GEOMETRIAS EUCLIDIANA E NÃO-EUCLIDIANA
LISTA 2

PROFESSOR: CRISTIÁN ORTIZ

1. Um espaço afim $(\mathbb{A}, V, \varphi)$ é dito um **espaço afim euclidiano** se $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ é um espaço vetorial euclidiano. Mostre que neste caso
$$d_{\mathbb{A}}(a,b) := \|\varphi(a,b)\|,$$
define uma distância em $\mathbb{A}$.
2. Defina isometria afim. Mostre que o conjunto das isometrias afins forma um grupo.
3. Vimos em aula que dado um espaço vetorial euclidiano $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ o grupo $O(V)$ é gerado pelas reflexões. Estude o resultado análogo para isometrias afins.
4. Seja $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ um espaço vetorial afim. Seja $r_H : V \longrightarrow V$ a reflexão associada a um hiperplano $H \subset V$. Calcule o determinante de r_H.
5. Seja $T \in O(n)$ uma isometria de $\mathbb{R}^n$ munido do produto interno usual. Mostre que T é um movimento rígido se e somente se T se escreve como composição de um número para de reflexões.
6. Seja $T \in O(V)$ uma isometria de um espaço vetorial euclidiano. Seja $v_0 \in V$ tal que $T(v_0) \neq v_0$. Mostre que existe uma reflexão $r_H : V \longrightarrow V$ tal que $r_H(v_0) = T(v_0)$.

   Seja V um espaço vetorial. Considere o conjunto $\mathcal{B}(V)$ de todas as bases de V. Se $B, B' \in \mathcal{B}(V)$ são duas bases, dizemos que B e B' são equivalentes se $\det(P_{B,B'}) > 0$, onde P é a matriz de mudança de base de B para B'. Neste caso escrevemos $B \sim B'$.
   i) Mostre que $\sim$ é uma relação de equivalência em $\mathcal{B}(V)$.
   ii) Prove que o espaço de classes de equivalência é formado por dois elementos.

   Uma **orientação** num espaço vetorial V é a escolha de uma das classes de equivalência da relação acima. Dizemos que um isomorfismo linear $T : V \longrightarrow V$ preserva orientação se $B \sim B'$ implica $T(B) \sim T(B')$.
7. Seja $T \in O(n)$ uma isometria. Mostre que T preserva orientação se e somente se $\det(T) = 1$. Reflexões preservam orientação?
8. Verifique que o centro de $O(n)$ é dado por $\{\mathrm{Id}, -\mathrm{Id}\}$.