Jogos de soma zero com dois jogadores

Problema: Dada uma matriz $A_{m \times n}$,
encontrar um equilíbrio de Nash (de estratégias mistas).

Jogador 1 quer encontrar p que

maximize v

sujeito a $\sum_i p_i = 1$

$(pA)_j \geq v$ para $j = 1, \ldots, n$

$p_i \geq 0$ para $i = 1, \ldots, m$.

Jogos de soma zero com dois jogadores

Problema: Dada uma matriz $A_{m \times n}$,
encontrar um equilíbrio de Nash (de estratégias mistas).

Jogador 1 quer encontrar p que
maximize v
sujeito a $\sum_i p_i = 1$
$(pA)_j \geq v$ para $j = 1, \ldots, n$
$p_i \geq 0$ para $i = 1, \ldots, m$.

Jogador 2 quer encontrar q que
minimize w
sujeito a $\sum_i q_i = 1$
$(Aq)_i \leq w$ para $i = 1, \ldots, m$
$q_j \geq 0$ para $j = 1, \ldots, n$.

Jogos de soma zero com dois jogadores

Problema: Dada uma matriz $A_{m \times n}$,
encontrar um equilíbrio de Nash (de estratégias mistas).

Jogador 1 quer encontrar p que
maximize v
sujeito a $\sum_i p_i = 1$
$(pA)_j \geq v$ para $j = 1, \ldots, n$
$p_i \geq 0$ para $i = 1, \ldots, m$.

Jogador 2 quer encontrar q que
minimize w
sujeito a $\sum_i q_i = 1$
$(Aq)_i \leq w$ para $i = 1, \ldots, m$
$q_j \geq 0$ para $j = 1, \ldots, n$.

Estes são programas lineares, e um é o dual do outro!

Forma padrão dos LPs

Programa primal:

$$\begin{aligned} \text{minimize } & cx \\ \text{sujeito a } & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Forma padrão dos LPs

Programa primal:

$$\begin{aligned} \text{minimize } & cx \\ \text{sujeito a } Ax &\geq b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

Programa dual:

$$\begin{aligned} \text{maximize } & by \\ \text{sujeito a } A^T y &\leq c \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

Primeiro LP em forma padrão

Jogador 1 quer encontrar p que

maximize v
sujeito a $\sum_i p_i = 1$
$(pA)_j \geq v$ para $j = 1, \ldots, n$
$p_i \geq 0$ para $i = 1, \ldots, m$.

Forma padrão:

$$\begin{aligned} \text{minimize } & -v^+ + v^- \\ \text{sujeito a } & -\sum_i p_i \geq -1 \\ & \sum_i p_i \geq 1 \\ -v^+ + v^- + & \sum_i a_{ij} p_i \geq 0 \quad \text{para } j = 1, \ldots, n \\ v^+, v^-, & p_i \geq 0 \quad \text{para } i = 1, \ldots, m \end{aligned}$$

Segundo LP em forma padrão

Jogador 2 quer encontrar q que

minimize w
sujeito a $\sum_i q_i = 1$
$(Aq)_i \leq w$ para $i = 1, \ldots, m$
$q_j \geq 0$ para $j = 1, \ldots, n$.

Forma padrão:

$$
\begin{aligned}
\text{maximize } & -w^+ + w^- \\
\text{sujeito a } & -\sum_i q_i \leq -1 \\
& \sum_i q_i \leq 1 \\
-w^+ + w^- + & \sum_j a_{ij} q_j \leq 0 \quad \text{para } i = 1, \ldots, m \\
& w^+, w^-, q_j \geq 0 \quad \text{para } j = 1, \ldots, n
\end{aligned}
$$

LPs em forma padrão

$$\begin{aligned}
\text{minimize } & -v^{+} + v^{-} \\
\text{sujeito a } & -\textstyle\sum_i p_i \geq -1 \\
& \textstyle\sum_i p_i \geq 1 \\
-v^{+} + v^{-} + & \textstyle\sum_i a_{ij} p_i \geq 0 \quad \text{para } j = 1, \ldots, n \\
& v^{+}, v^{-}, p_i \geq 0 \quad \text{para } i = 1, \ldots, m
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{maximize } & -w^{+} + w^{-} \\
\text{sujeito a } & -\textstyle\sum_i q_i \leq -1 \\
& \textstyle\sum_i q_i \leq 1 \\
-w^{+} + w^{-} + & \textstyle\sum_j a_{ij} q_j \leq 0 \quad \text{para } i = 1, \ldots, m \\
& w^{+}, w^{-}, q_j \geq 0 \quad \text{para } j = 1, \ldots, n
\end{aligned}$$

Programa primal

minimize $-v^+ + v^-$

sujeito a $-\sum_i p_i \geq -1$

$$\sum_i p_i \geq 1$$

$$-v^+ + v^- + \sum_i a_{ij} p_i \geq 0 \text{ para } j = 1, \ldots, n$$

$$v^+, v^-, p_i \geq 0 \text{ para } i = 1, \ldots, m$$

$$c = (-1, 1, 0, \ldots, 0) \quad \text{e} \quad b = (-1, 1, 0, \ldots, 0)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & 1 & a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ -1 & 1 & a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Relação entre os valores dos LPs

$$
\begin{aligned}
v &= \Big(\sum_j q_j\Big)v = \sum_j (v q_j) \\
&\leq \sum_j \Big(\sum_i a_{ij} p_i\Big) q_j = \sum_i \Big(\sum_j a_{ij} q_j\Big) p_i \\
&\leq \sum_i w p_i = \Big(\sum_i p_i\Big) w = w
\end{aligned}
$$

Relação entre os valores dos LPs

$$
\begin{aligned}
v &= \Big(\sum_j q_j\Big)v = \sum_j (v q_j) \\
&\leq \sum_j \Big(\sum_i a_{ij} p_i\Big) q_j = \sum_i \Big(\sum_j a_{ij} q_j\Big) p_i \\
&\leq \sum_i w p_i = \Big(\sum_i p_i\Big) w = w
\end{aligned}
$$

Para soluções ótimas, os valores v^* e w^* são iguais e

- se $q_j^* > 0$ então $\sum_i a_{ij} p_i^* = v^*$
- se $p_i^* > 0$ então $\sum_j a_{ij} q_j^* = w^*$

Relação entre os valores dos LPs

$$
\begin{aligned}
v &= \Big(\sum_j q_j\Big)v = \sum_j (v q_j) \\
&\le \sum_j \Big(\sum_i a_{ij} p_i\Big) q_j = \sum_i \Big(\sum_j a_{ij} q_j\Big) p_i \\
&\le \sum_i w p_i = \Big(\sum_i p_i\Big) w = w
\end{aligned}
$$

Para soluções ótimas, os valores v^* e w^* são iguais e

- se $q_j^* > 0$ então $\sum_i a_{ij} p_i^* = v^*$
- se $p_i^* > 0$ então $\sum_j a_{ij} q_j^* = w^*$

Toda estratégia no suporte de uma estrategia mista ótima tem o mesmo valor esperado (o valor ótimo).

Jogos com dois jogadores

Problema: Dada uma matriz $A_{m \times n}$ representando um jogo de dois jogadores de soma zero, encontrar um equilíbrio de Nash (de estratégias mistas).

Jogos com dois jogadores

Problema: Dada uma matriz $A_{m \times n}$ representando um jogo de dois jogadores de soma zero, encontrar um equilíbrio de Nash (de estratégias mistas).

Conclusão:

Este problema pode ser resolvido em tempo polinomial (usando programação linear).

Jogos com dois jogadores

Problema: Dada uma matriz $A_{m\times n}$ representando um jogo de dois jogadores de soma zero, encontrar um equilíbrio de Nash (de estratégias mistas).

Conclusão:

Este problema pode ser resolvido em tempo polinomial (usando programação linear).

E para jogos que não sejam de soma zero?

Jogos com dois jogadores

Problema: Dada uma matriz $A_{m \times n}$ representando um jogo de dois jogadores de soma zero, encontrar um equilíbrio de Nash (de estratégias mistas).

Conclusão:

Este problema pode ser resolvido em tempo polinomial (usando programação linear).

E para jogos que não sejam de soma zero?

Veremos mais adiante.

Estratégias mistas

Uma estratégia mista para o jogador i
é uma distribuição de probabilidades no conjunto S_i.

Seja σ um vetor de estratégias mistas.

Ou seja, para cada jogador i,
σ_i é uma distribuição de probabilidades em S_i.

Estratégias mistas

Uma estratégia mista para o jogador i
é uma distribuição de probabilidades no conjunto S_i.

Seja σ um vetor de estratégias mistas.

Ou seja, para cada jogador i,
σ_i é uma distribuição de probabilidades em S_i.

Qual é a utilidade esperada do jogador i para σ?

Estratégias mistas

Uma estratégia mista para o jogador i
é uma distribuição de probabilidades no conjunto S_i.

Seja σ um vetor de estratégias mistas.

Ou seja, para cada jogador i,
σ_i é uma distribuição de probabilidades em S_i.

Qual é a utilidade esperada do jogador i para σ?

$$U_i(\sigma) = \mathrm{E}[u_i(\sigma)] \;=\; \sum_{s \in S} u_i(s) \Pr_\sigma[s],$$

onde $\Pr_\sigma[s] = \prod_j \sigma_j(s_j)$.
(Considera-se que os jogadores são independentes.)

Equilíbrio de Nash

Jogador i está satisfeito com σ se $\mathrm{E}[u_i(\sigma)] \geq \mathrm{E}[u_i(\rho, \sigma_{-i})]$ para toda estratégia mista ρ sobre S_i.

Equilíbrio de Nash

Jogador i está satisfeito com σ se
$U_i(\sigma) \geq U_i(\rho, \sigma_{-i})$ para toda estratégia mista ρ sobre S_i.

Equilíbrio de Nash

Jogador i está satisfeito com σ se
$U_i(\sigma) \geq U_i(\rho, \sigma_{-i})$ para toda estratégia mista ρ sobre S_i.

σ é um equilíbrio de Nash (de estratégias mistas)
se todo jogador está satisfeito com σ.

Ou seja, em σ, nenhum jogador tem incentivo para mudar de estratégia (mista).

Equilíbrio de Nash

Jogador i está satisfeito com σ se
$U_i(\sigma) \geq U_i(\rho, \sigma_{-i})$ para toda estratégia mista ρ sobre S_i.

σ é um equilíbrio de Nash (de estratégias mistas)
se todo jogador está satisfeito com σ.

Ou seja, em σ, nenhum jogador tem incentivo para mudar de estratégia (mista).

Teorema (Nash, 1951): Todo jogo com um número finito de jogadores e conjuntos finitos de estratégias tem um equilíbrio de Nash de estratégias mistas.

Teorema de Ponto Fixo de Brouwer

Teorema de Ponto Fixo de Brouwer (1909):

Toda função contínua $f : D \longrightarrow D$, onde D é um subconjunto compacto e convexo do $\mathbb{R}^m$, tem um ponto fixo.

Teorema de Ponto Fixo de Brouwer

Teorema de Ponto Fixo de Brouwer (1909):

Toda função contínua $f : D \to D$, onde D é um subconjunto compacto e convexo do $\mathbb{R}^m$, tem um ponto fixo.

Ponto fixo: x em D tal que $f(x) = x$.

Teorema de Ponto Fixo de Brouwer

Teorema de Ponto Fixo de Brouwer (1909):

Toda função contínua $f : D \to D$, onde D é um subconjunto compacto e convexo do $\mathbb{R}^m$, tem um ponto fixo.

Ponto fixo: x em D tal que $f(x) = x$.

Conjunto compacto: fechado e limitado.

Teorema de Ponto Fixo de Brouwer

Teorema de Ponto Fixo de Brouwer (1909):

Toda função contínua $f : D \rightarrow D$, onde D é um subconjunto compacto e convexo do $\mathbb{R}^m$, tem um ponto fixo.

Ponto fixo: x em D tal que $f(x) = x$.

Conjunto compacto: fechado e limitado.

Conjunto convexo: se x e $y \in D$, então o segmento $xy \subseteq D$.

Teorema de Ponto Fixo de Brouwer

Teorema de Ponto Fixo de Brouwer (1909):

Toda função contínua $f : D \rightarrow D$, onde D é um subconjunto compacto e convexo do $\mathbb{R}^m$, tem um ponto fixo.

Ponto fixo: x em D tal que $f(x) = x$.

Conjunto compacto: fechado e limitado.

Conjunto convexo: se x e $y \in D$, então o segmento $xy \subseteq D$.

Comentários na aula:

- Teorema do Ponto Fixo de Brouwer para $m = 1$ e $m = 2$.

Teorema de Ponto Fixo de Brouwer

Teorema de Ponto Fixo de Brouwer (1909):

Toda função contínua $f : D \to D$, onde D é um subconjunto compacto e convexo do $\mathbb{R}^m$, tem um ponto fixo.

Ponto fixo: x em D tal que $f(x) = x$.

Conjunto compacto: fechado e limitado.

Conjunto convexo: se x e $y \in D$, então o segmento $xy \subseteq D$.

Comentários na aula:

- Teorema do Ponto Fixo de Brouwer para $m = 1$ e $m = 2$.
- Lema de Sperner e Teorema do Ponto Fixo de Brouwer.

Teorema de Ponto Fixo de Brouwer

Teorema de Ponto Fixo de Brouwer (1909):

Toda função contínua $f : D \to D$, onde D é um subconjunto compacto e convexo do $\mathbb{R}^m$, tem um ponto fixo.

Ponto fixo: x em D tal que $f(x) = x$.

Conjunto compacto: fechado e limitado.

Conjunto convexo: se x e $y \in D$, então o segmento $xy \subseteq D$.

Teorema de Ponto Fixo de Brouwer

Teorema de Ponto Fixo de Brouwer (1909):

Toda função contínua $f : D \to D$, onde D é um subconjunto compacto e convexo do $\mathbb{R}^m$, tem um ponto fixo.

Ponto fixo: x em D tal que $f(x) = x$.

Conjunto compacto: fechado e limitado.

Conjunto convexo: se x e $y \in D$, então o segmento $xy \subseteq D$.

Seja $m_i = |S_i|$ e $m = \sum_i m_i$.
Σ_i: conjunto das estratégias mistas para i
($\Sigma_i = \{p \in \mathbb{R}^{m_i} : p(s) \geq 0 \ \forall s \in S_i$ e $\sum_{s \in S_i} p(s) = 1\} \subseteq \mathbb{R}^{m_i}$)

Teorema de Ponto Fixo de Brouwer

Teorema de Ponto Fixo de Brouwer (1909):

Toda função contínua $f : D \to D$, onde D é um subconjunto compacto e convexo do $\mathbb{R}^m$, tem um ponto fixo.

Ponto fixo: x em D tal que $f(x) = x$.

Conjunto compacto: fechado e limitado.

Conjunto convexo: se x e $y \in D$, então o segmento $xy \subseteq D$.

Seja $m_i = |S_i|$ e $m = \sum_i m_i$.
Σ_i: conjunto das estratégias mistas para i
($\Sigma_i = \{p \in \mathbb{R}^{m_i} : p(s) \geq 0 \; \forall s \in S_i$ e $\sum_{s \in S_i} p(s) = 1\} \subseteq \mathbb{R}^{m_i}$)

O conjunto $\Sigma = \Sigma_1 \times \cdots \times \Sigma_n \subseteq \mathbb{R}^m$ é compacto e convexo.

Prova do Teorema de Nash

Teorema (Nash, 1951): Todo jogo com um número finito de jogadores e conjuntos finitos de estratégias tem um equilíbrio de Nash de estratégias mistas.

Prova do Teorema de Nash

Teorema (Nash, 1951): Todo jogo com um número finito de jogadores e conjuntos finitos de estratégias tem um equilíbrio de Nash de estratégias mistas.

Prova: Considere a função $f : \Sigma \to \Sigma$ definida por $f(\sigma) = \rho$, onde $\rho_i = \arg\max_{\rho'_i \in \Sigma_i} \{U_i(\rho'_i, \sigma_{-i}) - ||\rho'_i - \sigma_i||^2\}$.

Prova do Teorema de Nash

Teorema (Nash, 1951): Todo jogo com um número finito de jogadores e conjuntos finitos de estratégias tem um equilíbrio de Nash de estratégias mistas.

Prova: Considere a função $f : \Sigma \rightarrow \Sigma$ definida por $f(\sigma) = \rho$, onde $\rho_i = \arg\max_{\rho_i' \in \Sigma_i} \{U_i(\rho_i', \sigma_{-i}) - ||\rho_i' - \sigma_i||^2\}$.

A função $g_i(\rho_i') = U_i(\rho_i', \sigma_{-i}) - ||\rho_i' - \sigma_i||^2$ é côncava, logo tem um único máximo, e assim f está bem-definida.

Prova do Teorema de Nash

Teorema (Nash, 1951): Todo jogo com um número finito de jogadores e conjuntos finitos de estratégias tem um equilíbrio de Nash de estratégias mistas.

Prova: Considere a função $f : \Sigma \to \Sigma$ definida por $f(\sigma) = \rho$, onde $\rho_i = \arg\max_{\rho'_i \in \Sigma_i} \{U_i(\rho'_i, \sigma_{-i}) - ||\rho'_i - \sigma_i||^2\}$.

A função $g_i(\rho'_i) = U_i(\rho'_i, \sigma_{-i}) - ||\rho'_i - \sigma_i||^2$ é côncava, logo tem um único máximo, e assim f está bem-definida.

De fato, $g_i : \Sigma_i \to \mathbb{R}$ é uma função quadrática e côncava:

$$g_i(\rho'_i) = \sum_{s \in S} u_i(s) \prod_{j \neq i} \sigma_j(s_j)\, \rho'_i(s_i) - \sum_{s \in S_i} (\rho'_i(s) - \sigma_i(s))^2.$$

Prova do Teorema de Nash

Teorema (Nash, 1951): Todo jogo com um número finito de jogadores e conjuntos finitos de estratégias tem um equilíbrio de Nash de estratégias mistas.

Prova: Considere a função $f : \Sigma \to \Sigma$ definida por $f(\sigma) = \rho$, onde $\rho_i = \arg\max_{\rho'_i \in \Sigma_i} \{U_i(\rho'_i, \sigma_{-i}) - ||\rho'_i - \sigma_i||^2\}$.

Prova do Teorema de Nash

Teorema (Nash, 1951): Todo jogo com um número finito de jogadores e conjuntos finitos de estratégias tem um equilíbrio de Nash de estratégias mistas.

Prova: Considere a função $f : \Sigma \rightarrow \Sigma$ definida por $f(\sigma) = \rho$, onde $\rho_i = \arg\max_{\rho'_i \in \Sigma_i} \{U_i(\rho'_i, \sigma_{-i}) - ||\rho'_i - \sigma_i||^2\}$.

Note ainda que a função ρ_i é contínua em σ.

Prova do Teorema de Nash

Teorema (Nash, 1951): Todo jogo com um número finito de jogadores e conjuntos finitos de estratégias tem um equilíbrio de Nash de estratégias mistas.

Prova: Considere a função $f : \Sigma \to \Sigma$ definida por $f(\sigma) = \rho$, onde $\rho_i = \arg\max_{\rho'_i \in \Sigma_i} \{U_i(\rho'_i, \sigma_{-i}) - ||\rho'_i - \sigma_i||^2\}$.

Note ainda que a função ρ_i é contínua em σ.

Então, pelo Teorema de Brouwer, f tem um ponto fixo $\hat{\sigma}$.

Prova do Teorema de Nash

Teorema (Nash, 1951): Todo jogo com um número finito de jogadores e conjuntos finitos de estratégias tem um equilíbrio de Nash de estratégias mistas.

Prova: Considere a função $f : \Sigma \rightarrow \Sigma$ definida por $f(\sigma) = \rho$, onde $\rho_i = \arg\max_{\rho'_i \in \Sigma_i} \{U_i(\rho'_i, \sigma_{-i}) - ||\rho'_i - \sigma_i||^2\}$.

Note ainda que a função ρ_i é contínua em σ.

Então, pelo Teorema de Brouwer, f tem um ponto fixo $\hat{\sigma}$.

Vamos mostrar que $\hat{\sigma}$ é um equilíbrio de Nash!

Prova do Teorema de Nash

Teorema (Nash, 1951): Todo jogo com um número finito de jogadores e conjuntos finitos de estratégias tem um equilíbrio de Nash de estratégias mistas.

Prova: Considere a função $f : \Sigma \rightarrow \Sigma$ definida por $f(\sigma) = \rho$, onde $\rho_i = \arg\max_{\rho'_i \in \Sigma_i} \{U_i(\rho'_i, \sigma_{-i}) - ||\rho'_i - \sigma_i||^2\}$.

Pelo Teorema de Brouwer, f tem um ponto fixo $\hat{\sigma}$.

Suponha, por contradição, que $\hat{\sigma}$ não é equilíbrio de Nash.

Prova do Teorema de Nash

Teorema (Nash, 1951): Todo jogo com um número finito de jogadores e conjuntos finitos de estratégias tem um equilíbrio de Nash de estratégias mistas.

Prova: Considere a função $f : \Sigma \to \Sigma$ definida por $f(\sigma) = \rho$, onde $\rho_i = \arg\max_{\rho'_i \in \Sigma_i} \{U_i(\rho'_i, \sigma_{-i}) - ||\rho'_i - \sigma_i||^2\}$.

Pelo Teorema de Brouwer, f tem um ponto fixo $\hat{\sigma}$.

Suponha, por contradição, que $\hat{\sigma}$ não é equilíbrio de Nash.

Existe i e ρ'_i em Σ_i tq $U_i(\rho'_i, \hat{\sigma}_{-i}) = U_i(\hat{\sigma}) + \delta$, para $\delta > 0$.

Prova do Teorema de Nash

Teorema (Nash, 1951): Todo jogo com um número finito de jogadores e conjuntos finitos de estratégias tem um equilíbrio de Nash de estratégias mistas.

Prova: Considere a função $f : \Sigma \rightarrow \Sigma$ definida por $f(\sigma) = \rho$, onde $\rho_i = \arg\max_{\rho'_i \in \Sigma_i} \{U_i(\rho'_i, \sigma_{-i}) - ||\rho'_i - \sigma_i||^2\}$.

Pelo Teorema de Brouwer, f tem um ponto fixo $\hat{\sigma}$.

Suponha, por contradição, que $\hat{\sigma}$ não é equilíbrio de Nash.

Existe i e ρ'_i em Σ_i tq $U_i(\rho'_i, \hat{\sigma}_{-i}) = U_i(\hat{\sigma}) + \delta$, para $\delta > 0$.

Vamos escolher $\alpha \in (0, 1]$ tq $\hat{\rho}_i = \hat{\sigma}_i + \alpha(\rho'_i - \hat{\sigma}_i)$ contraria o fato de $f(\hat{\sigma}) = \hat{\sigma}$.

Prova do Teorema de Nash

Teorema (Nash, 1951): Todo jogo com um número finito de jogadores e conjuntos finitos de estratégias tem um equilíbrio de Nash de estratégias mistas.

Prova: Considere a função $f : \Sigma \to \Sigma$ definida por $f(\sigma) = \rho$, onde $\rho_i = \arg\max_{\rho'_i \in \Sigma_i} \{U_i(\rho'_i, \sigma_{-i}) - ||\rho'_i - \sigma_i||^2\}$.

Pelo Teorema de Brouwer, f tem um ponto fixo $\hat{\sigma}$.

Suponha, por contradição, que $\hat{\sigma}$ não é equilíbrio de Nash.

Existe i e ρ'_i em Σ_i tq $U_i(\rho'_i, \hat{\sigma}_{-i}) = U_i(\hat{\sigma}) + \delta$, para $\delta > 0$.

Vamos escolher $\alpha \in (0, 1]$ tq $\hat{\rho}_i = \hat{\sigma}_i + \alpha(\rho'_i - \hat{\sigma}_i)$ contraria o fato de $f(\hat{\sigma}) = \hat{\sigma}$.

Note que tal $\hat{\rho}_i \in \Sigma_i$ pois é combinação convexa de $\hat{\sigma}_i$ e ρ'_i.

Prova do Teorema de Nash

Considere $f : \Sigma \to \Sigma$ definida por $f(\sigma) = \rho$,
onde $\rho_i = \arg\max_{\rho'_i \in \Sigma_i} \{U_i(\rho'_i, \sigma_{-i}) - ||\rho'_i - \sigma_i||^2\}$.

Pelo Teorema de Brouwer, f tem um ponto fixo $\hat{\sigma}$.

Suponha, por contradição, que $\hat{\sigma}$ não é equilíbrio de Nash.

Existe i e ρ'_i em Σ_i tq $U_i(\rho'_i, \hat{\sigma}_{-i}) = U_i(\hat{\sigma}) + \delta$, para $\delta > 0$.

Vamos escolher α tal que $\hat{\rho}_i = \hat{\sigma}_i + \alpha(\rho'_i - \hat{\sigma}_i)$
contraria o fato de $f(\hat{\sigma}) = \hat{\sigma}$.

Prova do Teorema de Nash

Considere $f : \Sigma \to \Sigma$ definida por $f(\sigma) = \rho$,
onde $\rho_i = \arg\max_{\rho'_i \in \Sigma_i} \{U_i(\rho'_i, \sigma_{-i}) - ||\rho'_i - \sigma_i||^2\}$.

Pelo Teorema de Brouwer, f tem um ponto fixo $\hat{\sigma}$.

Suponha, por contradição, que $\hat{\sigma}$ não é equilíbrio de Nash.

Existe i e ρ'_i em Σ_i tq $U_i(\rho'_i, \hat{\sigma}_{-i}) = U_i(\hat{\sigma}) + \delta$, para $\delta > 0$.

Vamos escolher α tal que $\hat{\rho}_i = \hat{\sigma}_i + \alpha(\rho'_i - \hat{\sigma}_i)$
contraria o fato de $f(\hat{\sigma}) = \hat{\sigma}$.

Para σ fixo, $U_i(\rho_i, \sigma_{-i})$ é linear em ρ_i, logo
$U_i(\rho_i - \hat{\sigma}_i, \hat{\sigma_{-i}}) = U_i(\rho_i, \hat{\sigma}_{-i}) - U_i(\hat{\sigma}) = \delta$ e

Prova do Teorema de Nash

Considere $f : \Sigma \to \Sigma$ definida por $f(\sigma) = \rho$,
onde $\rho_i = \arg\max_{\rho'_i \in \Sigma_i} \{U_i(\rho'_i, \sigma_{-i}) - ||\rho'_i - \sigma_i||^2\}$.

Pelo Teorema de Brouwer, f tem um ponto fixo $\hat{\sigma}$.

Suponha, por contradição, que $\hat{\sigma}$ não é equilíbrio de Nash.

Existe i e ρ'_i em Σ_i tq $U_i(\rho'_i, \hat{\sigma}_{-i}) = U_i(\hat{\sigma}) + \delta$, para $\delta > 0$.

Vamos escolher α tal que $\hat{\rho}_i = \hat{\sigma}_i + \alpha(\rho'_i - \hat{\sigma}_i)$
contraria o fato de $f(\hat{\sigma}) = \hat{\sigma}$.

Para σ fixo, $U_i(\rho_i, \sigma_{-i})$ é linear em ρ_i, logo
$U_i(\rho_i - \hat{\sigma}_i, \hat{\sigma}_{-i}) = U_i(\rho_i, \hat{\sigma}_{-i}) - U_i(\hat{\sigma}) = \delta$ e

$$\begin{aligned} U_i(\hat{\rho}_i, \hat{\sigma}_{-i}) &= U_i(\hat{\sigma}_i + \alpha(\rho'_i - \hat{\sigma}_i), \hat{\sigma}_{-i}) \\ &= U_i(\hat{\sigma}) + \alpha\, U_i(\rho'_i - \hat{\sigma}_i, \hat{\sigma}_{-i}) \;=\; U_i(\hat{\sigma}) + \alpha\, \delta \end{aligned}$$

Prova do Teorema de Nash

Considere a função $f : \Sigma \rightarrow \Sigma$ definida por $f(\sigma) = \rho$, onde $\rho_i = \arg\max_{\rho'_i \in \Sigma_i} \{U_i(\rho'_i, \sigma_{-i}) - ||\rho'_i - \sigma_i||^2\}$.

Se o ponto fixo $\hat{\sigma}$ de f não é equilíbrio de Nash, então existe i e ρ'_i em Σ_i tq $U_i(\rho'_i, \hat{\sigma}_{-i}) = U_i(\hat{\sigma}) + \delta$, para $\delta > 0$.

Seja $\hat{\rho}_i = \hat{\sigma}_i + \alpha(\rho'_i - \hat{\sigma}_i)$ para algum $\alpha > 0$.

Prova do Teorema de Nash

Considere a função $f : \Sigma \longrightarrow \Sigma$ definida por $f(\sigma) = \rho$, onde $\rho_i = \arg\max_{\rho'_i \in \Sigma_i} \{U_i(\rho'_i, \sigma_{-i}) - ||\rho'_i - \sigma_i||^2\}$.

Se o ponto fixo $\hat{\sigma}$ de f não é equilíbrio de Nash, então existe i e ρ'_i em Σ_i tq $U_i(\rho'_i, \hat{\sigma}_{-i}) = U_i(\hat{\sigma}) + \delta$, para $\delta > 0$.

Seja $\hat{\rho}_i = \hat{\sigma}_i + \alpha(\rho'_i - \hat{\sigma}_i)$ para algum $\alpha > 0$.

Conforme calculamos, $U_i(\hat{\rho}_i, \hat{\sigma}_{-i}) \; = \; U_i(\hat{\sigma}) + \alpha\,\delta$.

Prova do Teorema de Nash

Considere a função $f : \Sigma \to \Sigma$ definida por $f(\sigma) = \rho$, onde $\rho_i = \arg\max_{\rho_i' \in \Sigma_i} \{U_i(\rho_i', \sigma_{-i}) - ||\rho_i' - \sigma_i||^2\}$.

Se o ponto fixo $\hat{\sigma}$ de f não é equilíbrio de Nash, então existe i e ρ_i' em Σ_i tq $U_i(\rho_i', \hat{\sigma}_{-i}) = U_i(\hat{\sigma}) + \delta$, para $\delta > 0$.

Seja $\hat{\rho}_i = \hat{\sigma}_i + \alpha(\rho_i' - \hat{\sigma}_i)$ para algum $\alpha > 0$.

Conforme calculamos, $U_i(\hat{\rho}_i, \hat{\sigma}_{-i}) \;=\; U_i(\hat{\sigma}) + \alpha\,\delta$.

Se $\alpha < \delta/||\rho_i' - \hat{\sigma}_i||^2$, então

$$\begin{aligned}
U_i(\hat{\rho}_i, \hat{\sigma}_{-i}) - ||\hat{\rho}_i - \hat{\sigma}_i||^2 &= U_i(\hat{\sigma}) + \alpha\,\delta - ||\hat{\rho}_i - \hat{\sigma}_i||^2 \\
&= U_i(\hat{\sigma}) + \alpha\,\delta - \alpha^2||\rho_i' - \hat{\sigma}_i||^2 \\
&> U_i(\hat{\sigma}),
\end{aligned}$$

Prova do Teorema de Nash

Considere a função $f : \Sigma \to \Sigma$ definida por $f(\sigma) = \rho$, onde $\rho_i = \arg\max_{\rho'_i \in \Sigma_i} \{U_i(\rho'_i, \sigma_{-i}) - ||\rho'_i - \sigma_i||^2\}$.

Se o ponto fixo $\hat{\sigma}$ de f não é equilíbrio de Nash, então existe i e ρ'_i em Σ_i tq $U_i(\rho'_i, \hat{\sigma}_{-i}) = U_i(\hat{\sigma}) + \delta$, para $\delta > 0$.

Seja $\hat{\rho}_i = \hat{\sigma}_i + \alpha(\rho'_i - \hat{\sigma}_i)$ para algum $\alpha > 0$.

Conforme calculamos, $U_i(\hat{\rho}_i, \hat{\sigma}_{-i}) \; = \; U_i(\hat{\sigma}) + \alpha\,\delta$.

Se $\alpha < \delta / ||\rho'_i - \hat{\sigma}_i||^2$, então

$$
\begin{aligned}
U_i(\hat{\rho}_i, \hat{\sigma}_{-i}) - ||\hat{\rho}_i - \hat{\sigma}_i||^2 &= U_i(\hat{\sigma}) + \alpha\,\delta - ||\hat{\rho}_i - \hat{\sigma}_i||^2 \\
&= U_i(\hat{\sigma}) + \alpha\,\delta - \alpha^2 ||\rho'_i - \hat{\sigma}_i||^2 \\
&> U_i(\hat{\sigma}),
\end{aligned}
$$

contradição pois $\hat{\sigma}_i$ não é $\arg\max\{U_i(\hat{\rho}_i, \hat{\sigma}_{-i}) - ||\hat{\rho}_i - \hat{\sigma}_i||^2\}$.