

Teoria dos Jogos Algorítmica

Objetivos:

Apresentar a área de teoria dos jogos algorítmica, introduzindo os conceitos necessários de teoria dos jogos, e discorrendo sobre problemas e resultados da área.

Teoria dos Jogos Algorítmica

Objetivos:

Apresentar a área de teoria dos jogos algorítmica, introduzindo os conceitos necessários de teoria dos jogos, e discorrendo sobre problemas e resultados da área.

Conteúdo:

Jogos, estratégias, funções custo e utilidade; Equilíbrio de Nash; Custo social, preço da estabilidade e da anarquia; Complexidade de encontrar um equilíbrio de Nash; **Projeto algorítmico de mecanismos; Leilões combinatórios; Jogos de roteamento; Jogos de formação de redes.**

Teoria dos Jogos Algorítmica

Objetivos:

Apresentar a área de teoria dos jogos algorítmica, introduzindo os conceitos necessários de teoria dos jogos, e discorrendo sobre problemas e resultados da área.

Conteúdo:

Jogos, estratégias, funções custo e utilidade; Equilíbrio de Nash; Custo social, preço da estabilidade e da anarquia; Complexidade de encontrar um equilíbrio de Nash; **Projeto algorítmico de mecanismos; Leilões combinatórios; Jogos de roteamento; Jogos de formação de redes.**

Observação:

É fortemente recomendado que o aluno já tenha cursado alguma disciplina de **análise de algoritmos.**

Calendário e avaliação

Início: 4 de março (junto com a pós)

Término: 26 de junho (junto com a graduação)

Seguiremos as semanas de break da graduação.

Calendário e avaliação

Início: 4 de março (junto com a pós)

Término: 26 de junho (junto com a graduação)

Seguiremos as semanas de break da graduação.

Avaliação:

Duas provas e listas de exercícios.

Para alunos de pós, adicionalmente, um seminário.

(A ser assistindo também pelos alunos da graduação.)

Calendário e avaliação

Início: 4 de março (junto com a pós)

Término: 26 de junho (junto com a graduação)

Seguiremos as semanas de break da graduação.

Avaliação:

Duas provas e listas de exercícios.

Para alunos de pós, adicionalmente, um seminário.

(A ser assistindo também pelos alunos da graduação.)

Sem sub; datas das provas a serem fixadas mais adiante.

Introdução

O que são **jogos**?

Introdução

O que são **jogos**?

O que é **Teoria dos Jogos**?

Introdução

O que são **jogos**?

O que é **Teoria dos Jogos**?

Vagamente, é o estudo formal da interação entre agentes que tem um objetivo, e das possíveis estratégias que possam aparecer em consequência dessa interação.

Introdução

O que são **jogos**?

O que é **Teoria dos Jogos**?

Vagamente, é o estudo formal da interação entre agentes que tem um objetivo, e das possíveis estratégias que possam aparecer em consequência dessa interação.

O que é **Teoria dos Jogos Algorítmica**?

Introdução

O que são **jogos**?

O que é **Teoria dos Jogos**?

Vagamente, é o estudo formal da interação entre agentes que tem um objetivo, e das possíveis estratégias que possam aparecer em consequência dessa interação.

O que é **Teoria dos Jogos Algorítmica**?

Estuda questões computacionais que aparecem em muitos dos problemas de teoria dos jogos.

Exemplos em computação

TCP – Transmission Control Protocol

Exemplos em computação

TCP – Transmission Control Protocol

- breve descrição
- política de backoff

Exemplos em computação

TCP – Transmission Control Protocol

- breve descrição
- política de backoff

Google AdWords e leilões do gênero

Exemplos em computação

TCP – Transmission Control Protocol

- breve descrição
- política de backoff

Google AdWords e leilões do gênero

- breve descrição
- leilões de segundo preço

Exemplos em computação

TCP – Transmission Control Protocol

- breve descrição
- política de backoff

Google AdWords e leilões do gênero

- breve descrição
- leilões de segundo preço

Transferências em sistemas peer-to-peer (torrents)

Exemplos em computação

TCP – Transmission Control Protocol

- breve descrição
- política de backoff

Google AdWords e leilões do gênero

- breve descrição
- leilões de segundo preço

Transferências em sistemas peer-to-peer (torrents)

- breve descrição
- reputação dos usuários e sua utilização

Exemplos da teoria dos jogos

Dilema dos Prisioneiros

Exemplos da teoria dos jogos

Dilema dos Prisioneiros

- Dois prisioneiros **A** e **B** interrogados separadamente
- Duas possíveis respostas: **confessar** ou **silenciar**
- Duração da pena depende das respostas

Exemplos da teoria dos jogos

Dilema dos Prisioneiros

- Dois prisioneiros **A** e **B** interrogados separadamente
- Duas possíveis respostas: **confessar** ou **silenciar**
- Duração da pena depende das respostas

Matriz de custo

		B	
		Confessa	Silencia
A	Confessa	4 4	5 1
	Silencia	5 1	2 2

Exemplos da teoria dos jogos

Batalha dos Sexos

Exemplos da teoria dos jogos

Batalha dos Sexos

- Um casal (R e G) escolhendo uma atividade de lazer
- Duas possibilidades: ir ao cinema ou andar de bike
- Cada um prefere um pouco mais uma à outra atividade mas preferem fazer algo juntos

Exemplos da teoria dos jogos

Batalha dos Sexos

- Um casal (R e G) escolhendo uma atividade de lazer
- Duas possibilidades: ir ao cinema ou andar de bike
- Cada um prefere um pouco mais uma à outra atividade mas preferem fazer algo juntos

Matriz de satisfação

		G	
		Cinema	Pedalar
R	Cinema	4 5	2 2
	Pedalar	1 1	5 4

Jogo de Congestionamento

- Dois jogadores A e B
- Dois pontos de transmissão P ou Q
- P tem taxa de transmissão um pouco melhor
- A com mais urgência que B

Jogo de Congestionamento

- Dois jogadores **A** e **B**
- Dois pontos de transmissão **P** ou **Q**
- **P** tem taxa de transmissão um pouco melhor
- **A** com mais urgência que **B**

Matriz de satisfação

		B	
		A	
P	P	2	5
	Q	2	7
Q	P	6	1
	Q	4	1

Pedra-Papel-Tesoura

- Dois jogadores A e B
- Três possíveis escolhas: pedra, papel, ou tesoura
- pedra quebra tesoura que corta papel que embrulha pedra

Pedra-Papel-Tesoura

- Dois jogadores A e B
- Três possíveis escolhas: pedra, papel, ou tesoura
- pedra quebra tesoura que corta papel que embrulha pedra

		B		
		pedra	papel	tesoura
A	pedra	0	1	-1
	papel	-1	0	1
	tesoura	1	-1	0
		0	-1	1
		1	0	-1
		-1	1	0

Compartilhamento de largura de banda

- conjunto N de jogadores
- cada jogador i escolhe sua largura de banda $x_i \in [0, 1]$
- se $\sum_i x_i > 1$, nada é transmitido, senão há transmissão
- satisfação do jogador i dada por $x_i(1 - \sum_j x_j)$

Compartilhamento de largura de banda

- conjunto N de jogadores
- cada jogador i escolhe sua largura de banda $x_i \in [0, 1]$
- se $\sum_i x_i > 1$, nada é transmitido, senão há transmissão
- satisfação do jogador i dada por $x_i(1 - \sum_j x_j)$

Se t é a soma das bandas dos demais jogadores, escolha que maximiza $x(1 - t - x)$ é $x = (1 - t)/2$.

Compartilhamento de largura de banda

- conjunto N de jogadores
- cada jogador i escolhe sua largura de banda $x_i \in [0, 1]$
- se $\sum_i x_i > 1$, nada é transmitido, senão há transmissão
- satisfação do jogador i dada por $x_i(1 - \sum_j x_j)$

Se t é a soma das bandas dos demais jogadores, escolha que maximiza $x(1 - t - x)$ é $x = (1 - t)/2$.

Se todos escolhem assim, converge para $x_i = \frac{1}{n+1}$.

Satisfação de cada jogador: $\frac{1}{n+1} \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{(n+1)^2}$.

Valor social de $\frac{n}{(n+1)^2} \approx \frac{1}{n}$.

Compartilhamento de largura de banda

- conjunto N de jogadores
- cada jogador i escolhe sua largura de banda $x_i \in [0, 1]$
- se $\sum_i x_i > 1$, nada é transmitido, senão há transmissão
- satisfação do jogador i dada por $x_i(1 - \sum_j x_j)$

Se t é a soma das bandas dos demais jogadores, escolha que maximiza $x(1 - t - x)$ é $x = (1 - t)/2$.

Se todos escolhem assim, converge para $x_i = \frac{1}{n+1}$.

Satisfação de cada jogador: $\frac{1}{n+1} \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{(n+1)^2}$.

Valor social de $\frac{n}{(n+1)^2} \approx \frac{1}{n}$.

Valor social ótimo é $\frac{1}{4}$, quando $x_i = \frac{1}{2n}$.

Jogos iterados

O mesmo jogo repetido várias vezes,
com os mesmos jogadores.

Como isso afeta o comportamento dos jogadores?

Jogos iterados

O mesmo jogo repetido várias vezes,
com os mesmos jogadores.

Como isso afeta o comportamento dos jogadores?

Exemplo: dilema dos prisioneiros iterado

Jogos iterados

O mesmo jogo repetido várias vezes, com os mesmos jogadores.

Como isso afeta o comportamento dos jogadores?

Exemplo: dilema dos prisioneiros iterado

Estratégia **olho por olho:**

- Primeira vez, escolha **Silenciar**
- Dali para frente, repita a escolha do outro jogador na jogada anterior

Jogos iterados

O mesmo jogo repetido várias vezes, com os mesmos jogadores.

Como isso afeta o comportamento dos jogadores?

Exemplo: dilema dos prisioneiros iterado

Estratégia **olho por olho:**

- Primeira vez, escolha **Silenciar**
- Dali para frente, repita a escolha do outro jogador na jogada anterior

No que isso pode resultar?

Formalização

Componentes de um jogo:

- conjunto N de jogadores;
- para cada jogador i em N ,
conjunto S_i de escolhas possíveis para o jogador i ;
função u_i ou c_i de S em \mathbb{R} , onde $S = \times_{i \in N} S_i$.

Formalização

Componentes de um jogo:

- conjunto N de jogadores;
- para cada jogador i em N ,
conjunto S_i de escolhas possíveis para o jogador i ;
função u_i ou c_i de S em \mathbb{R} , onde $S = \times_{i \in N} S_i$.

Elementos de S_i : **estratégias** do jogador i .

Elementos de S : vetor de estratégias ou
resultados possíveis do jogo.

Formalização

Componentes de um jogo:

- conjunto N de jogadores;
- para cada jogador i em N ,
conjunto S_i de escolhas possíveis para o jogador i ;
função u_i ou c_i de S em \mathbb{R} , onde $S = \times_{i \in N} S_i$.

Elementos de S_i : **estratégias** do jogador i .

Elementos de S : vetor de estratégias ou **resultados** possíveis do jogo.

u_i : função **utilidade** c_i : função **custo**

Vale que $u_i(s) = -c_i(s)$ para todo i e s .

As funções utilidade/custo descrevem as **preferências** dos jogadores.

Definição de jogo

Um jogo J consistem em

- um conjunto N de jogadores;
- para cada jogador i em N ,
 - um conjunto S_i das estratégias do jogador i ;
 - uma função utilidade u_i de S em \mathbb{R} , onde $S = \times_{i \in N} S_i$.

Definição de jogo

Um jogo J consistem em

- um conjunto N de jogadores;
- para cada jogador i em N ,
 - um conjunto S_i das estratégias do jogador i ;
 - uma função utilidade u_i de S em \mathbb{R} , onde $S = \times_{i \in N} S_i$.

Alternativamente, pode-se dar funções custo c_i e não u_i .

Definição de jogo

Um jogo J consistem em

- um conjunto N de jogadores;
- para cada jogador i em N ,
 - um conjunto S_i das estratégias do jogador i ;
 - uma função utilidade u_i de S em \mathbb{R} , onde $S = \times_{i \in N} S_i$.

Alternativamente, pode-se dar funções custo c_i e não u_i .

No Jogo **Batalha dos Sexos**,

$N = \{R, G\}$, $S_R = S_G = \{\text{cinema, pedalar}\}$ e a matriz dada representa as funções utilidade.

Definição de jogo

Um jogo J consistem em

- um conjunto N de jogadores;
- para cada jogador i em N ,
 - um conjunto S_i das estratégias do jogador i ;
 - uma função utilidade u_i de S em \mathbb{R} , onde $S = \times_{i \in N} S_i$.

Alternativamente, pode-se dar funções custo c_i e não u_i .

No Jogo **Batalha dos Sexos**,

$N = \{R, G\}$, $S_R = S_G = \{\text{cinema, pedalar}\}$ e a matriz dada representa as funções utilidade.

No Jogo **Dilema dos Prisioneiros**,

$N = \{A, B\}$, $S_A = S_B = \{\text{confessar, silenciar}\}$ e a matriz dada representa as funções custo.

Notação e conceitos básicos

Considere um jogo J dado por

- um conjunto $N = [n]$ de jogadores;
- para cada jogador i em N ,
 - um conjunto S_i das estratégias do jogador i ;
 - uma função utilidade u_i de S em \mathbb{R} , onde $S = \times_{i \in N} S_i$.

Notação e conceitos básicos

Considere um jogo J dado por

- um conjunto $N = [n]$ de jogadores;
- para cada jogador i em N ,
 - um conjunto S_i das estratégias do jogador i ;
 - uma função utilidade u_i de S em \mathbb{R} , onde $S = \times_{i \in N} S_i$.

Notação:

Para um vetor $s = (s_1, \dots, s_n)$ em S , e um jogador i ,
 s_{-i} é o vetor $(s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n)$.

Para $r \in S_i$, (r, s_{-i}) é o vetor $(s_1, \dots, s_{i-1}, r, s_{i+1}, \dots, s_n) \in S$.

Notação e conceitos básicos

Considere um jogo J dado por

- um conjunto $N = [n]$ de jogadores;
- para cada jogador i em N ,
 - um conjunto S_i das estratégias do jogador i ;
 - uma função utilidade u_i de S em \mathbb{R} , onde $S = \times_{i \in N} S_i$.

Notação:

Para um vetor $s = (s_1, \dots, s_n)$ em S , e um jogador i , s_{-i} é o vetor $(s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n)$.

Para $r \in S_i$, (r, s_{-i}) é o vetor $(s_1, \dots, s_{i-1}, r, s_{i+1}, \dots, s_n) \in S$.

Jogador i está **satisfeito** com $s = (s_1, \dots, s_n)$ se $u_i(s) \geq u_i(r, s_{-i})$, para toda estratégia r em S_i .

Noção de equilíbrio

Para um vetor $s = (s_1, \dots, s_n)$ em S , e um jogador i , s_{-i} é o vetor $(s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n)$.

Para $r \in S_i$, (r, s_{-i}) é o vetor $(s_1, \dots, s_{i-1}, r, s_{i+1}, \dots, s_n) \in S$.

Jogador i está **satisfeito** com $s = (s_1, \dots, s_n)$ se $u_i(s) \geq u_i(r, s_{-i})$, para toda estratégia r em S_i .

Noção de equilíbrio

Para um vetor $s = (s_1, \dots, s_n)$ em S , e um jogador i , s_{-i} é o vetor $(s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n)$.

Para $r \in S_i$, (r, s_{-i}) é o vetor $(s_1, \dots, s_{i-1}, r, s_{i+1}, \dots, s_n) \in S$.

Jogador i está **satisfeito** com $s = (s_1, \dots, s_n)$ se $u_i(s) \geq u_i(r, s_{-i})$, para toda estratégia r em S_i .

(Diz-se que i não tem incentivo para mudar de estratégia.)

Noção de equilíbrio

Para um vetor $s = (s_1, \dots, s_n)$ em S , e um jogador i , s_{-i} é o vetor $(s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n)$.

Para $r \in S_i$, (r, s_{-i}) é o vetor $(s_1, \dots, s_{i-1}, r, s_{i+1}, \dots, s_n) \in S$.

Jogador i está **satisfeito** com $s = (s_1, \dots, s_n)$ se $u_i(s) \geq u_i(r, s_{-i})$, para toda estratégia r em S_i .

(Diz-se que i não tem incentivo para mudar de estratégia.)

Um vetor s é um **equilíbrio de Nash** se todo jogador está satisfeito com s .

Noção de equilíbrio

Para um vetor $s = (s_1, \dots, s_n)$ em S , e um jogador i , s_{-i} é o vetor $(s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n)$.

Para $r \in S_i$, (r, s_{-i}) é o vetor $(s_1, \dots, s_{i-1}, r, s_{i+1}, \dots, s_n) \in S$.

Jogador i está **satisfeito** com $s = (s_1, \dots, s_n)$ se $u_i(s) \geq u_i(r, s_{-i})$, para toda estratégia r em S_i .

(Diz-se que i não tem incentivo para mudar de estratégia.)

Um vetor s é um **equilíbrio de Nash** se todo jogador está satisfeito com s .

Como vimos nos exemplos, um jogo pode ter mais do que um equilíbrio de Nash, ou pode não ter nenhum equilíbrio de Nash.

Estratégias dominantes

Se, para um jogador i , existe uma estratégia r em S_i tal que $u_i(s) \leq u_i(r, s_{-i})$, para todo s em S , dizemos que r é uma estratégia **dominante** para i .

Estratégias dominantes

Se, para um jogador i , existe uma estratégia r em S_i tal que $u_i(s) \leq u_i(r, s_{-i})$, para todo s em S , dizemos que r é uma estratégia **dominante** para i .

Um jogo em que todos os jogadores têm uma estratégia dominante é um **jogo com estratégias dominantes**.

Estratégias dominantes

Se, para um jogador i , existe uma estratégia r em S_i tal que $u_i(s) \leq u_i(r, s_{-i})$, para todo s em S , dizemos que r é uma estratégia **dominante** para i .

Um jogo em que todos os jogadores têm uma estratégia dominante é um **jogo com estratégias dominantes**.

Exemplo: O Dilema dos Prisioneiros é um jogo com estratégias dominantes.

Estratégias dominantes

Se, para um jogador i , existe uma estratégia r em S_i tal que $u_i(s) \leq u_i(r, s_{-i})$, para todo s em S , dizemos que r é uma estratégia **dominante** para i .

Um jogo em que todos os jogadores têm uma estratégia dominante é um **jogo com estratégias dominantes**.

Exemplo: O Dilema dos Prisioneiros é um jogo com estratégias dominantes.

Na maioria dos jogos, não há estratégias dominantes.

Estratégias dominantes

Se, para um jogador i , existe uma estratégia r em S_i tal que $u_i(s) \leq u_i(r, s_{-i})$, para todo s em S , dizemos que r é uma estratégia **dominante** para i .

Um jogo em que todos os jogadores têm uma estratégia dominante é um **jogo com estratégias dominantes**.

Exemplo: O Dilema dos Prisioneiros é um jogo com estratégias dominantes.

Na maioria dos jogos, não há estratégias dominantes.

É interessante projetar jogos com estratégias dominantes.

Outro exemplo: Leilões do segundo preço.