MAC338 – Análise de Algoritmos

Departamento de Ciência da Computação – IME/USP

Primeiro Semestre de 2005

Exercício

Considere um vetor $v[1\,..\,k]$ com k números distintos.

(1) Quantas permutações existem com os elementos de v?
(2) Quantas das permutações de v têm o maior elemento de v na posição k?
(3) Se escolhermos, dentre todas as permutações com os elementos de v, uma ao acaso, de acordo com a distribuição uniforme de probabilidade, qual é a chance de pegarmos uma das permutações que tem o maior elemento de v na posição k?

Agora, considere o seguinte algoritmo que calcula o máximo de um vetor $v[1\,..\,n]$ com $n > 0$ números positivos distintos.

Algoritmo Máximo (v, n)

1. $maior \leftarrow 0$
2. para i de 1 até n faça
3. se $v[i] > maior$
4. então $maior \leftarrow v[i]$
5. devolva $maior$

Suponha que v é uma permutação de 1 a n escolhida ao acaso dentre todas as permutações de 1 a n, de acordo com a distribuição uniforme de probabilidade. Seja X o número de atribuições executadas na linha 4 do algoritmo por uma chamada de Máximo(v, n). Note que X é uma variável aleatória.

Calcule o valor esperado de X. Para isso, utilize uma variável aleatória X_i que vale 1 se "$maior \leftarrow v[i]$" foi executada e vale 0 caso contrário. Qual é a relação entre X e os X_i's? Qual é a relação entre os valores esperados de X e dos X_i's? Quanto é o valor esperado de X_i?

MAC338 – Análise de Algoritmos

Departamento de Ciência da Computação – IME/USP

Primeiro Semestre de 2005

Exercício de verdade

Agora, considere o seguinte algoritmo que determina o segundo maior elemento de um vetor $v[1\,..\,n]$ com $n \geq 2$ números positivos distintos.

Algoritmo Máximo (v, n)

```
1. maior ← 0
2. segundo_maior ← 0
3. para i de 1 até n faça
4.     se v[i] > maior
5.         então segundo_maior ← maior
6.               maior ← v[i]
7.         senão se v[i] > segundo_maior
8.               então segundo_maior ← v[i]
9. devolva segundo_maior
```

Suponha que v é uma permutação de 1 a n escolhida ao acaso dentre todas as permutações de 1 a n, de acordo com a distribuição uniforme de probabilidade. Seja X o número de vezes que a variável *segundo_maior* é alterada (ou seja, o número de execuções das linhas 5 e 8 do algoritmo) numa chamada de Máximo(v, n). Note que X é uma variável aleatória. Calcule o valor esperado de X.

Perdido? Comece então respondendo a seguinte pergunta: numa dada iteração, quando é que *segundo_maior* sofre uma alteração? E aí passe às seguintes outras perguntas...

Considere um vetor $v[1\,..\,k]$ com k números distintos.

(1) Quantas permutações existem com os elementos de v?

(2) Quantas das permutações de v têm o maior ou o segundo maior elemento de v na posição k?

(3) Se escolhermos, dentre todas as permutações com os elementos de v, uma ao acaso, de acordo com a distribuição uniforme de probabilidade, qual é a chance de pegarmos uma das permutações que tem o maior ou o segundo maior elemento de v na posição k?

Agora defina algumas variáveis aleatórias auxiliares para ajudar a fazer o cálculo do valor esperado de X. Não complique!