GEOMETRIAS EUCLIDIANA E NÃO-EUCLIDIANA
LISTA 3

PROFESSOR: CRISTIÁN ORTIZ

1. Seja $\mathcal{F}$ uma figura em $\mathbb{R}^2$. Defina o conjunto das **simetrias** de $\mathcal{F}$ por
$$S(\mathcal{F}) := \{T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \mid T \text{ é isometria}, T(\mathcal{F}) = \mathcal{F}\}.$$
Mostre que $S(\mathcal{F})$ é um grupo. Verifique que existe uma ação natural de $S(\mathcal{F})$ em $\mathcal{F}$.
2. Qual o grupo de simetrias de um triângulo equilátero? e o grupo de simetrias do círculo unitário?
3. Calcule o grupo de simetrias de um polígono regular de n lados. Exiba alguns pontos fixos da ação natural do grupo de simetrias.
4. Sejam H_1, H_2 hiperplanos paralelos num espaço com produto interno $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Calcule a composição $r_1 \circ r_2$, onde $r_i : V \longrightarrow V$ é a reflexão em torno de H_i, i=1,2.
5. Faça o mesmo no caso em que H_1, H_2 são retas paralelas contidas num espaço de dimensão 2. E se H_1 tem um ponto em comum com H_2?
6. Determine todas as isometrias lineares de $\mathbb{R}^2$ com o produto interno usual. O que você pode dizer no caso das isometrias de um plano euclidiano $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$?

   No que segue $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ denota um plano euclidiano.

7. Seja $\mathcal{R} : S^1(V) \times S^1(V) \longrightarrow O^+(V)$ a aplicação que a cada par de vetores unitários (u, v) associa a única rotação que leva u em v. Mostre que $\mathcal{R}(u, v) = \mathcal{R}(u', v')$ se e somente se $(u, v) \sim (u', v')$, onde $\sim$ denota a relação de equivalência vista em aula.
8. Mostre que existe uma bijeção $\bar{\mathcal{R}} : \mathcal{A} \longrightarrow S^1$, onde $\mathcal{A}$ denota o conjunto de todos os ângulos entre pares de vetores de V.
9. Seja $T : V \longrightarrow V$ uma isometria. Mostre que T preserva ângulos. Vale a volta? Justifique.