Análise de Algoritmos

Slides de Paulo Feofiloff

[com erros do coelho e agora também da cris]

Seleção em tempo linear

CLRS 9.3

BFPRT = Blum, Floyd, Pratt, Rivest e Tarjan

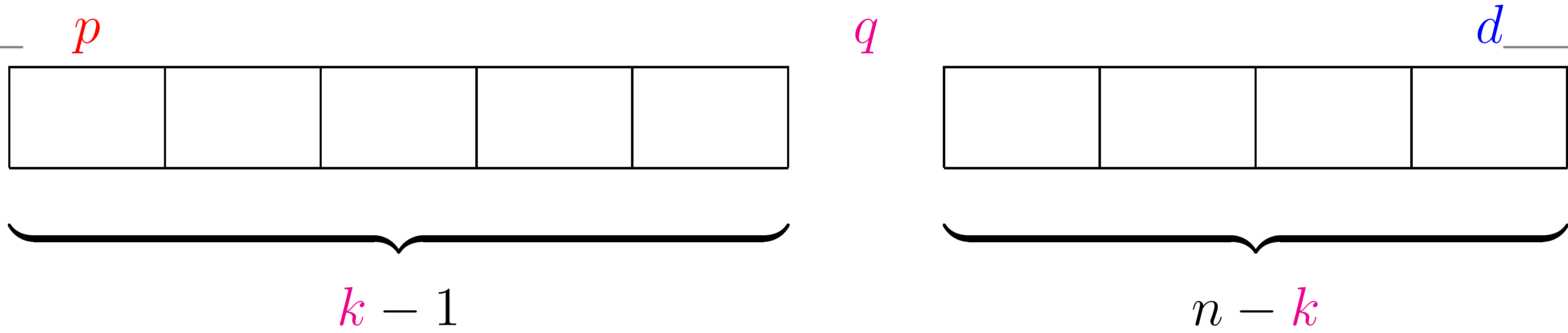
Select-BFPRT

Recebe $A[p \,..\, d]$ e i tal que $1 \leq i \leq d - p + 1$ e devolve um índice q tal que $A[q]$ é o i-ésimo menor elemento de $A[p \,..\, d]$

SELECT-BFPRT(A, p, d, i)

se $p = d$
  então devolva p $\triangleright$ p e não $A[p]$
$q \leftarrow$ PARTICIONE-BFPRT (A, p, d)
$k \leftarrow q - p + 1$
se $k = i$
  então devolva q $\triangleright$ q e não $A[q]$
se $k > i$
  então devolva SELECT-BFPRT $(A, p, q - 1, i)$
  senão devolva SELECT-BFPRT $(A, q + 1, d, i - k)$

Particione-BFPRT



Rearranja $A[p \,.\,.\, d]$ e devolve um índice q, $p \leq q \leq d$, tal que
$A[p \,.\,.\, q{-}1] \leq A[q] < A[q{+}1 \,.\,.\, d]$ **e**

$$\max\{k-1, n-k\} \leq \left\lfloor \frac{7n}{10} \right\rfloor + 6,$$

onde $n = d - p + 1$ e $k = q - p + 1$.

Suponha que

$P(n) :=$ consumo de tempo máximo do algoritmo
PARTICIONE-BFPRT quando $n = d - p + 1$

Consumo de tempo

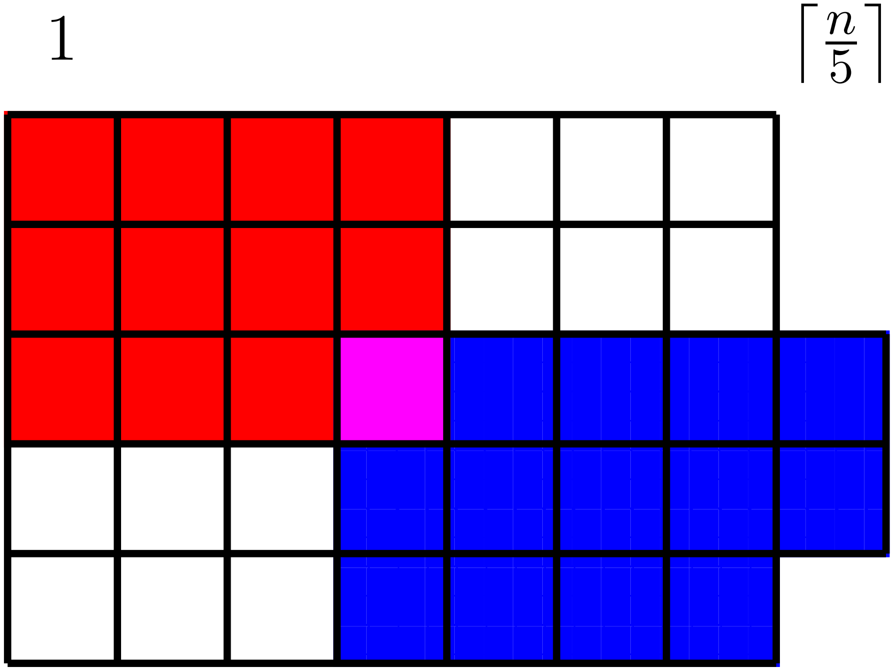
$T(n) :=$ consumo de tempo máximo do algoritmo SELECT-BFPRT quando $n = d - p + 1$

linha	consumo de todas as execuções da linha
1-2	$= 2\,\Theta(1)$
3	$= P(n)$
4-7	$= 4\,\Theta(1)$
8	$= T(k-1)$
9	$= T(n-k)$

$$T(n) = 6\,\Theta(1) + P(n) + \max\{T(k-1), T(n-k)\}$$

$$\leq \Theta(1) + P(n) + T(\lfloor \tfrac{7n}{10} \rfloor + 6)$$

Particione-BFPRT



$$\max\{k-1, n-k\} \leq n - 3\left(\left\lceil \frac{1}{2}\left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil \right\rceil - 2\right)$$

$$\leq n - \left(\frac{3n}{10} - 6\right) = \frac{7n}{10} + 6$$

Particione-BFPRT

$n := d - p + 1$

PARTICIONE-BFPRT (A, p, d)

para $j \leftarrow p, p{+}5, p{+}5 \cdot 2, \ldots$ **até** $p{+}5(\lceil n/5 \rceil{-}1)$ **faça**

  ORDENE $(A, j, j{+}4)$

ORDENE $(A, p{+}5\lfloor n/5 \rfloor, n)$

para $j \leftarrow 1$ **até** $\lceil n/5 \rceil{-}1$ **faça**

  $B[j] \leftarrow A[p{+}5j{-}3]$

$B[\lceil n/5 \rceil] \leftarrow A[\lfloor (p{+}5\lfloor n/5 \rfloor{+}n)/2 \rfloor]$

$k \leftarrow$ SELECT-BFPRT$(B, 1, \lceil n/5 \rceil, \lfloor (\lceil n/5 \rceil{+}1)/2 \rfloor)$

$A[k] \leftrightarrow A[d]$

devolva PARTICIONE (A, p, d)

Particione-BFPRT

$n := d - p + 1$

PARTICIONE-BFPRT (A, p, d)

para $j \leftarrow p, p{+}5, p{+}5 \cdot 2, \ldots$ **até** $p{+}5(\lceil n/5 \rceil {-} 1)$ **faça**
    ORDENE $(A, j, j{+}4)$
ORDENE $(A, p{+}5\lfloor n/5 \rfloor, n)$

para $j \leftarrow 1$ **até** $\lceil n/5 \rceil {-} 1$ **faça**
    $A[j] \leftrightarrow A[p{+}5j{-}3]$
$A[\lceil n/5 \rceil] \leftrightarrow A[\lfloor (p{+}5\lfloor n/5 \rfloor{+}n)/2 \rfloor]$

$k \leftarrow$ SELECT-BFPRT$(A, p, p{+}\lceil n/5 \rceil{-}1, \lfloor (\lceil n/5 \rceil{+}1)/2 \rfloor)$

$A[k] \leftrightarrow A[d]$
devolva PARTICIONE (A, p, d)

Consumo de tempo do Particione-BFPRT

$P(n) :=$ consumo de tempo máximo do algoritmo PARTICIONE-BFPRT quando $n = d - p + 1$

linha	consumo de todas as execuções da linha
1-3	$= \lceil n/5 \rceil \, \Theta(1)$
4-6	$= \lceil n/5 \rceil \, \Theta(1)$
7	$= T(\lceil n/5 \rceil)$
8	$= \Theta(1)$
9	$= \Theta(n)$

$$P(n) = \Theta(2\lceil n/5 \rceil + n + 1) + T(\lceil n/5 \rceil)$$

$$= \Theta(n) + T(\lceil n/5 \rceil)$$

Consumo de tempo do Select-BFPRT

$T(n) :=$ consumo de tempo máximo do algoritmo SELECT-BFPRT quando $n = d - p + 1$

Temos que

$$T(1) = \Theta(1)$$

$$\begin{aligned} T(n) &\leq \Theta(1) + P(n) + T\left(\left\lfloor \frac{7n}{10} \right\rfloor + 6\right) \\ &\leq \Theta(1) + \Theta(n) + T\left(\left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil\right) + T\left(\left\lfloor \frac{7n}{10} \right\rfloor + 6\right) \\ &= \Theta(n) + T\left(\left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil\right) + T\left(\left\lfloor \frac{7n}{10} \right\rfloor + 6\right) \end{aligned}$$

para $n = 2, 3, \ldots$,

Consumo de tempo do Select-BFPRT

$T(n)$ pertence a mesma classe O que:

$$S(n) = 1 \quad \text{para } n < 30$$

$$S(n) \le S\left(\left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil\right) + S\left(\left\lfloor \frac{7n}{10} \right\rfloor + 6\right) + n \quad \text{para } n \ge 30$$

n	30	60	90	120	150	180	210	240	270	300
$S(n)$	32	185	330	451	572	732	902	1040	1224	1439

Vamos verificar que $S(n) < 80\,n$ para $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$

Prova: Se $n = 1, \ldots, 29$, então $S(n) = 1 < 80 < 80n$.
Se $n = 30, \ldots, 99$, então

$$S(n) < S(120) = 451 < 80 \times 30 \le 80n.$$

Recorrência

Se $n \geq 100$, então

$$
\begin{aligned}
S(n) &\leq S\left(\left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil\right) + S\left(\left\lfloor \frac{7n}{10} \right\rfloor + 6\right) + n \\
&\overset{\text{hi}}{<} 80 \left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil + 80 \left(\left\lfloor \frac{7n}{10} \right\rfloor + 6\right) + n \\
&\leq 80 \left(\frac{n}{5} + 1\right) + 80 \left(\frac{7n}{10} + 6\right) + n \\
&= 80\frac{n}{5} + 80 + 80\frac{7n}{10} + 480 + n \\
&= 16n + 56n + n + 560 \\
&= 73n + 560 \\
&< 80n \quad \text{(pois } n \geq 100\text{).}
\end{aligned}
$$

Logo, $T(n)$ é $\mathrm{O}(n)$.

Como adivinhei classe O?

Árvore da recorrência: $S(n)$

Como adivinhei classe O?

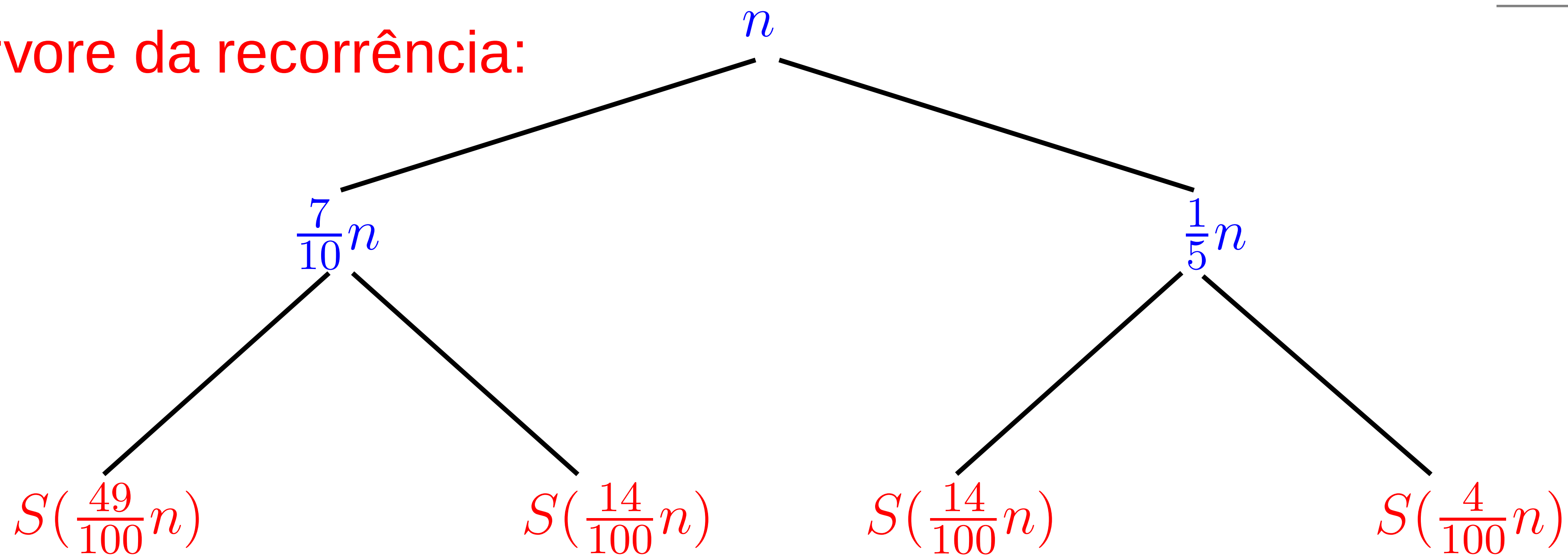
Árvore da recorrência:

$$n$$

$$S(\tfrac{7}{10}n) \qquad\qquad S(\tfrac{1}{5}n)$$

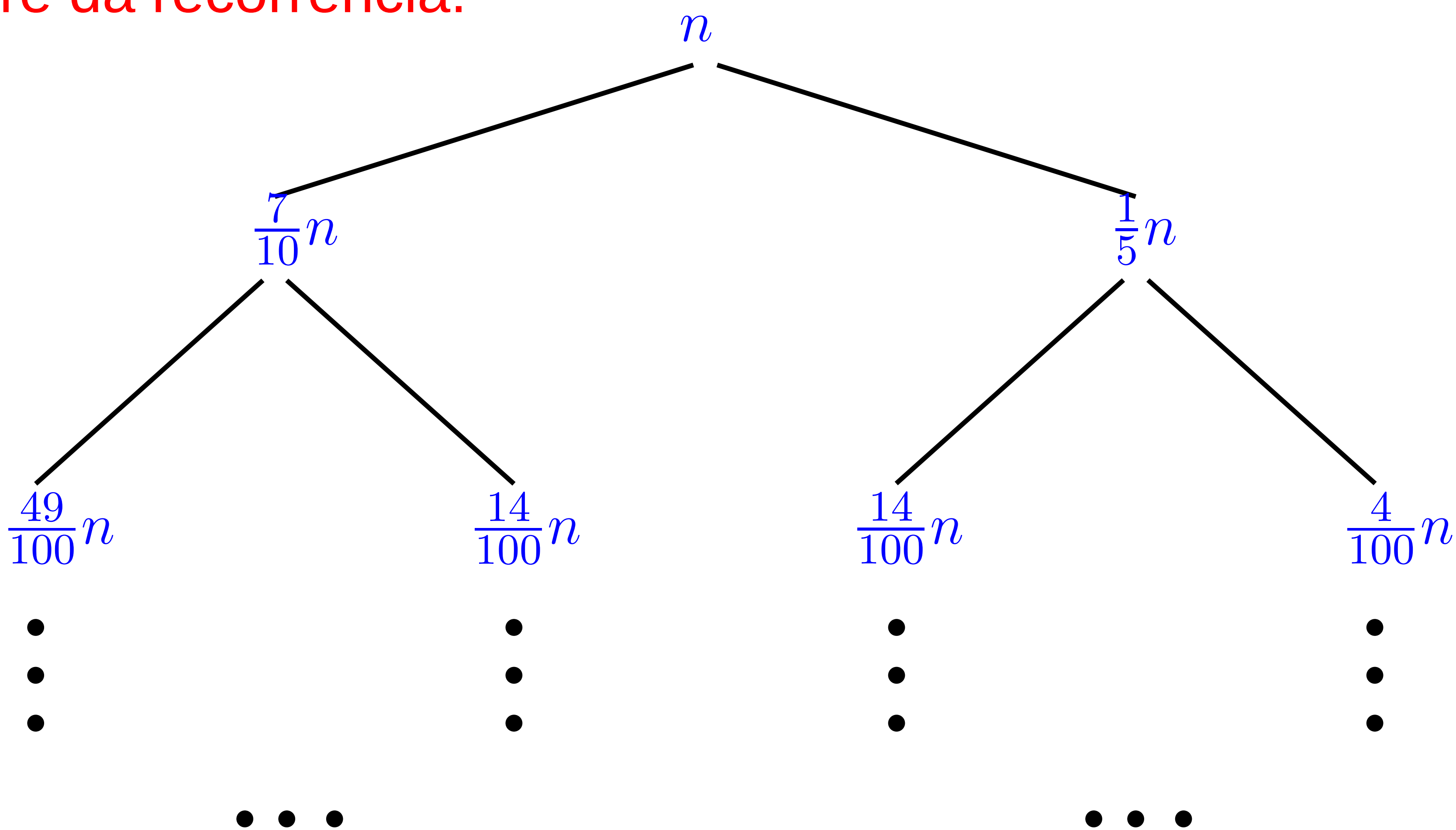
Como adivinhei classe O?

Árvore da recorrência:



Como adivinhei classe O?

Árvore da recorrência:



Contas

nível	0	1	2	$\dots$	$k-1$	k
soma	n	$\frac{9}{10}n$	$\frac{9^2}{10^2}n$	$\dots$	$\frac{9^{k-1}}{10^{k-1}}n$	$\frac{9^k}{10^k}n$

$$\frac{10^{k-1}}{9^{k-1}} < n \leq \frac{10^k}{9^k} \Rightarrow k = \lceil \log_{\frac{10}{9}} n \rceil$$

$$\begin{aligned} S(n) &= n + \frac{9}{10}n + \cdots + \frac{9^{k-1}}{10^{k-1}}n + \frac{9^k}{10^k}n \\ &= (1 + \frac{9}{10} + \cdots + \frac{9^k}{10^k})n \\ &= 10(1 - \frac{9^{k+1}}{10^{k+1}})n \\ &< 10n \end{aligned}$$

Conclusão

O consumo de tempo do algoritmo SELECT-BFPRT é $O(n)$.