

GEOMETRIAS EUCLIDIANA E NÃO-EUCLIDIANA
LISTA 5

PROFESSOR: CRISTIÁN ORTIZ

1. Considere a projeção estereográfica $\pi : \mathbb{S}^2 - \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$. Calcule a inversa de π .
2. Seja l_u uma reta em \mathbb{S}^2 . Mostre que se $v \in l_u$ então $-v \in l_u$.
3. Vimos em aula que dados $x, y \in \mathbb{S}^2$ com $x \neq -y$ existe uma reta passando por x, y . Mostre que esta reta é única. O que você pode dizer se $x = -y$?
4. Sejam l_u, l_v duas retas distintas \mathbb{S}^2 . O que você pode dizer em termos do axioma das paralelas da Geometria Euclidiana?
5. Considere a distância $\text{dist}_{\mathbb{S}^2} : \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida em aula. Mostre que esta distância possui as seguintes propriedades:
 - i) $\text{dist}_{\mathbb{S}^2}(x, y) = \text{dist}_{\mathbb{S}^2}(y, x)$ para cada $x, y \in \mathbb{S}^2$.
 - ii) $\text{dist}_{\mathbb{S}^2}(x, y) \geq 0$, para cada $x, y \in \mathbb{S}^2$. Mostre que a igualdade vale se e somente se $x = y$.
 - iii) $\text{dist}_{\mathbb{S}^2}(x, z) \leq \text{dist}_{\mathbb{S}^2}(x, y) + \text{dist}_{\mathbb{S}^2}(y, z)$, para cada $x, y, z \in \mathbb{S}^2$. Quando vale a igualdade?

OBS: As propriedades descritas acima dizem que $(\mathbb{S}^2, \text{dist}_{\mathbb{S}^2})$ é um espaço métrico.

6. Mostre que toda isometria de \mathbb{S}^2 é a restrição a \mathbb{S}^2 de uma isometria de \mathbb{R}^3 .
7. Seja \mathcal{T} um tetraedro cujos vértices são pontos da esfera \mathbb{S}^2 . Considere a projeção radial

$$R : \mathbb{R}^3 - \{0\} \rightarrow \mathbb{S}^2$$
$$x \mapsto \frac{x}{\|x\|}$$

- i) Calcule a imagem de \mathcal{T} pela projeção radial.
- ii) Calcule o número inteiro $V - A + F$ onde V (resp. A, F) é o número de vértices (resp. arestas, faces) do tetraedro \mathcal{T} .
- iii) Qual a relação com a Fórmula de Girard?