

Definição de jogo

Um jogo consistem em

- um conjunto N de jogadores;
- para cada jogador i em N ,
 - um conjunto S_i das estratégias do jogador i ;
 - uma função utilidade u_i de S em \mathbb{R} , onde $S = \times_{i \in N} S_i$.

Definição de jogo

Um jogo consistem em

- um conjunto N de jogadores;
- para cada jogador i em N ,
 - um conjunto S_i das estratégias do jogador i ;
 - uma função utilidade u_i de S em \mathbb{R} , onde $S = \times_{i \in N} S_i$.

Alternativamente, pode-se dar funções custo c_i e não u_i .

Dilema dos Prisioneiros

- Dois prisioneiros **A** e **B** interrogados separadamente
- Duas possíveis respostas: **confessar** ou **silenciar**
- Duração da pena depende das respostas

Matriz de custo

		B	
		Confessa	Silencia
A	Confessa	4	5
	Silencia	1	2
		4	2

Dilema dos Prisioneiros

		B	
		Confessa	Silencia
A	Confessa	4, 4	5, 1
	Silencia	1, 5	2, 2

- conjunto de jogadores: $\{A, B\}$
- conjuntos de estratégias $S_A = S_B = \{\text{Confessa}, \text{Silencia}\}$
- $S = S_A \times S_B$
- funções custo c_A e c_B dadas pela matriz acima

Batalha dos Sexos

- Um casal (R e G) escolhendo uma atividade de lazer
- Duas possibilidades: ir ao cinema ou andar de bike
- Cada um prefere um pouco mais uma à outra atividade mas preferem fazer algo juntos

Matriz de utilidade

		G	
		Cinema	Pedalar
R	Cinema	4 5	2 2
	Pedalar	1 1	5 4

Batalha dos Sexos

	G		
R		Cinema	Pedalar
Cinema		4	2
Pedalar		1	5
		5	2
		1	4

- conjunto de jogadores: $\{R, G\}$
- conjuntos de estratégias $S_R = S_G = \{\text{Cinema}, \text{Pedalar}\}$
- $S = S_R \times S_G$
- funções utilidades u_R e u_G dadas pela matriz acima

Notação e conceitos básicos

Considere um jogo J dado por

- um conjunto $N = [n]$ de jogadores;
- para cada jogador i em N ,
 - um conjunto S_i das estratégias do jogador i ;
 - uma função utilidade u_i de S em \mathbb{R} , onde $S = \times_{i \in N} S_i$.

Notação e conceitos básicos

Considere um jogo J dado por

- um conjunto $N = [n]$ de jogadores;
- para cada jogador i em N ,
 - um conjunto S_i das estratégias do jogador i ;
 - uma função utilidade u_i de S em \mathbb{R} , onde $S = \times_{i \in N} S_i$.

Notação:

Para um vetor $s = (s_1, \dots, s_n)$ em S , e um jogador i , s_{-i} é o vetor $(s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n)$.

Notação e conceitos básicos

Considere um jogo J dado por

- um conjunto $N = [n]$ de jogadores;
- para cada jogador i em N ,
 - um conjunto S_i das estratégias do jogador i ;
 - uma função utilidade u_i de S em \mathbb{R} , onde $S = \times_{i \in N} S_i$.

Notação:

Para um vetor $s = (s_1, \dots, s_n)$ em S , e um jogador i ,
 s_{-i} é o vetor $(s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n)$.

Para $r \in S_i$, (r, s_{-i}) é o vetor $(s_1, \dots, s_{i-1}, r, s_{i+1}, \dots, s_n) \in S$.

Notação e conceitos básicos

Considere um jogo J dado por

- um conjunto $N = [n]$ de jogadores;
- para cada jogador i em N ,
 - um conjunto S_i das estratégias do jogador i ;
 - uma função utilidade u_i de S em \mathbb{R} , onde $S = \times_{i \in N} S_i$.

Notação:

Para um vetor $s = (s_1, \dots, s_n)$ em S , e um jogador i ,
 s_{-i} é o vetor $(s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n)$.

Para $r \in S_i$, (r, s_{-i}) é o vetor $(s_1, \dots, s_{i-1}, r, s_{i+1}, \dots, s_n) \in S$.

Vetor de estratégias obtido de s trocando-se s_i por r .

Estratégias dominantes

Estratégia r em S_i é **dominante** para o jogador i
se $u_i(s) \leq u_i(r, s_{-i})$ para todo vetor de estratégias s em S .

Estratégias dominantes

Estratégia r em S_i é **dominante** para o jogador i se $u_i(s) \leq u_i(r, s_{-i})$ para todo vetor de estratégias s em S .

Dilema dos prisioneiros

		B	
		Confessa	Silencia
A	Confessa	4, 4	5, 1
	Silencia	1, 5	2, 2

Confessa é estratégia dominante para os dois prisioneiros.

Estratégias dominantes

Estratégia r em S_i é **dominante** para o jogador i se $u_i(s) \leq u_i(r, s_{-i})$ para todo vetor de estratégias s em S .

Batalha dos sexos

		G	
		R	
R	Cinema	4	2
	Pedalar	1	5
		Cinema	Pedalar
		5	2
		1	4

Não há estratégias dominantes neste jogo.

Estratégias dominantes

Estratégia r em S_i é **dominante** para o jogador i se $u_i(s) \leq u_i(r, s_{-i})$ para todo vetor de estratégias s em S .

Um jogo em que todos os jogadores têm uma estratégia dominante é um **jogo com estratégias dominantes**.

Estratégias dominantes

Estratégia r em S_i é **dominante** para o jogador i se $u_i(s) \leq u_i(r, s_{-i})$ para todo vetor de estratégias s em S .

Um jogo em que todos os jogadores têm uma estratégia dominante é um **jogo com estratégias dominantes**.

Exemplo: Dilema dos Prisioneiros.

Estratégias dominantes

Estratégia r em S_i é **dominante** para o jogador i se $u_i(s) \leq u_i(r, s_{-i})$ para todo vetor de estratégias s em S .

Um jogo em que todos os jogadores têm uma estratégia dominante é um **jogo com estratégias dominantes**.

Exemplo: Dilema dos Prisioneiros.

Na maioria dos jogos, não há estratégias dominantes.

Estratégias dominantes

Estratégia r em S_i é **dominante** para o jogador i se $u_i(s) \leq u_i(r, s_{-i})$ para todo vetor de estratégias s em S .

Um jogo em que todos os jogadores têm uma estratégia dominante é um **jogo com estratégias dominantes**.

Exemplo: Dilema dos Prisioneiros.

Na maioria dos jogos, não há estratégias dominantes.

É interessante projetar jogos com estratégias dominantes.

Estratégias dominantes

Estratégia r em S_i é **dominante** para o jogador i se $u_i(s) \leq u_i(r, s_{-i})$ para todo vetor de estratégias s em S .

Um jogo em que todos os jogadores têm uma estratégia dominante é um **jogo com estratégias dominantes**.

Exemplo: Dilema dos Prisioneiros.

Na maioria dos jogos, não há estratégias dominantes.

É interessante projetar jogos com estratégias dominantes.

Outro exemplo: Leilões do segundo preço.

Estratégia dominante: valor do item para o jogador.

Noção de equilíbrio

Para um vetor $s = (s_1, \dots, s_n)$ em S , e um jogador i , s_{-i} é o vetor $(s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n)$.

Para $r \in S_i$, (r, s_{-i}) é o vetor $(s_1, \dots, s_{i-1}, r, s_{i+1}, \dots, s_n) \in S$.

Jogador i está **satisfeito** com s em S

se $u_i(s) \geq u_i(r, s_{-i})$ para toda estratégia r em S_i .

Noção de equilíbrio

Para um vetor $s = (s_1, \dots, s_n)$ em S , e um jogador i ,
 s_{-i} é o vetor $(s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n)$.

Para $r \in S_i$, (r, s_{-i}) é o vetor $(s_1, \dots, s_{i-1}, r, s_{i+1}, \dots, s_n) \in S$.

Jogador i está **satisfeito** com s em S

se $u_i(s) \geq u_i(r, s_{-i})$ para toda estratégia r em S_i .

(Diz-se que i não tem incentivo para mudar de estratégia.)

Noção de equilíbrio

Para um vetor $s = (s_1, \dots, s_n)$ em S , e um jogador i ,
 s_{-i} é o vetor $(s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n)$.

Para $r \in S_i$, (r, s_{-i}) é o vetor $(s_1, \dots, s_{i-1}, r, s_{i+1}, \dots, s_n) \in S$.

Jogador i está **satisfeito** com s em S
se $u_i(s) \geq u_i(r, s_{-i})$ para toda estratégia r em S_i .

(Diz-se que i não tem incentivo para mudar de estratégia.)

Um vetor s em S é um **equilíbrio de Nash**
se todo jogador está satisfeito com s .

Noção de equilíbrio

Para um vetor $s = (s_1, \dots, s_n)$ em S , e um jogador i , s_{-i} é o vetor $(s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n)$.

Para $r \in S_i$, (r, s_{-i}) é o vetor $(s_1, \dots, s_{i-1}, r, s_{i+1}, \dots, s_n) \in S$.

Jogador i está **satisfeito** com s em S

se $u_i(s) \geq u_i(r, s_{-i})$ para toda estratégia r em S_i .

(Diz-se que i não tem incentivo para mudar de estratégia.)

Um vetor s em S é um **equilíbrio de Nash**

se todo jogador está satisfeito com s .

Um jogo pode ter mais do que um equilíbrio de Nash, ou pode não ter nenhum equilíbrio de Nash.

Equilíbrio de Nash

Jogador i está **satisfeito** com $s = (s_1, \dots, s_n)$ se $u_i(s) \geq u_i(r, s_{-i})$, para toda estratégia r em S_i .

Um vetor s em S é um **equilíbrio de Nash** se todo jogador está satisfeito com s .

Equilíbrio de Nash

Jogador i está **satisfeito** com $s = (s_1, \dots, s_n)$ se $u_i(s) \geq u_i(r, s_{-i})$, para toda estratégia r em S_i .

Um vetor s em S é um **equilíbrio de Nash** se todo jogador está satisfeito com s .

Dilema dos prisioneiros:

		B	
		Confessa	Silencia
A	Confessa	4, 4	5, 1
	Silencia	1, 5	2, 2

Único equilíbrio de Nash: **(Confessa, Confessa)**

Equilíbrio de Nash

Jogador i está **satisfeito** com $s = (s_1, \dots, s_n)$ se $u_i(s) \geq u_i(r, s_{-i})$, para toda estratégia r em S_i .

Um vetor s em S é um **equilíbrio de Nash** se todo jogador está satisfeito com s .

Batalha dos sexos:

		G	
		Cinema	Pedalar
R	Cinema	4, 5	2, 2
	Pedalar	1, 1	5, 4

Equilíbrios de Nash: (**Cinema, Cinema**) e (**Pedalar, Pedalar**)

Equilíbrio de Nash

Um vetor s em S é um **equilíbrio de Nash** se todo jogador está satisfeito com s .

Equilíbrio de Nash

Um vetor s em S é um **equilíbrio de Nash** se todo jogador está satisfeito com s .

		B		
		pedra	papel	tesoura
A	pedra	0 1	1 -1	-1 1
	papel	-1 1	0 0	1 -1
	tesoura	1 -1	-1 1	0 0

Não há equilíbrio de Nash!

Estratégias puras versus mistas

Até agora, jogador escolhe estratégia **deterministicamente**.

Mas o jogador pode adotar estratégia **aleatorizada**!

Estratégias puras versus mistas

Até agora, jogador escolhe estratégia **deterministicamente**.

Mas o jogador pode adotar estratégia **aleatorizada**!

Uma estratégia **mista** para o jogador i
é uma distribuição de probabilidades no conjunto S_i .

Estratégias puras versus mistas

Até agora, jogador escolhe estratégia **deterministicamente**.

Mas o jogador pode adotar estratégia **aleatorizada**!

Uma estratégia **mista** para o jogador i
é uma distribuição de probabilidades no conjunto S_i .

Particularmente interessante em **jogos com repetição**:
adversário tirar proveito de estratégias determinísticas.

Estratégias puras versus mistas

Até agora, jogador escolhe estratégia **deterministicamente**.

Mas o jogador pode adotar estratégia **aleatorizada**!

Uma estratégia **mista** para o jogador i é uma distribuição de probabilidades no conjunto S_i .

Particularmente interessante em **jogos com repetição**: adversário tirar proveito de estratégias determinísticas.

Exemplo: Repetição do jogo Pedra-Papel-Tesoura:

- jogar sempre pedra
- jogar circularmente pedra, papel e tesoura
- jogar sempre a jogada anterior do adversário

Estratégias puras versus mistas

Até agora, jogador escolhe estratégia **deterministicamente**.

Mas o jogador pode adotar estratégia **aleatorizada**!

Uma estratégia **mista** para o jogador i é uma distribuição de probabilidades no conjunto S_i .

Particularmente interessante em **jogos com repetição**: adversário tirar proveito de estratégias determinísticas.

Exemplo: Repetição do jogo Pedra-Papel-Tesoura:

- jogar sempre pedra
- jogar circularmente pedra, papel e tesoura
- jogar sempre a jogada anterior do adversário

Ao detectar sua estratégia, adversário passar a vencer.

Estratégias puras versus mistas

Uma estratégia **mista** para o jogador i é uma distribuição de probabilidades no conjunto S_i .

Estratégias em S_i são então chamadas de **puras**.

Estratégias puras versus mistas

Uma estratégia **mista** para o jogador i é uma distribuição de probabilidades no conjunto S_i .

Estratégias em S_i são então chamadas de **puras**.

Discutimos **equilíbrio de Nash com estratégias puras**.

Estratégias puras versus mistas

Uma estratégia **mista** para o jogador i é uma distribuição de probabilidades no conjunto S_i .

Estratégias em S_i são então chamadas de **puras**.

Discutimos **equilíbrio de Nash com estratégias puras**.

Para definição mais ampla, precisamos de mais notação.

Estratégias puras versus mistas

Uma **estratégia mista** para o jogador i é uma **distribuição de probabilidades no conjunto S_i** .

Seja σ um vetor de estratégias mistas.

Ou seja, para cada jogador i , σ_i é uma distribuição de probabilidades em S_i .

Estratégias puras versus mistas

Uma **estratégia mista** para o jogador i é uma **distribuição de probabilidades no conjunto S_i** .

Seja σ um vetor de estratégias mistas.

Ou seja, para cada jogador i , σ_i é uma distribuição de probabilidades em S_i .

Qual é a **utilidade esperada** do jogador i para σ ?

Estratégias puras versus mistas

Uma **estratégia mista** para o jogador i é uma **distribuição de probabilidades no conjunto S_i** .

Seja σ um vetor de estratégias mistas.

Ou seja, para cada jogador i , σ_i é uma distribuição de probabilidades em S_i .

Qual é a **utilidade esperada** do jogador i para σ ?

$$E[u_i(\sigma)] = \sum_{s \in S} u_i(s) \Pr_{\sigma}[s],$$

Estratégias puras versus mistas

Uma **estratégia mista** para o jogador i é uma **distribuição de probabilidades no conjunto S_i** .

Seja σ um vetor de estratégias mistas.

Ou seja, para cada jogador i , σ_i é uma distribuição de probabilidades em S_i .

Qual é a **utilidade esperada** do jogador i para σ ?

$$E[u_i(\sigma)] = \sum_{s \in S} u_i(s) \Pr_{\sigma}[s],$$

onde $\Pr_{\sigma}[s] = \prod_j \sigma_j(s_j)$.

(Considera-se que os jogadores são independentes.)

Equilíbrio de Nash

Jogador i está **satisfeito** com σ se

$E[u_i(\sigma)] \geq E[u_i(\rho, \sigma_{-i})]$ para toda estratégia mista ρ sobre S_i .

Equilíbrio de Nash

Jogador i está **satisfeito** com σ se

$E[u_i(\sigma)] \geq E[u_i(\rho, \sigma_{-i})]$ para toda estratégia mista ρ sobre S_i .

σ é um equilíbrio de Nash (de estratégias mistas) se todo jogador está satisfeito com σ .

Equilíbrio de Nash

Jogador i está **satisfeito** com σ se

$E[u_i(\sigma)] \geq E[u_i(\rho, \sigma_{-i})]$ para toda estratégia mista ρ sobre S_i .

σ é um equilíbrio de Nash (de estratégias mistas) se todo jogador está satisfeito com σ .

Ou seja, em σ , nenhum jogador tem incentivo para mudar de estratégia (mista).

Equilíbrio de Nash

Jogador i está **satisfeito** com σ se

$E[u_i(\sigma)] \geq E[u_i(\rho, \sigma_{-i})]$ para toda estratégia mista ρ sobre S_i .

σ é um equilíbrio de Nash (de estratégias mistas) se todo jogador está satisfeito com σ .

Exemplo:

$\rho = (1/3, 1/3, 1/3)$ é uma estratégia mista para os jogadores de Pedra-Papel-Tesoura, e (ρ, ρ) é um equilíbrio de Nash.

Equilíbrio de Nash

Jogador i está **satisfeito** com σ se

$E[u_i(\sigma)] \geq E[u_i(\rho, \sigma_{-i})]$ para toda estratégia mista ρ sobre S_i .

σ é um equilíbrio de Nash (de estratégias mistas) se todo jogador está satisfeito com σ .

Exemplo:

$\rho = (1/3, 1/3, 1/3)$ é uma estratégia mista para os jogadores de Pedra-Papel-Tesoura, e (ρ, ρ) é um equilíbrio de Nash.

Teorema (Nash, 1951): Todo jogo com um número finito de jogadores e conjuntos finitos de estratégias tem um equilíbrio de Nash de estratégias mistas.

Teorema de Nash

Teorema (Nash, 1951): Todo jogo com um número finito de jogadores e conjuntos finitos de estratégias tem um equilíbrio de Nash de estratégias mistas.

Teorema de Nash

Teorema (Nash, 1951): Todo jogo com um número finito de jogadores e conjuntos finitos de estratégias tem um equilíbrio de Nash de estratégias mistas.

As hipóteses são necessárias:

existem jogos com número **infinito** de jogadores e jogos com conjuntos de estratégias **infinitos** sem equilíbrio de Nash.

A pricing game

Dois vendedores, 1 e 2, de um mesmo produto e três compradores, A, B, e C.

A pricing game

Dois vendedores, 1 e 2, de um mesmo produto e três compradores, A, B, e C.

- A só pode comprar de 1 e C só pode comprar de 2;
- B pode comprar de 1 ou 2;

A pricing game

Dois vendedores, 1 e 2, de um mesmo produto e três compradores, A, B, e C.

- A só pode comprar de 1 e C só pode comprar de 2;
- B pode comprar de 1 ou 2;
- 1 e 2 são os jogadores;
- cada estratégia é um preço p_i em $[0, 1]$;

A pricing game

Dois vendedores, 1 e 2, de um mesmo produto e três compradores, A, B, e C.

- A só pode comprar de 1 e C só pode comprar de 2;
- B pode comprar de 1 ou 2;
- 1 e 2 são os jogadores;
- cada estratégia é um preço p_i em $[0, 1]$;
- B compra do mais barateiro, e de 1 em caso de empate.

A pricing game

Dois vendedores, 1 e 2, de um mesmo produto e três compradores, A, B, e C.

- A só pode comprar de 1 e C só pode comprar de 2;
- B pode comprar de 1 ou 2;
- 1 e 2 são os jogadores;
- cada estratégia é um preço p_i em $[0, 1]$;
- B compra do mais barateiro, e de 1 em caso de empate.

Há equilíbrio de Nash para esse jogo?

Mais alguns conceitos básicos

- Custo ou valor social de um vetor de estratégias (soma dos custos ou utilidades dos jogadores)

Jogo de congestionamento

	A	B	
	P	Q	
A	2	7	
B	6	1	

Valores sociais 4, 12, 10 e 2.

Mais alguns conceitos básicos

- Custo ou valor social de um vetor de estratégias
(soma dos custos ou utilidades dos jogadores)
- Valor social ótimo
(soma máxima das utilidades dos jogadores)

Mais alguns conceitos básicos

- Custo ou valor social de um vetor de estratégias
(soma dos custos ou utilidades dos jogadores)
- Valor social ótimo
(soma máxima das utilidades dos jogadores)
- Jogos de soma zero
(soma dos custos/utilidades zero p/ todo s em S)

Mais alguns conceitos básicos

- Custo ou valor social de um vetor de estratégias
- Valor social ótimo
- Jogos de soma zero
(soma dos custos/utilidades zero p/ todo s em S)

Mais alguns conceitos básicos

- Custo ou valor social de um vetor de estratégias
- Valor social ótimo
- Jogos de soma zero
(soma dos custos/utilidades zero p/ todo s em S)

Pedra-papel-tesoura

		B		
		pedra	papel	tesoura
A	pedra	0	1	-1
	papel	1	0	-1
	tesoura	-1	1	0

Complexidade computacional

Jogos de soma zero com dois jogadores

Problema: Dada uma matriz $A_{m \times n}$,
encontrar um equilíbrio de Nash (de estratégias mistas).

m : número de estratégias do jogador 1

n : número de estratégias do jogador 2

Complexidade computacional

Jogos de soma zero com dois jogadores

Problema: Dada uma matriz $A_{m \times n}$, encontrar um equilíbrio de Nash (de estratégias mistas).

m : número de estratégias do jogador 1

n : número de estratégias do jogador 2

Basta dar uma matriz, pois como o jogo é de soma zero. O custo do jogador 1 é o ganho do jogador 2 e vice-versa.

Complexidade computacional

Jogos de soma zero com dois jogadores

Problema: Dada uma matriz $A_{m \times n}$, encontrar um equilíbrio de Nash (de estratégias mistas).

m : número de estratégias do jogador 1

n : número de estratégias do jogador 2

Basta dar uma matriz, pois como o jogo é de soma zero. O custo do jogador 1 é o ganho do jogador 2 e vice-versa.

Pelo Teorema de Nash, sempre existe um equilíbrio.

Complexidade computacional

Jogos de soma zero com dois jogadores

Problema: Dada uma matriz $A_{m \times n}$, encontrar um equilíbrio de Nash (de estratégias mistas).

m : número de estratégias do jogador 1

n : número de estratégias do jogador 2

Basta dar uma matriz, pois como o jogo é de soma zero. O custo do jogador 1 é o ganho do jogador 2 e vice-versa.

Pelo Teorema de Nash, sempre existe um equilíbrio.

Como podemos resolver esse problema?

Jogos de soma zero com dois jogadores

Problema: Dada uma matriz $A_{m \times n}$,
encontrar um equilíbrio de Nash (de estratégias mistas).

Jogos de soma zero com dois jogadores

Problema: Dada uma matriz $A_{m \times n}$,
encontrar um equilíbrio de Nash (de estratégias mistas).

O que é um equilíbrio?

Jogos de soma zero com dois jogadores

Problema: Dada uma matriz $A_{m \times n}$, encontrar um equilíbrio de Nash (de estratégias mistas).

O que é um equilíbrio?

São duas distribuições de probabilidade, ou seja, vetores p , com m entradas, e q , com n entradas,

- $\sum_i p_i = 1$ e $p_i \geq 0$ para $i = 1, \dots, m$
- $\sum_j q_j = 1$ e $q_j \geq 0$ para $j = 1, \dots, n$

tais que...

Jogos de soma zero com dois jogadores

Problema: Dada uma matriz $A_{m \times n}$, encontrar um equilíbrio de Nash (de estratégias mistas).

O que é um equilíbrio?

São duas distribuições de probabilidade, ou seja, vetores p , com m entradas, e q , com n entradas,

- $\sum_i p_i = 1$ e $p_i \geq 0$ para $i = 1, \dots, m$
- $\sum_j q_j = 1$ e $q_j \geq 0$ para $j = 1, \dots, n$

tais que...

Antes de responder...

se o jogador 1 usa a estratégia (mista) p e o 2 usa a q , qual é o valor esperado que o jogador 1 ganha?

Jogos de soma zero com dois jogadores

Problema: Dada uma matriz $A_{m \times n}$,
encontrar um equilíbrio de Nash (de estratégias mistas).

Jogos de soma zero com dois jogadores

Problema: Dada uma matriz $A_{m \times n}$,
encontrar um equilíbrio de Nash (de estratégias mistas).

Vetores p , com m entradas, e q , com n entradas,

- $\sum_i p_i = 1$ e $p_i \geq 0$ para $i = 1, \dots, m$,
- $\sum_j q_j = 1$ e $q_j \geq 0$ para $j = 1, \dots, n$.

Jogos de soma zero com dois jogadores

Problema: Dada uma matriz $A_{m \times n}$, encontrar um equilíbrio de Nash (de estratégias mistas).

Vetores p , com m entradas, e q , com n entradas,

- $\sum_i p_i = 1$ e $p_i \geq 0$ para $i = 1, \dots, m$,
- $\sum_j q_j = 1$ e $q_j \geq 0$ para $j = 1, \dots, n$.

Considere que A é a matriz custo do jogador 1.

Se o jogador 1 usa a estratégia (mista) p e o 2 usa a q , qual é o **valor esperado que o jogador 1 ganha?**

Jogos de soma zero com dois jogadores

Problema: Dada uma matriz $A_{m \times n}$, encontrar um equilíbrio de Nash (de estratégias mistas).

Vetores p , com m entradas, e q , com n entradas,

• $\sum_i p_i = 1$ e $p_i \geq 0$ para $i = 1, \dots, m$,

• $\sum_j q_j = 1$ e $q_j \geq 0$ para $j = 1, \dots, n$.

Considere que A é a matriz custo do jogador 1.

Se o jogador 1 usa a estratégia (mista) p e o 2 usa a q , qual é o **valor esperado que o jogador 1 ganha?**

$$\sum_{ij} a_{ij} p_i q_j = \sum_i p_i \sum_j a_{ij} q_j = p A q$$

Jogos de soma zero com dois jogadores

Problema: Dada uma matriz $A_{m \times n}$, encontrar um equilíbrio de Nash (de estratégias mistas).

A : matriz utilidade do jogador 1

Vetores p , com m entradas, e q , com n entradas,

- $\sum_i p_i = 1$ e $p_i \geq 0$ para $i = 1, \dots, m$,

- $\sum_j q_j = 1$ e $q_j \geq 0$ para $j = 1, \dots, n$.

Jogos de soma zero com dois jogadores

Problema: Dada uma matriz $A_{m \times n}$, encontrar um equilíbrio de Nash (de estratégias mistas).

A : matriz utilidade do jogador 1

Vetores p , com m entradas, e q , com n entradas,

- $\sum_i p_i = 1$ e $p_i \geq 0$ para $i = 1, \dots, m$,

- $\sum_j q_j = 1$ e $q_j \geq 0$ para $j = 1, \dots, n$.

Valor esperado que o jogador 1 ganha é pAq .

Jogos de soma zero com dois jogadores

Problema: Dada uma matriz $A_{m \times n}$, encontrar um equilíbrio de Nash (de estratégias mistas).

A : matriz utilidade do jogador 1

Vetores p , com m entradas, e q , com n entradas,

- $\sum_i p_i = 1$ e $p_i \geq 0$ para $i = 1, \dots, m$,

- $\sum_j q_j = 1$ e $q_j \geq 0$ para $j = 1, \dots, n$.

Valor esperado que o jogador 1 ganha é pAq .

Uma vez que o jogador 1 escolhe p , o jogador 2 escolhe q que minimiza a utilidade de 1.

Jogos de soma zero com dois jogadores

Problema: Dada uma matriz $A_{m \times n}$, encontrar um equilíbrio de Nash (de estratégias mistas).

A : matriz utilidade do jogador 1

Vetores p , com m entradas, e q , com n entradas,

• $\sum_i p_i = 1$ e $p_i \geq 0$ para $i = 1, \dots, m$,

• $\sum_j q_j = 1$ e $q_j \geq 0$ para $j = 1, \dots, n$.

Valor esperado que o jogador 1 ganha é pAq .

Uma vez que o jogador 1 escolhe p , o jogador 2 escolhe q que minimiza a utilidade de 1.

Ou seja, olhando o vetor pA , o jogador 2 gosta das estratégias que correspondem a entradas mínimas de pA .

Jogos de soma zero com dois jogadores

Problema: Dada uma matriz $A_{m \times n}$, encontrar um equilíbrio de Nash (de estratégias mistas).

A : matriz utilidade do jogador 1

Vetores p , com m entradas, e q , com n entradas,

• $\sum_i p_i = 1$ e $p_i \geq 0$ para $i = 1, \dots, m$,

• $\sum_j q_j = 1$ e $q_j \geq 0$ para $j = 1, \dots, n$.

Valor esperado que o jogador 1 ganha é pAq .

Uma vez que o jogador 1 escolhe p , o jogador 2 escolhe q que minimiza a utilidade de 1.

Ou seja, olhando o vetor pA , o jogador 2 gosta das estratégias que correspondem a entradas mínimas de pA .

Assim jogador 1 escolhe p que **maximize esse mínimo**.

Jogos de soma zero com dois jogadores

Problema: Dada uma matriz $A_{m \times n}$, encontrar um equilíbrio de Nash (de estratégias mistas).

A : matriz utilidade do jogador 1

Vetores p , com m entradas, e q , com n entradas,

- $\sum_i p_i = 1$ e $p_i \geq 0$ para $i = 1, \dots, m$,

- $\sum_j q_j = 1$ e $q_j \geq 0$ para $j = 1, \dots, n$.

Jogador 2 gosta de estratégias que correspondem a entradas mínimas de pA .

Assim 1 quer encontrar p que

Jogos de soma zero com dois jogadores

Problema: Dada uma matriz $A_{m \times n}$, encontrar um equilíbrio de Nash (de estratégias mistas).

A : matriz utilidade do jogador 1

Vetores p , com m entradas, e q , com n entradas,

• $\sum_i p_i = 1$ e $p_i \geq 0$ para $i = 1, \dots, m$,

• $\sum_j q_j = 1$ e $q_j \geq 0$ para $j = 1, \dots, n$.

Jogador 2 gosta de estratégias que correspondem a entradas mínimas de pA .

Assim 1 quer encontrar p que

maximize v

sujeito a $\sum_i p_i = 1$

$$(pA)_j \geq v \text{ para } j = 1, \dots, n$$

$$p_i \geq 0 \text{ para } i = 1, \dots, m.$$

Jogos de soma zero com dois jogadores

Problema: Dada uma matriz $A_{m \times n}$,
encontrar um equilíbrio de Nash (de estratégias mistas).

A : matriz utilidade do jogador 1

Jogador 1 quer encontrar p que

maximize v

sujeito a $\sum_i p_i = 1$

$(pA)_j \geq v$ para $j = 1, \dots, n$

$p_i \geq 0$ para $i = 1, \dots, m$.

Jogos de soma zero com dois jogadores

Problema: Dada uma matriz $A_{m \times n}$,
encontrar um equilíbrio de Nash (de estratégias mistas).

A : matriz utilidade do jogador 1

Jogador 1 quer encontrar p que

maximize v

sujeito a $\sum_i p_i = 1$

$(pA)_j \geq v$ para $j = 1, \dots, n$

$p_i \geq 0$ para $i = 1, \dots, m$.

Jogador 2 quer encontrar q que

minimize v

sujeito a $\sum_i q_i = 1$

$(Aq)_i \leq v$ para $i = 1, \dots, m$

$q_j \geq 0$ para $j = 1, \dots, n$.

Jogos de soma zero com dois jogadores

Problema: Dada uma matriz $A_{m \times n}$, encontrar um equilíbrio de Nash (de estratégias mistas).

Jogador 1 quer encontrar p que

maximize v

sujeito a $\sum_i p_i = 1$

$(pA)_j \geq v$ para $j = 1, \dots, n$

$p_i \geq 0$ para $i = 1, \dots, m$.

Jogador 2 quer encontrar q que

minimize v

sujeito a $\sum_i q_i = 1$

$(Aq)_i \leq v$ para $i = 1, \dots, m$

$q_j \geq 0$ para $j = 1, \dots, n$.

Jogos de soma zero com dois jogadores

Problema: Dada uma matriz $A_{m \times n}$, encontrar um equilíbrio de Nash (de estratégias mistas).

Jogador 1 quer encontrar p que

maximize v

sujeito a $\sum_i p_i = 1$

$(pA)_j \geq v$ para $j = 1, \dots, n$

$p_i \geq 0$ para $i = 1, \dots, m$.

Jogador 2 quer encontrar q que

minimize v

sujeito a $\sum_i q_i = 1$

$(Aq)_i \leq v$ para $i = 1, \dots, m$

$q_j \geq 0$ para $j = 1, \dots, n$.

Estes **programas lineares**, e um é o dual do outro!

Jogos com dois jogadores

Problema: Dada uma matriz $A_{m \times n}$
(representando um jogo de dois jogadores de soma zero),
encontrar um equilíbrio de Nash (de estratégias mistas).

Jogos com dois jogadores

Problema: Dada uma matriz $A_{m \times n}$
(representando um jogo de dois jogadores de soma zero),
encontrar um equilíbrio de Nash (de estratégias mistas).

Conclusão:

Este problema pode ser resolvido em tempo polinomial
(usando programação linear).

Jogos com dois jogadores

Problema: Dada uma matriz $A_{m \times n}$
(representando um jogo de dois jogadores de soma zero),
encontrar um equilíbrio de Nash (de estratégias mistas).

Conclusão:

Este problema pode ser resolvido em tempo polinomial
(usando programação linear).

E para jogos que não sejam de soma zero?

Complexidade computacional

Os seguintes problemas são **NP-completos**:
dado um jogo de duas pessoas na forma matricial,
decidir se este jogo tem

- pelo menos dois equilíbrios de Nash;
- dado k , um equilíbrio de Nash para o jogador 1 com utilidade pelo menos k ;
- dado k , um equilíbrio de Nash com valor social pelo menos k ;
- dado k , um equilíbrio de Nash com pelo menos k estratégias no seu suporte;
- dado s , um equilíbrio de Nash com s no suporte;
- dado s , um equilíbrio de Nash sem s no suporte.