

Análise de Algoritmos

CLRS 4.2 e KT 5.5

Essas transparências foram adaptadas das transparências do Prof. Paulo Feofiloff e do Prof. José Coelho de Pina.

Multiplicação de inteiros gigantes

n := número de algarismos.

Problema: Dados dois números inteiros $X[1..n]$ e $Y[1..n]$ calcular o **produto** $X \cdot Y$.

Entra: Exemplo com $n = 12$

	12											1
X	9	2	3	4	5	5	4	5	6	2	9	8
Y	0	6	3	2	8	4	9	9	3	8	4	4

Multiplicação de inteiros gigantes

n := número de algarismos.

Problema: Dados dois números inteiros $X[1..n]$ e $Y[1..n]$ calcular o **produto** $X \cdot Y$.

Entra: Exemplo com $n = 12$

	12											1
X	9	2	3	4	5	5	4	5	6	2	9	8
Y	0	6	3	2	8	4	9	9	3	8	4	4

Sai:

23										$X \cdot Y$													1
5	8	4	4	0	8	7	2	8	6	7	0	2	7	1	4	1	0	2	9	5	1	2	

Algoritmo do ensino fundamental

The diagram illustrates the naive matrix multiplication algorithm using three nested loops. The first loop iterates over rows (i), the second over columns (j), and the third over elements (k). The diagram uses asterisks to represent the elements being accessed in the matrix multiplication. A multiplication sign (X) is placed to the left of the first two loops, and a horizontal line separates them from the third loop.

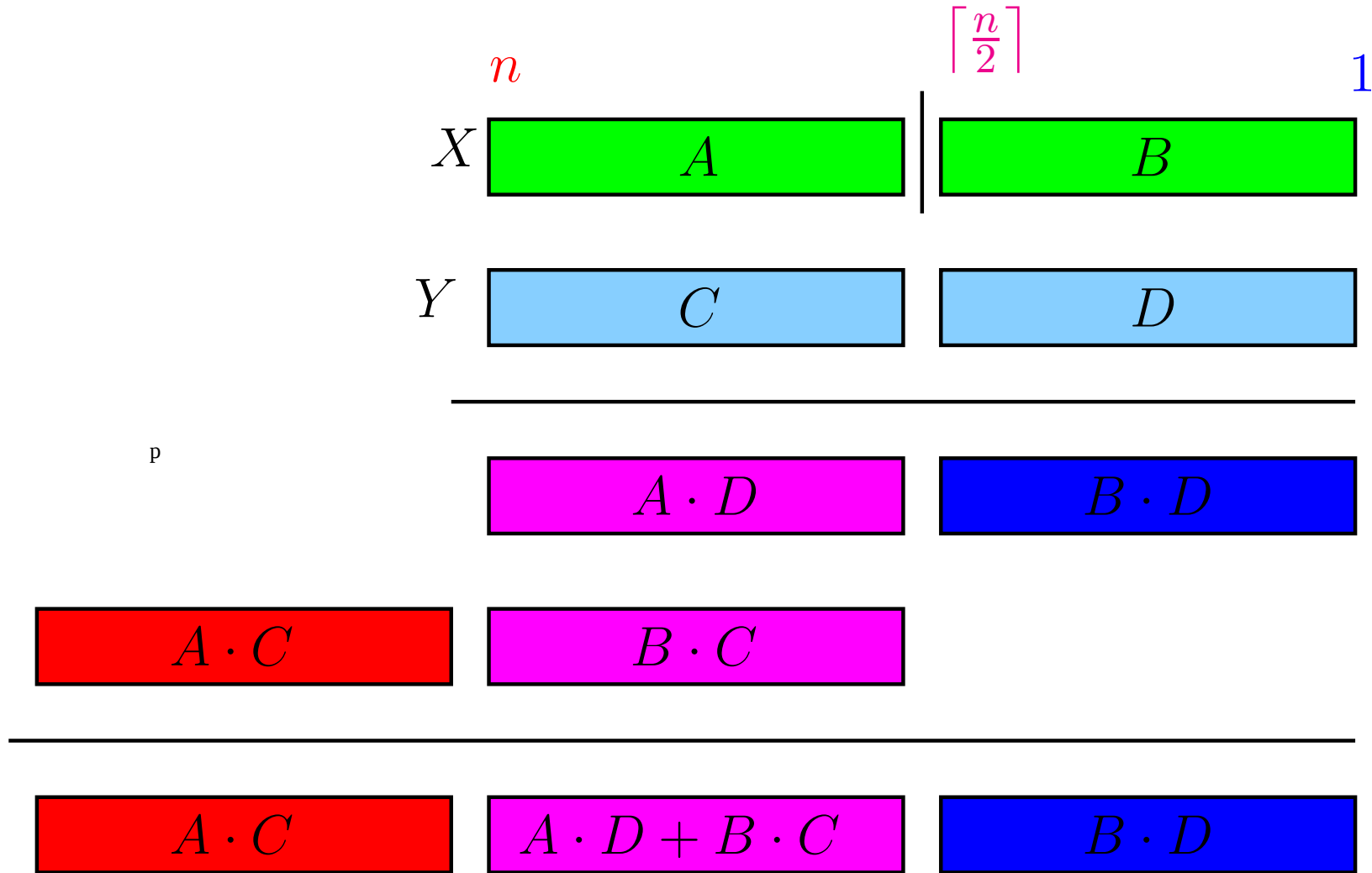
```

      * * * * * * * *
    X  * * * * * * * *
      -----
      * * * * * * * *
    * * * * * * * *
  * * * * * * * *
* * * * * * * *
-----
* * * * * * * *

```

O algoritmo do ensino fundamental é $\Theta(n^2)$.

Divisão e conquista



Exemplo

	4		1		4		1		
X	3	1	4	1	Y	5	9	3	6

Exemplo

X

	4		1
3	1	4	1

Y

	4		1
5	9	3	6

A

3	1
---	---

B

4	1
---	---

C

5	9
---	---

D

3	6
---	---

Exemplo

$$X \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & 4 & & 1 \\ \hline 3 & 1 & 4 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$Y \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & 4 & & 1 \\ \hline 5 & 9 & 3 & 6 \\ \hline \end{array}$$

$$A \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$B \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$C \begin{array}{|c|c|} \hline 5 & 9 \\ \hline \end{array}$$

$$D \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 6 \\ \hline \end{array}$$

$$X \cdot Y = A \cdot C \times 10^4 + (A \cdot D + B \cdot C) \times 10^2 + B \cdot D$$

$$A \cdot C = 1829$$

$$(A \cdot D + B \cdot C) = 1116 + 2419 = 3535$$

$$B \cdot D = 1476$$

$$A \cdot C \qquad \qquad \qquad 1 \ 8 \ 2 \ 9 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$$

$$(A \cdot D + B \cdot C) \qquad \qquad \qquad 3 \ 5 \ 3 \ 5 \ 0 \ 0$$

$$B \cdot D \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad 1 \ 4 \ 7 \ 6$$

$$X \cdot Y = \qquad \qquad \qquad 1 \ 8 \ 6 \ 4 \ 4 \ 9 \ 7 \ 6$$

Algoritmo de Multi-DC

Algoritmo recebe inteiros $X[1..n]$ e $Y[1..n]$ e devolve $X \cdot Y$.

MULT (X, Y, n)

```
1  se  $n = 1$  devolva  $X \cdot Y$ 
2   $q \leftarrow \lceil n/2 \rceil$ 
3   $A \leftarrow X[q + 1..n]$        $B \leftarrow X[1..q]$ 
4   $C \leftarrow Y[q + 1..n]$        $D \leftarrow Y[1..q]$ 
5   $E \leftarrow \text{MULT}(A, C, \lfloor n/2 \rfloor)$ 
6   $F \leftarrow \text{MULT}(B, D, \lceil n/2 \rceil)$ 
7   $G \leftarrow \text{MULT}(A, D, \lceil n/2 \rceil)$ 
8   $H \leftarrow \text{MULT}(B, C, \lceil n/2 \rceil)$ 
9   $R \leftarrow E \times 10^n + (G + H) \times 10^{\lceil n/2 \rceil} + F$ 
10 devolva  $R$ 
```

$T(n)$ = consumo de tempo do algoritmo para multiplicar dois inteiros com n algarismos.

Consumo de tempo

linha	todas as execuções da linha
1	$= \Theta(1)$
2	$= \Theta(1)$
3	$= \Theta(n)$
4	$= \Theta(n)$
5	$= T(\lfloor n/2 \rfloor)$
6	$= T(\lceil n/2 \rceil)$
7	$= T(\lceil n/2 \rceil)$
8	$= T(\lceil n/2 \rceil)$
9	$= \Theta(n)$
10	$= \Theta(n)$

$$\text{total} = T(\lfloor n/2 \rfloor) + 3T(\lceil n/2 \rceil) + \Theta(n)$$

Consumo de tempo

Sabemos que

$$T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + 3T(\lceil n/2 \rceil) + \Theta(n)$$

está na **mesma classe Θ** que a solução de

$$T'(1) = 1$$

$$T'(n) = 4T'(n/2) + n \quad \text{para } n = 2, 2^2, 2^3, \dots$$

n	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512
$T'(n)$	1	6	28	120	496	2016	8128	32640	130816	523776

Conclusões

$$T'(n) \text{ é } \Theta(n^2).$$

$$T(n) \text{ é } \Theta(n^2).$$

O consumo de tempo do algoritmo **MULT** é $\Theta(n^2)$.

Tanto trabalho por nada . . .

Será?!?

Pensar pequeno

Olhar para números com 2 algarismos ($n=2$).

Suponha $X = a b$ e $Y = c d$.

Se cada multiplicação custa R\$ 1,00 e
cada soma custa R\$ 0,01, quanto custa $X \cdot Y$?

Pensar pequeno

Olhar para números com 2 algarismos ($n=2$).

Suponha $X = ab$ e $Y = cd$.

Se cada multiplicação custa R\$ 1,00 e
cada soma custa R\$ 0,01, quanto custa $X \cdot Y$?

Eis $X \cdot Y$ por R\$ 4,03:

$$\begin{array}{rcc} X & a & b \\ Y & c & d \\ \hline & ad & bd \\ & ac & bc \\ \hline X \cdot Y & ac & ad + bc & bd \end{array}$$

$$X \cdot Y = ac \times 10^2 + (ad + bc) \times 10^1 + bd$$

Pensar pequeno

Olhar para números com 2 algarismos ($n=2$).

Suponha $X = ab$ e $Y = cd$.

Se cada multiplicação custa R\$ 1,00 e
cada soma custa R\$ 0,01, quanto custa $X \cdot Y$?

Eis $X \cdot Y$ por R\$ 4,03:

$$\begin{array}{rcc} X & a & b \\ Y & c & d \\ \hline & ad & bd \\ & ac & bc \\ \hline X \cdot Y & ac & ad + bc & bd \end{array}$$

$$X \cdot Y = ac \times 10^2 + (ad + bc) \times 10^1 + bd$$

Solução mais barata?

Pensar pequeno

Olhar para números com 2 algarismos ($n=2$).

Suponha $X = ab$ e $Y = cd$.

Se cada multiplicação custa R\$ 1,00 e
cada soma custa R\$ 0,01, quanto custa $X \cdot Y$?

Eis $X \cdot Y$ por R\$ 4,03:

$$\begin{array}{r} X \qquad \qquad a \qquad b \\ Y \qquad \qquad c \qquad d \\ \hline \qquad \qquad \qquad ad \qquad bd \\ \qquad \qquad ac \qquad bc \\ \hline X \cdot Y \quad ac \quad ad + bc \quad bd \end{array}$$

$$X \cdot Y = ac \times 10^2 + (ad + bc) \times 10^1 + bd$$

Solução mais barata?

Gauss faz por R\$ 3,06!

$X \cdot Y$ por apenas R\$ 3,06

X	a	b
Y	c	d
	ad	bd
	ac	bc
$X \cdot Y$	ac	$ad + bc$
		bd

$X \cdot Y$ por apenas R\$ 3,06

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{cc}
 X & a & b \\
 Y & c & d
 \end{array} \\
 \hline
 & ad & bd \\
 & ac & bc \\
 \hline
 X \cdot Y & ac & ad + bc & bd
 \end{array}$$

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd \Rightarrow$$

$$ad + bc = (a + b)(c + d) - ac - bd$$

$$g = (a + b)(c + d) \quad e = ac \quad f = bd \quad h = g - e - f$$

$$X \cdot Y \text{ (por R\$ 3,06)} = e \times 10^2 + h \times 10^1 + f$$

Exemplo

$$\begin{array}{llll} X = 2133 & Y = 2312 & X \cdot Y = ? \\ ac = ? & bd = ? & (a + b)(c + d) = ? \end{array}$$

Exemplo

$$\begin{array}{lll} X = 2133 & Y = 2312 & X \cdot Y = ? \\ ac = ? & bd = ? & (a + b)(c + d) = ? \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} X = 21 & Y = 23 & X \cdot Y = ? \\ ac = ? & bd = ? & (a + b)(c + d) = ? \end{array}$$

Exemplo

$$\begin{array}{lll} X = 2133 & Y = 2312 & X \cdot Y = ? \\ ac = ? & bd = ? & (a + b)(c + d) = ? \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} X = 21 & Y = 23 & X \cdot Y = ? \\ ac = ? & bd = ? & (a + b)(c + d) = ? \end{array}$$

$$X = 2 \quad Y = 2 \quad X \cdot Y = 4$$

Exemplo

$$\begin{array}{llll} X = 2133 & Y = 2312 & X \cdot Y = ? \\ ac = ? & bd = ? & (a + b)(c + d) = ? \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} X = 21 & Y = 23 & X \cdot Y = ? \\ ac = 4 & bd = ? & (a + b)(c + d) = ? \end{array}$$

Exemplo

$$\begin{array}{lll} X = 2133 & Y = 2312 & X \cdot Y = ? \\ \textcolor{red}{ac} = ? & \textcolor{blue}{bd} = ? & (a + b)(c + d) = ? \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} X = 21 & Y = 23 & X \cdot Y = ? \\ \textcolor{red}{ac} = 4 & \textcolor{blue}{bd} = ? & (a + b)(c + d) = ? \end{array}$$

$$X = 1 \quad Y = 3 \quad X \cdot Y = 3$$

Exemplo

$$\begin{array}{llll} X = & 2133 & Y = & 2312 & X \cdot Y = & ? \\ ac = & ? & bd = & ? & (a + b)(c + d) = & ? \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} X = & 21 & Y = & 23 & X \cdot Y = & ? \\ ac = & 4 & bd = & 3 & (a + b)(c + d) = & ? \end{array}$$

Exemplo

$$\begin{array}{lll} X = 2133 & Y = 2312 & X \cdot Y = ? \\ \textcolor{red}{ac} = ? & \textcolor{blue}{bd} = ? & (a + b)(c + d) = ? \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} X = 21 & Y = 23 & X \cdot Y = ? \\ \textcolor{red}{ac} = 4 & \textcolor{blue}{bd} = 3 & (a + b)(c + d) = ? \end{array}$$

$$X = 3 \quad Y = 5 \quad X \cdot Y = 15$$

Exemplo

$$\begin{array}{lll} X = 2133 & Y = 2312 & X \cdot Y = ? \\ ac = ? & bd = ? & (a + b)(c + d) = ? \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} X = 21 & Y = 23 & X \cdot Y = 483 \\ ac = 4 & bd = 3 & (a + b)(c + d) = 15 \end{array}$$

Exemplo

$$\begin{array}{llll} X = & \textcolor{green}{21}33 & Y = & \textcolor{green}{23}12 & X \cdot Y = & ? \\ \textcolor{red}{ac} = & 483 & \textcolor{blue}{bd} = & ? & (a + b)(c + d) = & ? \end{array}$$

Exemplo

$$\begin{array}{llll} X = & \textcolor{green}{2}133 & Y = & \textcolor{green}{2}312 & X \cdot Y = & ? \\ \textcolor{red}{ac} = & 483 & \textcolor{blue}{bd} = & ? & (a + b)(c + d) = & ? \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} X = & \textcolor{green}{3}3 & Y = & \textcolor{green}{1}2 & X \cdot Y = & ? \\ \textcolor{red}{ac} = & ? & \textcolor{blue}{bd} = & ? & (a + b)(c + d) = & ? \end{array}$$

Exemplo

$$\begin{array}{llll} X = 2133 & Y = 2312 & X \cdot Y = ? \\ ac = 483 & bd = ? & (a + b)(c + d) = ? \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} X = 33 & Y = 12 & X \cdot Y = 396 \\ ac = 3 & bd = 6 & (a + b)(c + d) = 18 \end{array}$$

Exemplo

$$X = 2133 \quad Y = 2312 \quad X \cdot Y = ?$$

$$ac = 483 \quad bd = 396 \quad (a + b)(c + d) = ?$$

Exemplo

$$\begin{array}{llll} X = & 2133 & Y = & 2312 & X \cdot Y = & ? \\ \textcolor{red}{ac} = & 483 & \textcolor{blue}{bd} = & 396 & (a + b)(c + d) = & ? \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} X = & 54 & Y = & 35 & X \cdot Y = & ? \\ \textcolor{red}{ac} = & ? & \textcolor{blue}{bd} = & ? & (a + b)(c + d) = & ? \end{array}$$

Exemplo

$$\begin{array}{llll} X = & 2133 & Y = & 2312 & X \cdot Y = & ? \\ ac = & 483 & bd = & 396 & (a + b)(c + d) = & ? \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} X = & 54 & Y = & 35 & X \cdot Y = & 1890 \\ ac = & 15 & bd = & 20 & (a + b)(c + d) = & 72 \end{array}$$

Exemplo

$$X = 2133 \quad Y = 2312$$

$$X \cdot Y = ?$$

$$ac = 483 \quad bd = 396 \quad (a + b)(c + d) = 1890$$

Exemplo

$$X = 2133 \quad Y = 2312 \quad X \cdot Y = 4931496$$

$$ac = 483 \quad bd = 396 \quad (a + b)(c + d) = 1890$$

Algoritmo Multi

Algoritmo recebe inteiros $X[1..n]$ e $Y[1..n]$ e devolve $X \cdot Y$ (Karatsuba e Ofman).

KARATSUBA (X, Y, n)

```
1  se  $n \leq 3$  devolva  $X \cdot Y$ 
2   $q \leftarrow \lceil n/2 \rceil$ 
3   $A \leftarrow X[q + 1..n]$        $B \leftarrow X[1..q]$ 
4   $C \leftarrow Y[q + 1..n]$        $D \leftarrow Y[1..q]$ 
5   $E \leftarrow \text{KARATSUBA}(A, C, \lfloor n/2 \rfloor)$ 
6   $F \leftarrow \text{KARATSUBA}(B, D, \lceil n/2 \rceil)$ 
7   $G \leftarrow \text{KARATSUBA}(A + B, C + D, \lceil n/2 \rceil + 1)$ 
8   $H \leftarrow G - F - E$ 
9   $R \leftarrow E \times 10^n + H \times 10^{\lceil n/2 \rceil} + F$ 
10 devolva  $R$ 
```

$T(n)$ = consumo de tempo do algoritmo para multiplicar dois inteiros com n algarismos.

Consumo de tempo

linha	todas as execuções da linha
1	$= \Theta(1)$
2	$= \Theta(1)$
3	$= \Theta(n)$
4	$= \Theta(n)$
5	$= T(\lfloor n/2 \rfloor)$
6	$= T(\lceil n/2 \rceil)$
7	$= T(\lceil n/2 \rceil + 1)$
8	$= \Theta(n)$
9	$= \Theta(n)$
10	$= \Theta(n)$

$$\text{total} = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lceil n/2 \rceil + 1) + \Theta(n)$$

Consumo de tempo

Sabemos que

$$T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lceil n/2 \rceil + 1) + \Theta(n)$$

está na **mesma classe Θ** que a solução de

$$T'(1) = 1$$

$$T'(n) = 3T'(n/2) + n \quad \text{para } n = 2, 2^2, 2^3, \dots$$

n	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512
$T'(n)$	1	5	19	65	211	665	2059	6305	19171	58025

Recorrência

Considere a recorrência

$$R(1) = 1$$

$$R(2) = 1$$

$$R(3) = 1$$

$$R(n) = 3R\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1\right) + n \quad \text{para } n = 4, 5, 6 \dots$$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$T(n)$	1	1	1	7	14	15	29	36	45	53
$R(n)$	1	1	1	7	26	27	85	86	90	91

Recorrência

Considere a recorrência

$$R(1) = 1$$

$$R(2) = 1$$

$$R(3) = 1$$

$$R(n) = 3R\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1\right) + n \quad \text{para } n = 4, 5, 6 \dots$$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$T(n)$	1	1	1	7	14	15	29	36	45	53
$R(n)$	1	1	1	7	26	27	85	86	90	91

Vamos mostrar que $R(n)$ é $O(n^{\lg 3})$.

Isto implica que $T(n)$ é $O(n^{\lg 3})$.

Solução assintótica da recorrência

Vou mostrar que $R(n) \leq 31(n-3)^{\lg 3} - 6n$ para $n = 4, 5, 6, \dots$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$R(n)$	1	1	1	7	26	27	85	86	90	91
$31(n-3)^{\lg 3} - 6n$	*	*	*	7	63	119	237	324	473	5910

Solução assintótica da recorrência

Vou mostrar que $R(n) \leq 31(n-3)^{\lg 3} - 6n$ para $n = 4, 5, 6, \dots$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$R(n)$	1	1	1	7	26	27	85	86	90	91
$31(n-3)^{\lg 3} - 6n$	*	*	*	7	63	119	237	324	473	5910

Prova:

Se $n = 4$, então $R(n) = 7 \leq 31(n-3)^{\lg 3} - 6n$.

Solução assintótica da recorrência

Prova: (continuação) Se $n \geq 5$ vale que

$$R(n) = 3R(\lceil n/2 \rceil + 1) + n$$

$$\stackrel{\text{hi}}{\leq} 3(31(\lceil n/2 \rceil + 1 - 3)^{\lg 3} - 6(\lceil n/2 \rceil + 1)) + n$$

$$\leq 3(31(\frac{(n+1)}{2} - 2)^{\lg 3} - 6(\frac{n}{2} + 1)) + n$$

$$= 3(31(\frac{(n-3)}{2})^{\lg 3} - 3n - 6) + n$$

$$= 3(31 \frac{(n-3)^{\lg 3}}{2^{\lg 3}} - 3n - 6) + n$$

$$= 3 \cdot 31 \frac{(n-3)^{\lg 3}}{3} - 9n - 18 + n$$

$$= 31(n-3)^{\lg 3} - 6n - 2n - 18$$

$$< 31(n-3)^{\lg 3} - 6n = \Theta(n^{\lg 3})$$

Conclusões

$$R(n) \text{ é } \Theta(n^{\lg 3}).$$

$$\text{Logo } T(n) \text{ é } \Theta(n^{\lg 3}).$$

O consumo de tempo do algoritmo **KARATSUBA** é $\Theta(n^{\lg 3})$ ($1,584 < \lg 3 < 1,585$).

Mais conclusões

Consumo de tempo de
algoritmos para multiplicação de inteiros:

Jardim de infância

$$\Theta(n 10^n)$$

Ensino fundamental

$$\Theta(n^2)$$

Karatsuba e Ofman'60

$$O(n^{1.585})$$

Toom e Cook'63

$$O(n^{1.465})$$

(divisão e conquista; generaliza o acima)

Schönhage e Strassen'71

$$O(n \lg n \lg \lg n)$$

(FFT em aneis de tamanho específico)

Fürer'07

$$O(n \lg n 2^{O(\log^* n)})$$

Ambiente experimental

A **plataforma utilizada** nos experimentos é um PC rodando Linux Ubuntu 8.10 com um processador AMD Opteron(tm) Processor 252 de 1000 MHz e 4GB de memória RAM .

Os **códigos estão compilados** com o gcc versão 4.3.2 e opção de compilação -O2.

As implementações comparadas neste experimento são as do algoritmo do ensino fundamental e do algoritmo **KARATSUBA**.

O programa foi escrito por Carl Burch:

<http://www-2.cs.cmu.edu/~cburch/251/karat/>.

Resultados experimentais

n	Ensino Fund.	KARATSUBA
4	0.000511	0.000945
8	0.001216	0.001586
16	0.003607	0.004417
32	0.012619	0.012969
64	0.048293	0.038835
128	0.187477	0.116158
256	0.739645	0.351247
512	2.958580	1.044932
1024	11.764706	4.566210
2048	46.818182	14.084507

Tempos em 10^{-3} segundos.

Multiplicação de matrizes

Problema: Dadas duas matrizes $X[1 \dots n, 1 \dots n]$ e $Y[1 \dots n, 1 \dots n]$ calcular o **produto** $X \cdot Y$.

Os algoritmo tradicional de multiplicação de matrizes consome tempo $\Theta(n^3)$.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}$$

$$r = ae + bg$$

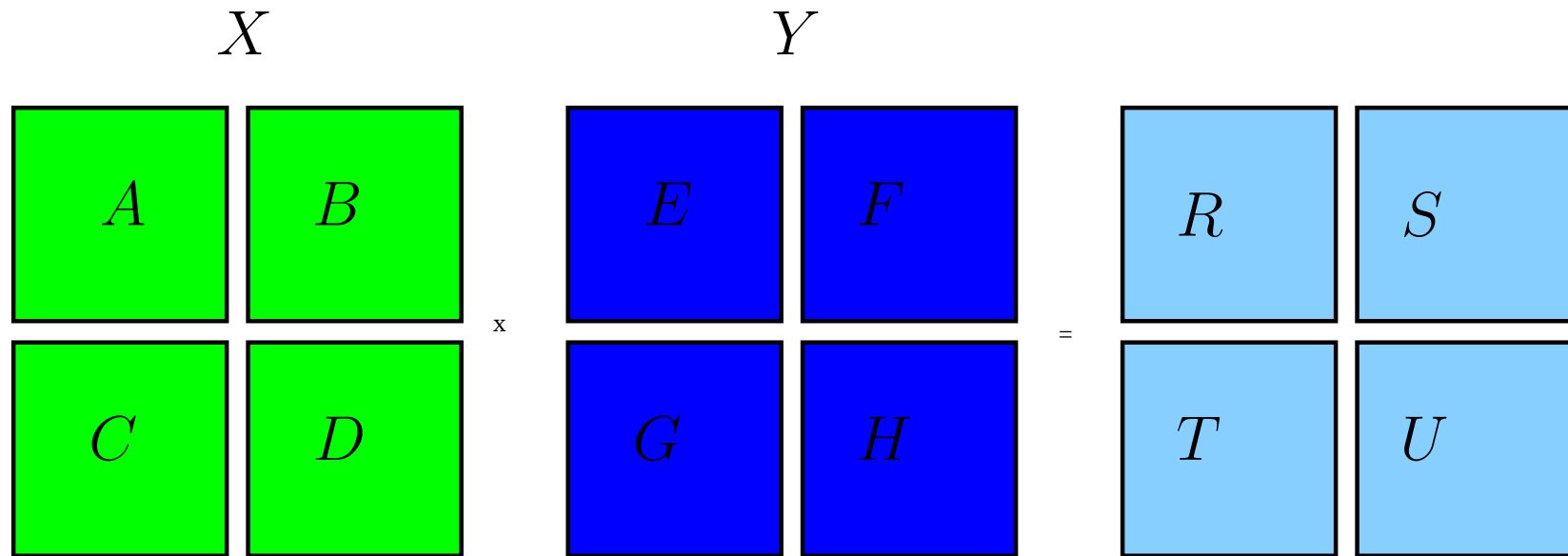
$$s = af + bh$$

$$t = ce + dg$$

$$u = cf + dh \quad (1)$$

Solução custa R\$ 8,04

Divisão e conquista



$$R = AE + BG$$

$$S = AF + BH$$

$$T = CE + DG$$

$$U = CF + DH$$

(2)

Algoritmo de Multi-Mat

Algoritmo recebe inteiros $X[1..n]$ e $Y[1..n]$ e devolve $X \cdot Y$.

MULTI-M (X, Y, n)

- 1 **se** $n = 1$ **devolva** $X \cdot Y$
- 2 $(A, B, C, D) \leftarrow \text{PARTICIONE}(X, n)$
- 3 $(E, F, G, H) \leftarrow \text{PARTICIONE}(Y, n)$
- 4 $R \leftarrow \text{MULTI-M}(A, E, n/2) + \text{MULTI-M}(B, G, n/2)$
- 5 $S \leftarrow \text{MULTI-M}(A, F, n/2) + \text{MULTI-M}(B, H, n/2)$
- 6 $T \leftarrow \text{MULTI-M}(C, E, n/2) + \text{MULTI-M}(D, G, n/2)$
- 7 $U \leftarrow \text{MULTI-M}(C, F, n/2) + \text{MULTI-M}(D, H, n/2)$
- 8 $P \leftarrow \text{CONSTRÓI-MAT}(R, S, T, U)$
- 9 **devolva** P

$T(n)$ = consumo de tempo do algoritmo para multiplicar duas matrizes de n linhas e n colunas.

Consumo de tempo

linha	todas as execuções da linha
1	$= \Theta(1)$
2	$= \Theta(n^2)$
3	$= \Theta(n^2)$
4	$= T(n/2) + T(n/2)$
5	$= T(n/2) + T(n/2)$
6	$= T(n/2) + T(n/2)$
7	$= T(n/2) + T(n/2)$
8	$= \Theta(n^2)$
9	$= \Theta(n^2)$
total	$= 8T(n/2) + \Theta(n^2)$

Consumo de tempo

As dicas no nosso estudo de recorrências sugere que a solução da recorrência

$$T(n) = 8T(n/2) + \Theta(n^2)$$

está na **mesma classe Θ** que a solução de

$$T'(1) = 1$$

$$T'(n) = 8T'(n/2) + n^2 \quad \text{para } n = 2, 2^2, 2^3, \dots$$

n	1	2	4	8	16	32	64	128	256
$T'(n)$	1	12	112	960	7936	64512	520192	4177920	33488896

Solução assintótica da recorrência

Considere a recorrência

$$R(1) = 1$$

$$R(n) = 8 R\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + n^2 \quad \text{para } n = 2, 3, 4, \dots$$

Verifique por indução que $R(n) \leq 20(n-1)^3 - 2n^2$ para $n = 2, 3, 4, \dots$

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$R(n)$	1	12	105	112	865	876	945	960
$20(n-1)^3 - 2n^2$	-2	12	142	508	1230	2428	4222	6732

Conclusões

$$R(n) \text{ é } \Theta(n^3).$$

Conclusão anterior + Exercício $\Rightarrow$
 $T(n) \text{ é } \Theta(n^3).$

O consumo de tempo do algoritmo MULTI-M é
 $\Theta(n^3).$

Strassen: $X \cdot Y$ por apenas R\$ 7,18

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}$$

Strassen: $X \cdot Y$ por apenas R\$ 7,18

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}$$

$$p_1 = a(f - h) = af - ah$$

$$p_2 = (a + b)h = ah + bh$$

$$p_3 = (c + d)e = ce + de$$

$$p_4 = d(g - e) = dg - de$$

$$p_5 = (a + d)(e + h) = ae + ah + de + dh$$

$$p_6 = (b - d)(g + h) = bg + bh - dg - dh$$

$$p_7 = (a - c)(e + f) = ae + af - ce - cf$$

(4)

Strassen: $X \cdot Y$ por apenas R\$ 7,18

$$p_1 = a(f - h) = af - ah$$

$$p_2 = (a + b)h = ah + bh$$

$$p_3 = (c + d)e = ce + de$$

$$p_4 = d(g - e) = dg - de$$

$$p_5 = (a + d)(e + h) = ae + ah + de + dh$$

$$p_6 = (b - d)(g + h) = bg + bh - dg - dh$$

$$p_7 = (a - c)(e + f) = ae + af - ce - cf$$

$$r = p_5 + p_4 - p_2 + p_6 = ae + bg$$

$$s = p_1 + p_2 = af + bh$$

$$t = p_3 + p_4 = ce + dg$$

$$u = p_5 + p_1 - p_3 - p_7 = cf + dh$$

Algoritmo de Strassen

STRASSEN (X, Y, n)

```
1  se  $n = 1$  devolva  $X \cdot Y$ 
2   $(A, B, C, D) \leftarrow$  PARTICIONE( $X, n$ )
3   $(E, F, G, H) \leftarrow$  PARTICIONE( $Y, n$ )
4   $P_1 \leftarrow$  STRASSEN( $A, F - H, n/2$ )
5   $P_2 \leftarrow$  STRASSEN( $A + B, H, n/2$ )
6   $P_3 \leftarrow$  STRASSEN( $C + D, E, n/2$ )
7   $P_4 \leftarrow$  STRASSEN( $D, G - E, n/2$ )
8   $P_5 \leftarrow$  STRASSEN( $A + D, E + H, n/2$ )
9   $P_6 \leftarrow$  STRASSEN( $B - D, G + H, n/2$ )
10  $P_7 \leftarrow$  STRASSEN( $A - C, E + F, n/2$ )
11  $R \leftarrow P_5 + P_4 - P_2 + P_6$ 
12  $S \leftarrow P_1 + P_2$ 
13  $T \leftarrow P_3 + P_4$ 
14  $U \leftarrow P_5 + P_1 - P_3 - P_7$ 
15 devolva  $P \leftarrow$  CONSTRÓI-MAT( $R, S, T, U$ )
```

Consumo de tempo

linha	todas as execuções da linha
1	$= \Theta(1)$
2-3	$= \Theta(n^2)$
4-10	$= 7, T(n/2) + \Theta(n^2)$
11-14	$= \Theta(n^2)$
15	$= \Theta(n^2)$
total	$= 7 T(n/2) + \Theta(n^2)$

Consumo de tempo

As dicas no nosso estudo de recorrências sugerem que a solução da recorrência

$$T(n) = 7T(n/2) + \Theta(n^2)$$

está na **mesma classe Θ** que a solução de

$$T'(1) = 1$$

$$T'(n) = 7T'(n/2) + n^2 \quad \text{para } n = 2, 2^2, 2^3, \dots$$

n	1	2	4	8	16	32	64	128	256
$T'(n)$	1	11	93	715	5261	37851	269053	1899755	13363821

Solução assintótica da recorrência

Considere a recorrência

$$R(1) = 1$$

$$R(n) = 7 R(\lceil \frac{n}{2} \rceil) + n^2 \quad \text{para } n = 2, 3, 4, \dots$$

Verifique por indução que $R(n) \leq 19(n-1)^{\lg 7} - 2n^2$ para $n = 2, 3, 4, \dots$

$$2,80 < \lg 7 < 2,81$$

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$R(n)$	1	11	86	93	627	638	700	715
$19(n-1)^{\lg 7} - 2n^2$	-1	11	115	327	881	1657	2790	4337

Conclusões

$$R(n) \text{ é } \Theta(n^{\lg 7}).$$

$$T(n) \text{ é } \Theta(n^{\lg 7}).$$

O consumo de tempo do algoritmo **STRASSEN** é $\Theta(n^{\lg 7})$ ($2,80 < \lg 7 < 2,81$).

Mais conclusões

Consumo de tempo de algoritmos para multiplicação de matrizes:

Ensino fundamental	$\Theta(n^3)$
Strassen	$\Theta(n^{2.81})$
...	...
Coppersmith e Winograd	$\Theta(n^{2.38})$
Stothers (2010)	$O(n^{2.3736})$
Williams (2011)	$O(n^{2.3727})$