

# Análise de Algoritmos

CLRS 2.3, 4.1 e 4.2

Essas transparências foram adaptadas das transparências do Prof. Paulo Feofiloff e do Prof. José Coelho de Pina.

# Divisão e conquista

Esse paradigma envolve os seguintes passos:

# Divisão e conquista

Esse paradigma envolve os seguintes passos:

**Divisão:** dividir a instância do problema em instâncias menores do problema.

# Divisão e conquista

Esse paradigma envolve os seguintes passos:

**Divisão:** dividir a instância do problema em instâncias menores do problema.

**Conquista:** resolver o problema nas instâncias menores recursivamente (ou diretamente, se elas forem pequenas o suficiente).

# Divisão e conquista

Esse paradigma envolve os seguintes passos:

**Divisão:** dividir a instância do problema em instâncias menores do problema.

**Conquista:** resolver o problema nas instâncias menores recursivamente (ou diretamente, se elas forem pequenas o suficiente).

**Combinação:** combinar as soluções das instâncias menores para gerar uma solução da instância original.

# Merge-Sort

Rearranja  $A[p..r]$ , com  $p \leq r$ , em ordem crescente.

**Método:** Divisão e conquista.

**MERGESORT** ( $A, p, r$ )

1     **se**  $p < r$

2             **então**  $q \leftarrow \lfloor (p + r) / 2 \rfloor$

3             **MERGESORT** ( $A, p, q$ )

4             **MERGESORT** ( $A, q + 1, r$ )

5             **INTERCALA** ( $A, p, q, r$ )

# Intercalação

**Problema:** Dados  $A[p..q]$  e  $A[q+1..r]$  crescentes, rearranjar  $A[p..r]$  de modo que ele fique em ordem crescente.

Para que valores de  $q$  o problema faz sentido?

Entra:

	$p$			$q$				$r$	
$A$	22	33	55	77	99	11	44	66	88

# Intercalação

**Problema:** Dados  $A[p..q]$  e  $A[q+1..r]$  crescentes, rearranjar  $A[p..r]$  de modo que ele fique em ordem crescente.

Para que valores de  $q$  o problema faz sentido?

Entra:

	$p$			$q$				$r$	
A	22	33	55	77	99	11	44	66	88

Sai:

	$p$			$q$				$r$	
A	11	22	33	44	55	66	77	88	99

# Intercalação

**INTERCALA** ( $A, p, q, r$ )

0     $\triangleright B[p..r]$  é um vetor auxiliar

1    **para**  $i \leftarrow p$  **até**  $q$  **faça**

2         $B[i] \leftarrow A[i]$

3    **para**  $j \leftarrow q + 1$  **até**  $r$  **faça**

4         $B[r + q + 1 - j] \leftarrow A[j]$

5     $i \leftarrow p$

6     $j \leftarrow r$

7    **para**  $k \leftarrow p$  **até**  $r$  **faça**

8        **se**  $B[i] \leq B[j]$

9            **então**  $A[k] \leftarrow B[i]$

10             $i \leftarrow i + 1$

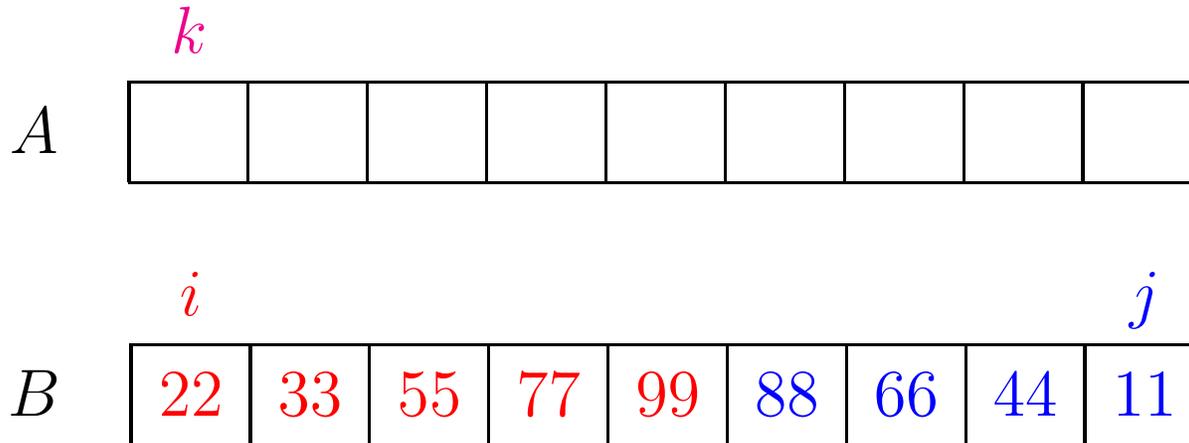
11            **senão**  $A[k] \leftarrow B[j]$

12             $j \leftarrow j - 1$

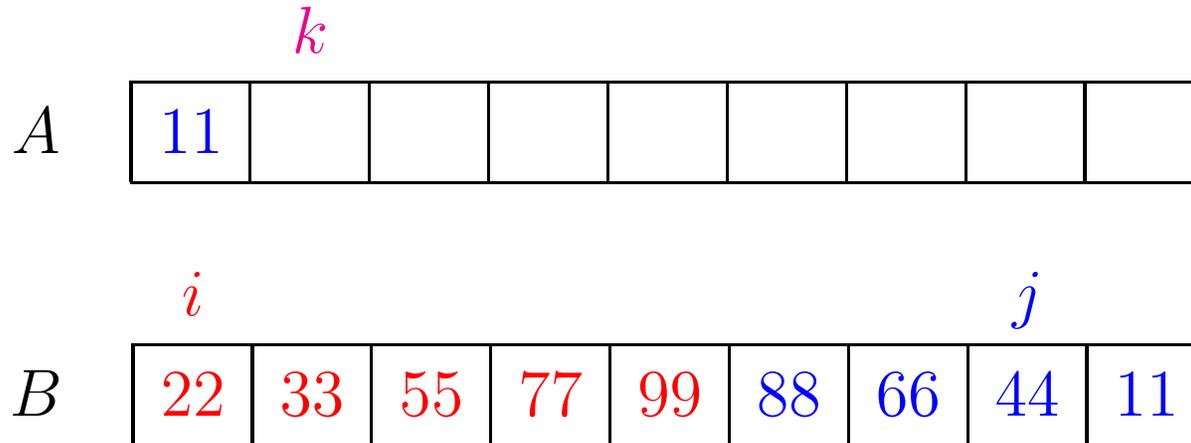
# Simulação

	<i>p</i>			<i>q</i>				<i>r</i>	
<i>A</i>	22	33	55	77	99	11	44	66	88
<i>B</i>									

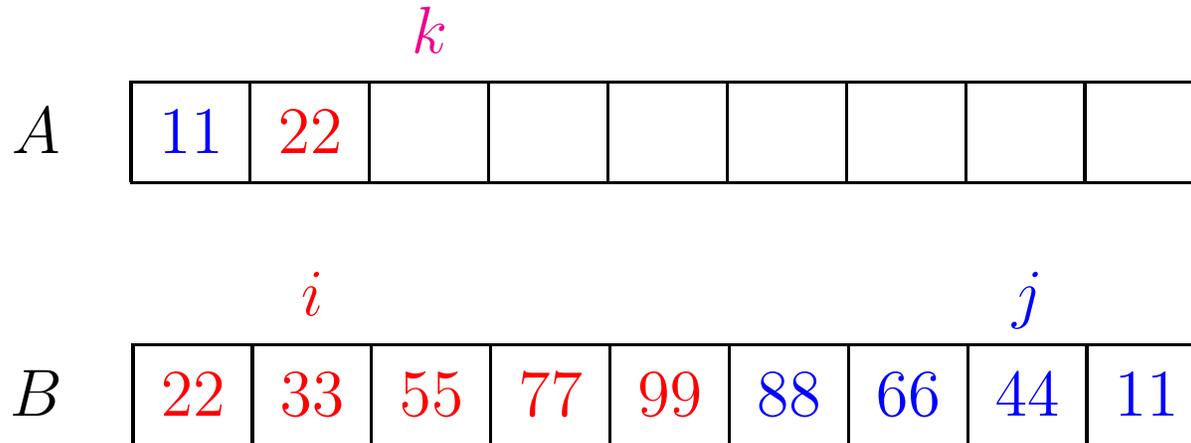
# Simulação



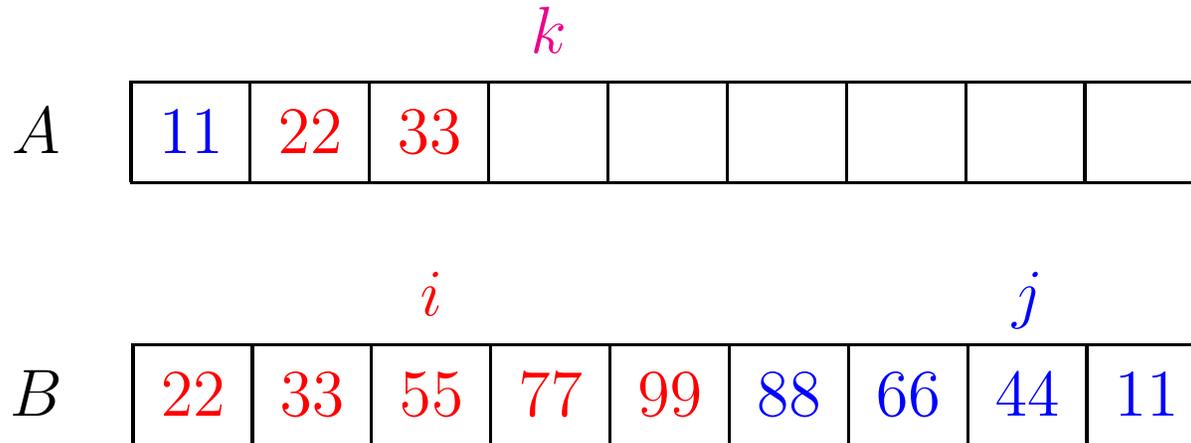
# Simulação



# Simulação

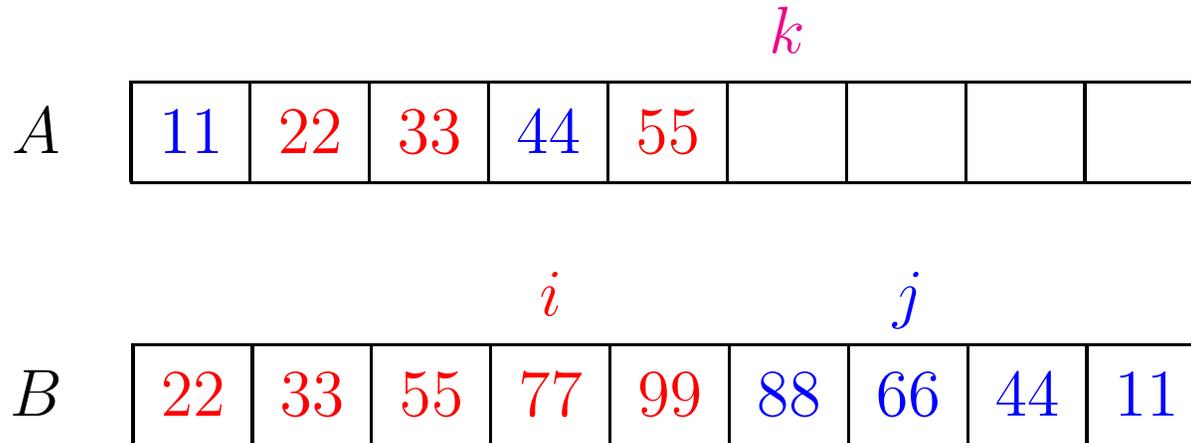


# Simulação

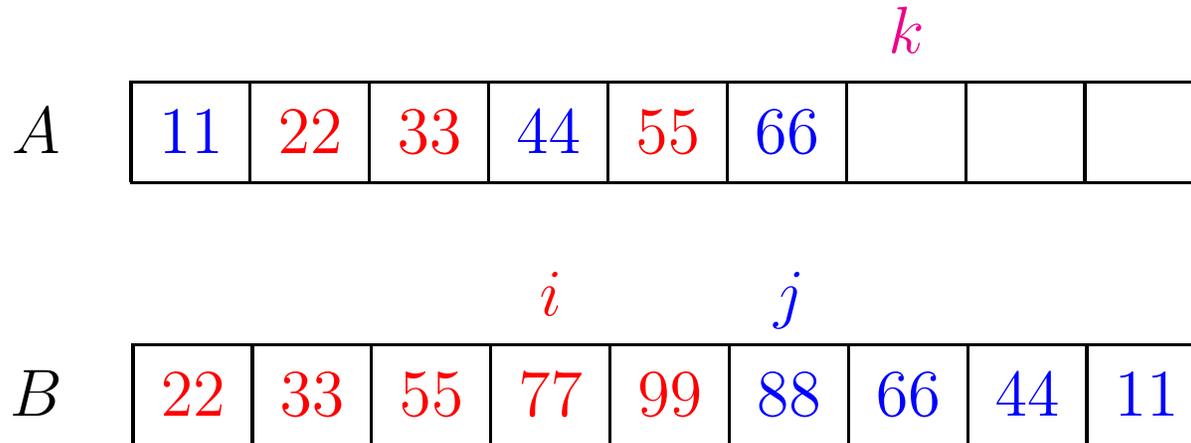




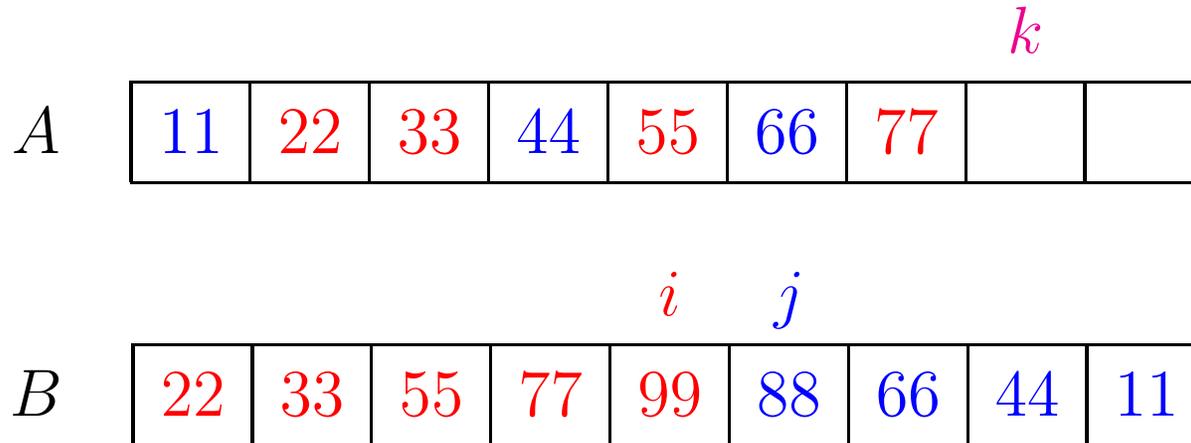
# Simulação



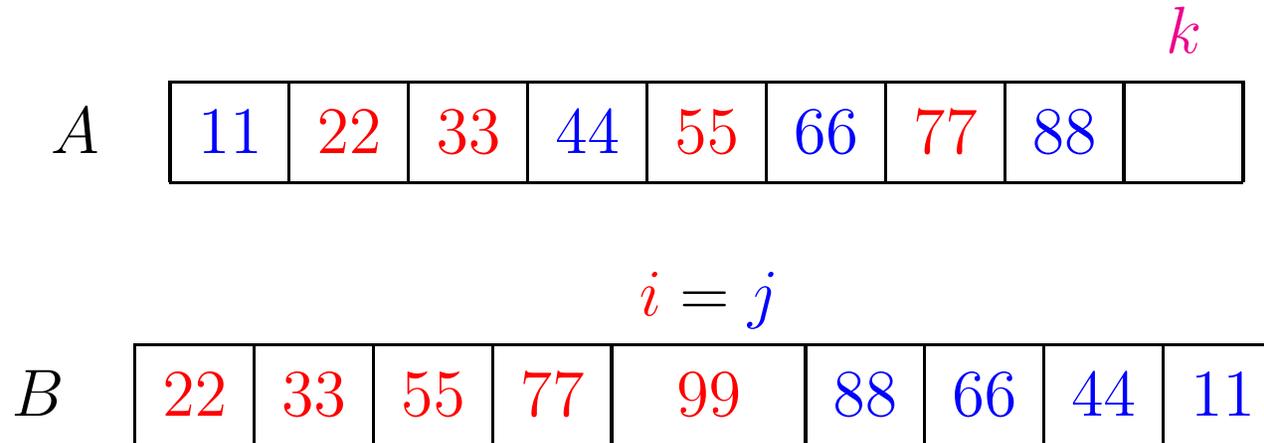
# Simulação



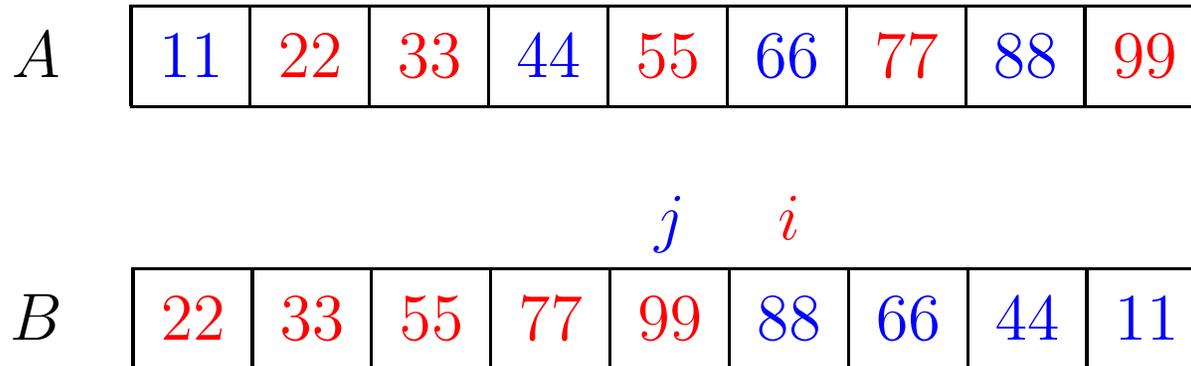
# Simulação



# Simulação



# Simulação



# Consumo de tempo

Quanto tempo consome em função de  $n := r - p + 1$ ?

linha    consumo de todas as execuções da linha

---

1             $\Theta(n)$

2             $\Theta(n)$

3             $\Theta(n)$

4             $\Theta(n)$

5–6          $\Theta(1)$

7             $\Theta(n)$

8             $\Theta(n)$

9–12         $\Theta(n)$

---

**total**         $\Theta(7n + 1) = \Theta(n)$

# Conclusão

O algoritmo **INTERCALA** consome  $\Theta(n)$  unidades de tempo.

Também escreve-se

O algoritmo **INTERCALA** consome tempo  $\Theta(n)$ .

# Mergesort

MERGESORT ( $A, p, r$ )

```
1  se  $p < r$ 
2      então  $q \leftarrow \lfloor (p + r) / 2 \rfloor$ 
3          MERGESORT ( $A, p, q$ )
4          MERGESORT ( $A, q + 1, r$ )
5          INTERCALA ( $A, p, q, r$ )
```

linha	consumo máximo na linha
1	$\Theta(1)$
2	$\Theta(1)$
3	$T(\lceil n/2 \rceil)$
4	$T(\lfloor n/2 \rfloor)$
5	$\Theta(n)$

$$T(n) = T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n)$$

# Mergesort

$T(n)$  := consumo de tempo **máximo** quando  $n = r - p + 1$

$$T(n) = T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n) \quad (1)$$

**Solução:**  $T(n)$  é  $\Theta(???)$ .

**Receita:**

- Substitua a notação assintótica por função da classe.
- Restrinja-se a  $n$  potência de 2.
- Estipule que na base o valor é 1.
- Use expansão ou árvore de recorrência para determinar um “chute” de solução.
- Confira se o chute está correto.

# Expansão

$n$  potência de 2 e  $k = \lg n$

# Expansão

$n$  potência de 2 e  $k = \lg n$

$$T(n) = 2T(n/2) + n$$

# Expansão

$n$  potência de 2 e  $k = \lg n$

$$\begin{aligned} T(n) &= 2T(n/2) + n \\ &= 2(2T(n/2^2) + n/2) + n = 2^2T(n/2^2) + 2n \end{aligned}$$

# Expansão

$n$  potência de 2 e  $k = \lg n$

$$\begin{aligned}T(n) &= 2T(n/2) + n \\&= 2(2T(n/2^2) + n/2) + n = 2^2T(n/2^2) + 2n \\&= 2^2(2T(n/2^3) + n/2^2) + 2n = 2^3T(n/2^3) + 3n\end{aligned}$$

# Expansão

$n$  potência de 2 e  $k = \lg n$

$$T(n) = 2T(n/2) + n$$

$$= 2(2T(n/2^2) + n/2) + n = 2^2T(n/2^2) + 2n$$

$$= 2^2(2T(n/2^3) + n/2^2) + 2n = 2^3T(n/2^3) + 3n$$

$$= 2^3(2T(n/2^4) + n/2^3) + 3n = 2^4T(n/2^4) + 4n$$

# Expansão

$n$  potência de 2 e  $k = \lg n$

$$\begin{aligned}T(n) &= 2T(n/2) + n \\&= 2(2T(n/2^2) + n/2) + n = 2^2T(n/2^2) + 2n \\&= 2^2(2T(n/2^3) + n/2^2) + 2n = 2^3T(n/2^3) + 3n \\&= 2^3(2T(n/2^4) + n/2^3) + 3n = 2^4T(n/2^4) + 4n \\&= \dots = 2^kT(n/2^k) + kn\end{aligned}$$

# Expansão

$n$  potência de 2 e  $k = \lg n$

$$\begin{aligned}T(n) &= 2T(n/2) + n \\&= 2(2T(n/2^2) + n/2) + n = 2^2T(n/2^2) + 2n \\&= 2^2(2T(n/2^3) + n/2^2) + 2n = 2^3T(n/2^3) + 3n \\&= 2^3(2T(n/2^4) + n/2^3) + 3n = 2^4T(n/2^4) + 4n \\&= \dots = 2^kT(n/2^k) + kn \\&= n + n \lg n = \Theta(n \lg n)\end{aligned}$$

**Conclusão:**

O **MERGESORT** consume  $\Theta(n \lg n)$  unidades de tempo.

# Conferência

$n$  potência de 2 e  $k = \lg n$

$T(n) = 2T(n/2) + n$  (e, deixamos implícito,  $T(1) = 1$ )

**Afirmção:**  $T(n) = n + n \lg n$ .

# Conferência

$n$  potência de 2 e  $k = \lg n$

$T(n) = 2T(n/2) + n$  (e, deixamos implícito,  $T(1) = 1$ )

**Afirmação:**  $T(n) = n + n \lg n$ .

Prova por indução em  $k$ .

# Conferência

$n$  potência de 2 e  $k = \lg n$

$T(n) = 2T(n/2) + n$  (e, deixamos implícito,  $T(1) = 1$ )

**Afirmção:**  $T(n) = n + n \lg n$ .

Prova por indução em  $k$ .

**Afirmção reescrita em termos de  $k$ :**  $T(2^k) = 2^k + k 2^k$ .

Para  $k = 0$ , temos que  $T(2^0) = T(1) = 1 = 2^0 + 0 \cdot 2^0$ .

# Conferência

$n$  potência de 2 e  $k = \lg n$

$T(n) = 2T(n/2) + n$  (e, deixamos implícito,  $T(1) = 1$ )

**Afirmção:**  $T(n) = n + n \lg n$ .

Prova por indução em  $k$ .

**Afirmção reescrita em termos de  $k$ :**  $T(2^k) = 2^k + k 2^k$ .

Para  $k = 0$ , temos que  $T(2^0) = T(1) = 1 = 2^0 + 0 \cdot 2^0$ .

Para  $k \geq 1$ , suponha que  $T(2^{k-1}) = 2^{k-1} + (k-1)2^{k-1}$ .

# Conferência

$n$  potência de 2 e  $k = \lg n$

$T(n) = 2T(n/2) + n$  (e, deixamos implícito,  $T(1) = 1$ )

**Afirmção:**  $T(n) = n + n \lg n$ .

Prova por indução em  $k$ .

**Afirmção reescrita em termos de  $k$ :**  $T(2^k) = 2^k + k 2^k$ .

Para  $k = 0$ , temos que  $T(2^0) = T(1) = 1 = 2^0 + 0 \cdot 2^0$ .

Para  $k \geq 1$ , suponha que  $T(2^{k-1}) = 2^{k-1} + (k-1)2^{k-1}$ .

Então  $T(2^k) = 2T(2^{k-1}) + 2^k$  pela recorrência.

# Conferência

$n$  potência de 2 e  $k = \lg n$

$T(n) = 2T(n/2) + n$  (e, deixamos implícito,  $T(1) = 1$ )

**Afirmção:**  $T(n) = n + n \lg n$ .

Prova por indução em  $k$ .

**Afirmção reescrita em termos de  $k$ :**  $T(2^k) = 2^k + k 2^k$ .

Para  $k = 0$ , temos que  $T(2^0) = T(1) = 1 = 2^0 + 0 \cdot 2^0$ .

Para  $k \geq 1$ , suponha que  $T(2^{k-1}) = 2^{k-1} + (k-1)2^{k-1}$ .

Então  $T(2^k) = 2T(2^{k-1}) + 2^k$  pela recorrência.

Logo  $T(2^k) = 2(2^{k-1} + (k-1)2^{k-1}) + 2^k$   
 $= 2^k + (k-1)2^k + 2^k = 2^k + k 2^k$ . ■

# Exemplos

- $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(1)$

- $T(n) = T(n - 1) + \Theta(n)$

- $T(n) = 3T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n)$

- $T(n) = 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n^2)$

# Exemplos

$$\bullet T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(1) \qquad \Theta(\lg n)$$

$$\bullet T(n) = T(n - 1) + \Theta(n) \qquad \Theta(n^2)$$

$$\bullet T(n) = 3T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n) \qquad \Theta(n^{\lg 3})$$

$$\bullet T(n) = 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n^2) \qquad \Theta(n^2)$$

Resolvidos na aula!