y\}.$$
Mostre que V é harmônica em $\mathbb{R}^N \setminus \{y\}$.

6. Calcule as integrais
$$\int_{S_1(0)} y_j \mathrm{d}\sigma(y), \quad \int_{S_1(0)} y_j y_k \mathrm{d}\sigma(y).$$

7. Sejam (x, y) as coordenadas em $\mathbb{R}^2$ e considere os ODPL com coeficientes constantes:

$$\frac{\partial}{\partial z} \doteq \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \doteq \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Mostre que

$$\Delta = 4\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \ .$$

8. Sejam $R > 0$ e $f : S_R(0) \to \mathbb{R}$ contínua. Mostre que

$$\int_{S_R(0)} f(y)\mathrm{d}\sigma(y) = R^{N-1}\int_{S_1(0)} f(Rz)\mathrm{d}\sigma(z).$$

Sugestão: Mostre, primeiramente, que esta fórmula é válida para $f \in C^2(\mathbb{R}^N)$ escrevendo a expansão de Taylor de f de ordem 1 na origem na forma

$$f(x) = f(0) + \sum_{j=1}^{N} g_j(x)x_j, \text{ com } g_j \in C^1(\mathbb{R}^N),$$

e aplicando o teorema da divergência para o campo $\vec{g} = (g_1, \dots, g_N)$. Conclua o caso geral evocando o teorema de Weierstrass.

9. Nas mesmas hipóteses do exercício anterior, mostre que

$$\int_{S_R(0)} f(y)\mathrm{d}\sigma(y) = \int_{S_R(0)} f(-y)\mathrm{d}\sigma(y).$$

10. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto com fronteira regular e conexo. Seja, também, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfazendo $tf(t) \geq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Mostre que toda solução $u \in C^2(\bar{\Omega})$ do problema

$$\begin{cases} \Delta u = f(u) \text{ em } \Omega \\ \partial u/\partial \vec{n} = 0 \text{ em } \partial\Omega \end{cases} \qquad (*)$$

é necessariamente constante (aqui $\vec{n}$ denota a normal unitária exterior a $\partial\Omega$). Determine, também, uma condição adicional sobre f que garanta que toda solução de $(*)$ se anula identicamente.

11. Seja Ω um aberto com fronteira regular de $\mathbb{R}^N$. Usando a identidade

$$|\nabla v|^2 + 2\,\mathrm{div}\,((u-v)\nabla u) = |\nabla u|^2 + |\nabla(u-v)|^2 + 2(u-v)\Delta u,$$

válida para $u, v \in C^2(\bar{\Omega})$, mostre que se $u_0 \in C^2(\bar{\Omega})$ satisfaz

$$\begin{cases} \Delta u_0 = 0 & \text{em } \Omega; \\ u_0 = g & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

então u_0 fornece o mínimo absoluto da função

$$J : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad J[v] = \int_\Omega |\nabla v|^2 \mathrm{d}x,$$

onde

$$\mathcal{M} = \{v \in C^2(\bar{\Omega}) : v = g \text{ em } \partial\Omega\}.$$

12. Sejam Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ e $u \in C^2(\Omega)$. Suponha que para todo $x_0 \in \Omega$ e todo $r > 0$ tal que $\bar{B}_r(x_0) \subset \Omega$ tem-se

$$\int_{S_r(x_0)} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(y)\mathrm{d}\sigma(y) = 0,$$

onde, como é usual, $\vec{n}$ denota a normal unitária a $S_r(x_0)$, exterior a $B_r(x_0)$. Mostre que então u é harmônica em Ω.

13. Seja Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^N$, $\Omega \neq \mathbb{R}^N$, e seja u uma função harmônica em Ω. Mostre que para cada subconjunto compacto K de Ω vale a desigualdade

$$\sup_{x\in K} |u(x)| \leq \frac{N}{\omega_N \mathrm{dist}\,(K, \partial\Omega)^N} \int_\Omega |u(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Conclua o seguinte resultado: *se u é harmônica em $\mathbb{R}^N$ e se $u \in L^1(\mathbb{R}^N)$ então $u = 0$.*

14. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto.

    (a) Sejam $K \subset \Omega$ compacto e $U \subset \Omega$ aberto tais que $K \subset U$ e $\overline{U}$ é compacto em Ω. Mostre que se u é harmônica em Ω então

$$\sup_K \left|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right| \leq \frac{N}{\mathrm{dist}(K, \partial U)} \sup_U |u| \;\; j = 1, \ldots, n.$$

(b) Conclua que se $\{u_n\}$ é uma sequência de funções harmônicas em Ω que converge uniformemente sobre os compactos de Ω para u então o mesmo é verdade para as sequências $\{\partial u_n/\partial x_j\}$, $j = 1, \ldots, N$, com $\partial u_n/\partial x_j \to \partial u/\partial x_j$.

15. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado e com fronteira regular. Seja também $g \in C(\bar{\Omega})$. Mostre que não existe solução $u \in C^2(\bar{\Omega})$ para o problema

$$\begin{cases} (\Delta u)(x) = e^{g(x)}, \ x \in \Omega; \\ (\partial u/\partial \vec{n})(y) = 0, \ y \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Aqui $\vec{n}$ é normal a $\partial\Omega$ e exterior a Ω.

16. Seja Ω um aberto limitado de $\mathbb{R}^N$ e considere uma sequência $\{u_j\}$ de funções harmônicas em Ω, cada uma delas contínua em $\bar{\Omega}$. Suponha que

$$\max_{y \in \partial\Omega} |u_j(y) - u_k(y)| \leq \frac{1}{j} + \frac{1}{k}, \qquad j, k = 1, 2, \ldots$$

Mostre que $\{u_j\}$ converge uniformemente em $\bar{\Omega}$ para uma função $u \in C(\bar{\Omega})$, que é ainda harmônica em Ω.

17. Seja $D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \, x_1^2 + x_2^2 < 1\}$. Suponha que exista u harmônica em D, contínua em $\bar{D}$ e que coincide com a função $2x_1^2$ em ∂D. Determine $u(0)$.

18. Sejam $U = \{x : \, x \in \mathbb{R}^N, \, x \neq 0\}$ e $f \in C^2(U)$. Defina, para $x \in U$,

$$f_\sharp(x) = \int_{S_1(0)} f(|x|\omega) \mathrm{d}\sigma(\omega).$$

Mostre que $\Delta(f_\sharp) = (\Delta f)_\sharp$.

Sugestão: Utilize o teorema da divergência e a fórmula de integração em coordenadas polares.

19. Sejam Ω um aberto com fronteira regular de $\mathbb{R}^2$, $u \in C^2(\bar{\Omega})$, $x \in \Omega$ e

$$E(y) = \frac{1}{2\pi} \log |y| \quad \ y \in \mathbb{R}^2, \ y \neq 0.$$

Verifique a validade da fórmula

$$u(x) = \int_\Omega E(x-y)\,\Delta u(y)\,\mathrm{d}y + \int_{\partial\Omega} \left\{ u(y)\frac{\partial E(x-y)}{\partial \vec{n}_y} - E(x-y)\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(y) \right\} \mathrm{d}\sigma(y).$$

20. Proceda formalmente para determinar a função de Green e a fórmula de Poisson para o semi-espaço

$$\mathrm{H} = \{x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N : x_N > 0\}.$$

Conclua que, para $N = 2$, a única solução limitada do problema de Dirichlet para o semi-espaço $x_2 > 0$, com dado de fronteira $v_0 \in C(\partial\mathrm{H}) \cap L^\infty(\partial\mathrm{H})$, é dada por

$$v(x_1, x_2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x_2}{(x_1 - y)^2 + x_2^2}\, v_0(y)\,\mathrm{d}y\,.$$

21. Seja $\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0,\ x_2 > 0\}$. Resolva o problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ em } \Omega,\ u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}), \text{ limitada;} \\ u(x_1, 0) = u_0(x_1),\ \ x_1 \geq 0; \\ u(0, x_2) = 0,\ \ x_2 \geq 0, \end{cases}$$

onde u_0 é contínua e limitada em $[0, \infty[$, $u_0(0) = 0$.

22. Verifique que a função de Green para a bola $B_1(0)$ em $\mathbb{R}^2$ é dada por

$$G(x, y) = \frac{1}{2\pi} \left\{ \log|x - y| - \log[|x|^2|y|^2 + 1 - 2(x \cdot y)]^{1/2} \right\}.$$

23. Sejam Ω um aberto em $\mathbb{R}^N$ e $F \subset \Omega$ tais que F não tem pontos de acumulação em Ω. Mostre que se u é harmônica e limitada em $\Omega \setminus F$ então u se estende a uma função harmônica em Ω.

24. Seja $f \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ se anulando no complementar de um compacto de $\mathbb{R}^N$. Denotando por $E(x)$ o potencial newtoniano em $\mathbb{R}^N$ mostre que

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^N} E(x - y) f(y)\,\mathrm{d}y, \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

é de classe C^∞ e que $\Delta u = f$ em $\mathbb{R}^N$.

25. Seja u harmônica em $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| > 1\}$. Mostre que

$$v(y) = u\left(\frac{y_1}{|y|^2}, -\frac{y_2}{|y|^2}\right)$$

é harmônica em $U = \{y \in \mathbb{R}^2 : 0 < |y| < 1\}$. *Sugestão:* Para simplificar os cálculos defina $g_1 = y_1|y|^{-2}$, $g_2 = -y_2|y|^{-2}$ e mostre que $(g_1)_{y_1} = (g_2)_{y_2}$, $(g_1)_{y_2} = -(g_2)_{y_1}$.

26. Seja Ω como no exercício anterior. Demonstre a unicidade para o seguinte problema:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em} \quad \Omega \\ u = u_0 & \text{em} \quad S_1(0). \end{cases}$$

Aqui assumimos u_0 contínua em $S_1(0)$ e impomos u contínua e limitada em $\overline{\Omega}$.

27. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto, $u \in C^2(\Omega)$ e $f \in C^\infty(\Omega)$ tais que $\Delta u = f$. Mostre que $u \in C^\infty(\Omega)$. *Sugestão:* É suficiente mostrar que $u|_B$ é de classe C^∞ para qualquer bola aberta B com fecho contido em Ω. Fixada uma tal bola mostre que existe $g \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ se anulando no complementar de um compacto de $\mathbb{R}^N$ e coincidindo com f em B (cf. o livro "Cálculo Integral e o Teorema de Stokes"mencionado no tetxo). Resolva $\Delta v = g$.

28. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e $u \in C^2(\Omega)$. Suponha que vale a seguinte propriedade:

   - dado $x \in \Omega$ existe $\delta = \delta(x) > 0$ tal que

$$u(x) = \frac{1}{\omega_N r^{N-1}} \int_{S_r(x)} u(y) \mathrm{d}\sigma(y), \ 0 < r \leq \delta.$$

Mostre que u é harmônica em Ω.

29. Seja Ω um subconjunto aberto e conexo de $\mathbb{R}^N$ satisfazendo a seguinte propriedade:

$$x = (x_1, \ldots, x_{N-1}, x_N) \in \Omega \implies (x_1, \ldots, x_{N-1}, -x_N) \in \Omega.$$

Seja u uma função harmônica em

$$\Omega_+ = \{x = (x_1, \dots, x_N) \in \Omega : \, x_N > 0\},$$

contínua em

$$\Omega_\bullet = \{x = (x_1, \dots, x_N) \in \Omega : \, x_N \geq 0\},$$

e nula quando $x_N = 0$. Conclua que existe uma única função $\tilde{u}$ em Ω que coincide com u em Ω_+.

30. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e $u \in C^2(\Omega)$. Mostre que as propriedades abaixo são equivalentes:

    (a) $\Delta u(x) \geq 0$, para todo $x \in \Omega$

    (b) Para todo $x_0 \in \Omega$ e todo $r > 0$ tal que $\overline{B_r}(x_0) \subset \Omega$ vale

    $$u(x_0) \leq \frac{1}{\omega_N} \int_{S_1(0)} u(x_0 + ry) \, \mathrm{d}\sigma(y).$$

    Sugestão: Para (1) $\Rightarrow$ (2) estude a derivada da função

    $$g(t) = \frac{1}{\omega_N} \int_{S_1(0)} u(x_0 + ty) \mathrm{d}\sigma(y), \quad 0 \leq t \leq r.$$

    Para (2) $\Rightarrow$ (1) escreva a expansão de Taylor de ordem 2 de u em torno de x_0 e utilize o exercício 6.

31. Seja u uma função harmônica em $B_R(0)$, $u \geq 0$. Mostre que

    $$|(\nabla u)(0)| \leq \frac{N u(0)}{R}.$$

32. Sejam $u \in C(\overline{B_1(0)})$ harmônica em $B_1(0)$ e $x \in S_1(0)$ um ponto onde u assume seu máximo em $\overline{B_1(0)}$. Suponha que exista o limite

    $$N_x \doteq \lim_{t \to 1^-} \frac{u(tx) - u(x)}{t - 1} \in [0, \infty[.$$

    Use a desigualdade de Harnack para mostrar que $N_x > 0$. *Observação:* Para utilizar Harnack considere $v \doteq u(x) - u$.

33. Sejam Ω um aberto de $\mathbb{R}^N$ e $\mathcal{H}(\Omega)$ o espaço constituído pelas funções harmônicas em Ω que pertencem a $L^2(\Omega)$. Mostre que $\mathcal{H}(\Omega)$ é um subespaço fechado de $L^2(\Omega)$.

34. Sejam Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^N$ e $\mathcal{A} \subset C^\infty(\Omega)$ uma família de funções harmônicas satisfazendo a seguinte propriedade: para todo $K \subset \Omega$ compacto existe $C > 0$ tal que $\sup_K |u| \leq C$, $\forall u \in \mathcal{A}$. Mostre que a mesma propriedade é válida para as famílias

$$\mathcal{A}_j \doteq \left\{ \frac{\partial u}{\partial x_j} : u \in \mathcal{A} \right\}, \quad j = 1, \ldots, N.$$

Conclua, usando o Teorema de Arzelà-Ascoli, que para todo $K \subset \Omega$ compacto, o conjunto $\{u|_K : u \in \mathcal{A}\} \subset C(K)$ é relativamente compacto em $C(K)$. Aqui, como é usual, estamos munindo $C(K)$ com a distância $d(f, g) = \sup_K |f - g|$.

35. Seja Ω um aberto com fronteira regular e considere as sequências $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, respectivamente dos auto-valores e das correspondentes auto-funções do operador de Laplace em Ω. Aqui $\{u_n\}$ é assumida normalizada, formando uma base hilbertiana para $L^2(\Omega)$. Seja $u \in C^1(\overline{\Omega})$, com $u = 0$ em $\partial\Omega$. Mostre que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\left| \int_\Omega u(x) u_n(x)\, dx \right| \leq C/\lambda_n^{1/2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

- - - - - oooo - - - - -