GEOMETRIAS EUCLIDIANA E NÃO-EUCLIDIANA
LISTA 1

PROFESSOR: CRISTIÁN ORTIZ

Notação: Espaços afins serão denotados por $(\mathbb{A}, V, \varphi)$ e $(\mathbb{B}, W, \psi)$ de acordo ao explicado em aula. Transformações afins são denotadas por $\mathbb{T} : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{B}$ cobrindo a transformação linear $T : V \longrightarrow W$.

1. Mostre que dado um espaço afim $(\mathbb{A}, V, \varphi)$, a escolha de um ponto $a \in \mathbb{A}$ define uma estrutura de espaço vetorial em $\mathbb{A}$. Indique qual a origem deste espaço vetorial. É possível dizer que todo espaço afim herda canonicamente uma estrutura de espaço vetorial? Justifique.
2. Use o problema anterior para introduzir o conceito de base e coordenadas num espaço afim.
3. Considere k um corpo de característica $\neq 2$ e defina $k^n = k \times ... \times k$, n-vezes. Seja A uma matriz $m \times n$ com coeficientes em k. Fixado $b \in k^m$, mostre que o conjunto $Z_b := \{x \in k^n \mid Ax = b\}$ define um subespaço afim de k^n, onde k^n é munido da estrutura afim canônica associada a um espaço vetorial. Qual a dimensão de Z_b? Qual a relação entre a dimensão de Z_b e o posto da matriz A?
4. Sejam b, b', a_i, a'_i, $i = 1, ..., n$ elementos de um corpo k. Considere as equações

$$b = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i, \qquad b' = \sum_{i=1}^{n} a'_i x'_i.$$

   Segue do exercício anterior que o conjunto das soluções das equações acima definem hiperplanos afins em k^n. Encontre uma condição que garanta que estes hiperplanos são paralelos.
5. Seja V um k-espaço vetorial com uma decomposição $V = V_1 \oplus V_2$. Uma **simetria** com respeito a V_1 na direção de V_2 é uma aplicação

$$s : V \longrightarrow V$$
$$v_1 + v_2 \mapsto v_2 - v_1.$$

   Verifique que $s \in \mathbb{GL}_n k$. Qual a ordem de s como elemento do grupo linear?
6. Seja $\mathbb{T} : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{B}$ uma transformação afim com transformação linear associada $T : V \longrightarrow W$. Seja $a \in \mathbb{A}$ e considere sua imagem $\mathbb{T}a \in \mathbb{B}$. Mostre que com a estruturas de espaço vetorial em $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$ induzidas por a e $\mathbb{T}a$, respectivamente, a transformação $\mathbb{T} : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{B}$ é linear. Qual o núcleo de $\mathbb{T}$?

7. Vimos em aula que dados um espaços afins $(\mathbb{A}, V, \varphi)$ e $(\mathbb{B}, W, \psi)$, temos uma aplicação bem definida
$$\Phi : \mathbb{H}\mathrm{om}(\mathbb{A}, \mathbb{B}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(V, W).$$
Para cada $T \in \mathrm{Hom}(V, W)$ calcule $\Phi^{-1}(T)$.
8. Sabemos que se V, W são espaçoes vetoriais, então $\mathrm{Hom}(V, W)$ é um espaço vetorial. O que você pode dizer sobre $\mathbb{H}\mathrm{om}(\mathbb{A}, \mathbb{B})$, onde $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ são espaçoes afins? Justifique.
9. Vimos em aula que dado um espaço afim $(\mathbb{A}, V, \varphi)$ temos um homomorfismo de grupos $\Phi : \mathrm{GA}(\mathbb{A}) \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$. O núcleo de Φ consiste em todas as translações afins. Verifique que existe um isomorfismo de grupos $\mathrm{Ker}(\Phi) \cong (V, +)$.
10. Seja V um espaço vetorial. Dados $u, v \in V$ o segmento de reta conectando u a v é definido por $[u, v] := (1 - t)u + tv$, onde $0 \leq t \leq 1$. Um subconjunto $K \subseteq V$ é dito convexo se para cada $u, v \in K$ tem-se $[u, v] \subseteq K$. Faça uma definição de convexidade no contexto de espaços afins. Estude a relação entre convexidade e transformações afins.
11. Seja V um espaço vetorial e $\mathbb{A}$ um conjunto. Dada uma ação $\rho : V \times \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}$ do grupo aditivo $(V, +)$ no conjunto $\mathbb{A}$, que é transitiva e livre. Mostre que $\mathbb{A}$ herda uma estrutura de espaço afim. Vale a volta?
12. Mostre que o centro do grupo afim $\mathrm{GA}(\mathbb{A})$ possui apenas um elemento.