Análise de Algoritmos

CLRS 2.3, 4.1 e 4.2

Essas transparências foram adaptadas das transparências do Prof. Paulo Feofiloff e do Prof. José Coelho de Pina.

Divisão e conquista

Esse paradigma envolve os seguintes passos:

Divisão e conquista

Esse paradigma envolve os seguintes passos:

Divisão: dividir a instância do problema em instâncias menores do problema.

Divisão e conquista

Esse paradigma envolve os seguintes passos:

Divisão: dividir a instância do problema em instâncias menores do problema.

Conquista: resolver o problema nas instâncias menores recursivamente (ou diretamente, se elas forem pequenas o suficiente).

Divisão e conquista

Esse paradigma envolve os seguintes passos:

Divisão: dividir a instância do problema em instâncias menores do problema.

Conquista: resolver o problema nas instâncias menores recursivamente (ou diretamente, se elas forem pequenas o suficiente).

Combinação: combinar as soluções das instâncias menores para gerar uma solução da instância original.

Merge-Sort

Rearranja $A[p \,..\, r]$, com $p \leq r$, em ordem crescente.

Método: Divisão e conquista.

```
MERGESORT (A, p, r)
    se p < r
        então q ← ⌊(p + r)/2⌋
            MERGESORT (A, p, q)
            MERGESORT (A, q + 1, r)
            INTERCALA (A, p, q, r)
```

Intercalação

Problema: Dados $A[p\,..\,q]$ e $A[q{+}1\,..\,r]$ crescentes, rearranjar $A[p\,..\,r]$ de modo que ele fique em ordem crescente.

Para que valores de q o problema faz sentido?

Entra:

	p				q				r
A	22	33	55	77	99	11	44	66	88

Intercalação

Problema: Dados $A[p \mathinner{.\,.} q]$ e $A[q+1 \mathinner{.\,.} r]$ crescentes, rearranjar $A[p \mathinner{.\,.} r]$ de modo que ele fique em ordem crescente.

Para que valores de q o problema faz sentido?

Entra:

	p				q				r
A	22	33	55	77	99	11	44	66	88

Sai:

	p				q				r
A	11	22	33	44	55	66	77	88	99

Intercalação

INTERCALA (A, p, q, r)

$\triangleright$ $B[p\,.\,.\,r]$ é um vetor auxiliar
para $i \leftarrow p$ **até** q **faça**
    $B[i] \leftarrow A[i]$
para $j \leftarrow q + 1$ **até** r **faça**
    $B[r + q + 1 - j] \leftarrow A[j]$
$i \leftarrow p$
$j \leftarrow r$
para $k \leftarrow p$ **até** r **faça**
    se $B[i] \leq B[j]$
        então $A[k] \leftarrow B[i]$
            $i \leftarrow i + 1$
        senão $A[k] \leftarrow B[j]$
            $j \leftarrow j - 1$

Simulação

	p				q				r
A	22	33	55	77	99	11	44	66	88
B									

Simulação

	k								
A									

	i								j
B	22	33	55	77	99	88	66	44	11

Simulação

		k							
A	11								

	i							j	
B	22	33	55	77	99	88	66	44	11

Simulação

			k						
A	11	22							

		i						j	
B	22	33	55	77	99	88	66	44	11

Simulação

				k					
A	11	22	33						

			i					j	
B	22	33	55	77	99	88	66	44	11

Simulação

					k				
A	11	22	33	44					

			i				j		
B	22	33	55	77	99	88	66	44	11

Simulação

						k			
A	11	22	33	44	55				

				i			j		
B	22	33	55	77	99	88	66	44	11

Simulação

							k		
A	11	22	33	44	55	66			

				i		j			
B	22	33	55	77	99	88	66	44	11

Simulação

								k	
A	11	22	33	44	55	66	77		

					i	j			
B	22	33	55	77	99	88	66	44	11

Simulação

								k
11	22	33	44	55	66	77	88	

A

				$i = j$				
22	33	55	77	99	88	66	44	11

B

Simulação

A	11	22	33	44	55	66	77	88	99

					j	i			
B	22	33	55	77	99	88	66	44	11

Consumo de tempo

Quanto tempo consome em função de $n := r - p + 1$?

linha	consumo de todas as execuções da linha
1	$\Theta(n)$
2	$\Theta(n)$
3	$\Theta(n)$
4	$\Theta(n)$
5–6	$\Theta(1)$
7	$\Theta(n)$
8	$\Theta(n)$
9–12	$\Theta(n)$
total	$\Theta(7n + 1) = \Theta(n)$

Conclusão

O algoritmo INTERCALA consome
$\Theta(n)$ unidades de tempo.

Também escreve-se

O algoritmo INTERCALA consome
tempo $\Theta(n)$.

Mergesort

MERGESORT (A, p, r)
1 **se** $p < r$
2 **então** $q \leftarrow \lfloor (p + r)/2 \rfloor$
3 MERGESORT (A, p, q)
4 MERGESORT $(A, q + 1, r)$
5 INTERCALA (A, p, q, r)

linha	consumo máximo na linha
1	$\Theta(1)$
2	$\Theta(1)$
3	$T(\lceil n/2 \rceil)$
4	$T(\lfloor n/2 \rfloor)$
5	$\Theta(n)$

$$T(n) = T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n)$$

Mergesort

$T(n) :=$ consumo de tempo máximo quando $n = r - p + 1$

$$T(n) = T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n) \qquad (1)$$

Solução: $T(n)$ é $\Theta(???)$.

Receita:

- Substitua a notação assintótica por função da classe.
- Restrinja-se a n potência de 2.
- Estipule que na base o valor é 1.
- Use expansão ou árvore de recorrência para determinar um “chute” de solução.
- Confira se o chute está correto.

Expansão

n potência de 2 e $k = \lg n$

Expansão

n potência de 2 e $k = \lg n$

$$T(n) = 2T(n/2) + n$$

Expansão

n potência de 2 e $k = \lg n$

$$\begin{aligned} T(n) &= 2T(n/2) + n \\ &= 2\big(2T(n/2^2) + n/2\big) + n \;=\; 2^2T(n/2^2) + 2n \end{aligned}$$

Expansão

n potência de 2 e $k = \lg n$

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 2T(n/2) + n \\
&= 2\big(2T(n/2^2) + n/2\big) + n \;=\; 2^2 T(n/2^2) + 2n \\
&= 2^2\big(2T(n/2^3) + n/2^2\big) + 2n \;=\; 2^3 T(n/2^3) + 3n
\end{aligned}
$$

Expansão

n potência de 2 e $k = \lg n$

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 2T(n/2) + n \\
&= 2\big(2T(n/2^2) + n/2\big) + n \;=\; 2^2T(n/2^2) + 2n \\
&= 2^2\big(2T(n/2^3) + n/2^2\big) + 2n \;=\; 2^3T(n/2^3) + 3n \\
&= 2^3\big(2T(n/2^4) + n/2^3\big) + 3n \;=\; 2^4T(n/2^4) + 4n
\end{aligned}
$$

Expansão

n potência de 2 e $k = \lg n$

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 2T(n/2) + n \\
&= 2\big(2T(n/2^2) + n/2\big) + n \;=\; 2^2T(n/2^2) + 2n \\
&= 2^2\big(2T(n/2^3) + n/2^2\big) + 2n \;=\; 2^3T(n/2^3) + 3n \\
&= 2^3\big(2T(n/2^4) + n/2^3\big) + 3n \;=\; 2^4T(n/2^4) + 4n \\
&= \ldots \;=\; 2^kT(n/2^k) + kn
\end{aligned}
$$

Expansão

n potência de 2 e $k = \lg n$

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 2T(n/2) + n \\
&= 2\big(2T(n/2^2) + n/2\big) + n \ = \ 2^2T(n/2^2) + 2n \\
&= 2^2\big(2T(n/2^3) + n/2^2\big) + 2n \ = \ 2^3T(n/2^3) + 3n \\
&= 2^3\big(2T(n/2^4) + n/2^3\big) + 3n \ = \ 2^4T(n/2^4) + 4n \\
&= \ \ldots \ = \ 2^kT(n/2^k) + kn \\
&= n + n\lg n \ = \ \Theta(n\lg n)
\end{aligned}
$$

Conclusão:

O MERGESORT consume $\Theta(n\lg n)$ unidades de tempo.

Conferência

n potência de 2 e $k = \lg n$

$T(n) \;=\; 2\,T(n/2) + n$ (e, deixamos implícito, $T(1) = 1$)

Afirmação: $T(n) = n + n \lg n$.

Conferência

n potência de 2 e $k = \lg n$

$T(n) \;=\; 2\,T(n/2) + n$ (e, deixamos implícito, $T(1) = 1$)

Afirmação: $T(n) = n + n \lg n$.

Prova por indução em k.

Conferência

n potência de 2 e $k = \lg n$

$T(n) \ = \ 2\,T(n/2) + n$ (e, deixamos implícito, $T(1) = 1$)

Afirmação: $T(n) = n + n \lg n$.

Prova por indução em k.

Afirmação reescrita em termos de k: $T(2^k) = 2^k + k\,2^k$.

Para $k = 0$, temos que $T(2^0) = T(1) = 1 = 2^0 + 0 \cdot 2^0$.

Conferência

n potência de 2 e $k = \lg n$

$T(n) \; = \; 2\,T(n/2) + n$ (e, deixamos implícito, $T(1) = 1$)

Afirmação: $T(n) = n + n \lg n$.

Prova por indução em k.

Afirmação reescrita em termos de k: $T(2^k) = 2^k + k\,2^k$.

Para $k = 0$, temos que $T(2^0) = T(1) = 1 = 2^0 + 0 \cdot 2^0$.

Para $k \geq 1$, suponha que $T(2^{k-1}) = 2^{k-1} + (k-1)2^{k-1}$.

Conferência

n potência de 2 e $k = \lg n$

$T(n) \; = \; 2\,T(n/2) + n$ (e, deixamos implícito, $T(1) = 1$)

Afirmação: $T(n) = n + n \lg n$.

Prova por indução em k.

Afirmação reescrita em termos de k: $T(2^k) = 2^k + k\,2^k$.

Para $k = 0$, temos que $T(2^0) = T(1) = 1 = 2^0 + 0 \cdot 2^0$.

Para $k \geq 1$, suponha que $T(2^{k-1}) = 2^{k-1} + (k-1)2^{k-1}$.

Então $T(2^k) = 2\,T(2^{k-1}) + 2^k$ pela recorrência.

Conferência

n potência de 2 e $k = \lg n$

$T(n) \ = \ 2\,T(n/2) + n$ (e, deixamos implícito, $T(1) = 1$)

Afirmação: $T(n) = n + n \lg n$.

Prova por indução em k.

Afirmação reescrita em termos de k: $T(2^k) = 2^k + k\,2^k$.

Para $k = 0$, temos que $T(2^0) = T(1) = 1 = 2^0 + 0 \cdot 2^0$.

Para $k \geq 1$, suponha que $T(2^{k-1}) = 2^{k-1} + (k-1)2^{k-1}$.

Então $T(2^k) = 2\,T(2^{k-1}) + 2^k$ pela recorrência.

Logo $T(2^k) = 2\,(2^{k-1} + (k-1)2^{k-1}) + 2^k$

$$= 2^k + (k-1)\,2^k + 2^k = 2^k + k\,2^k. \blacksquare$$

Exemplos

- $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(1)$
- $T(n) = T(n-1) + \Theta(n)$
- $T(n) = 3T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n)$
- $T(n) = 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n^2)$

Exemplos

- $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(1)$ $\qquad \Theta(\lg n)$
- $T(n) = T(n-1) + \Theta(n)$ $\qquad \Theta(n^2)$
- $T(n) = 3T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n)$ $\qquad \Theta(n^{\lg 3})$
- $T(n) = 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n^2)$ $\qquad \Theta(n^2)$

Resolvidos na aula!