# Complexidade computacional

O Teorema de Nash garante a existência de um equilíbrio em qualquer jogo finito.

Mas como encontrar um tal equilíbrio?

# Complexidade computacional

O Teorema de Nash garante a existência de um equilíbrio em qualquer jogo finito.

Mas como encontrar um tal equilíbrio?

Kamal Jain:
"If your laptop cannot find it, neither can the market."

# Complexidade computacional

O Teorema de Nash garante a existência de um equilíbrio em qualquer jogo finito.

Mas como encontrar um tal equilíbrio?

Kamal Jain:
“If your laptop cannot find it, neither can the market.”

Problema NASH: Dado um jogo em forma padrão, encontrar um equilíbrio de Nash.

# Complexidade computacional

O Teorema de Nash garante a existência de um equilíbrio em qualquer jogo finito.

Mas como encontrar um tal equilíbrio?

Kamal Jain:
"If your laptop cannot find it, neither can the market."

Problema NASH: Dado um jogo em forma padrão, encontrar um equilíbrio de Nash.

Podemos resolver esse problema eficientemente?

Qual é a sua complexidade?

# Complexidade computacional

O Teorema de Nash garante a existência de
um equilíbrio em qualquer jogo finito.

Mas como encontrar um tal equilíbrio?

Kamal Jain:
“If your laptop cannot find it, neither can the market.”

Problema NASH: Dado um jogo em forma padrão,
encontrar um equilíbrio de Nash.

Podemos resolver esse problema eficientemente?

Qual é a sua complexidade?

A versão de decisão (existe equilíbrio de Nash?) é trivial...

# Discussão

Nash descreveu um jogo de poker com três jogadores, com utilidades inteiras, e único equilíbrio envolvendo irracionais.

# Discussão

Nash descreveu um jogo de poker com três jogadores, com utilidades inteiras, e único equilíbrio envolvendo irracionais.

Seja $\sigma \in \Sigma$. Estratégia $s$ em $S_i$ é resposta ótima para $\sigma_{-i}$ se

$$U_i(s, \sigma_{-i}) = \max\{U_i(\rho, \sigma_{-i}) : \rho \in \Sigma_i\}.$$

# Discussão

Nash descreveu um jogo de poker com três jogadores, com utilidades inteiras, e único equilíbrio envolvendo irracionais.

Seja $\sigma \in \Sigma$. Estratégia $s$ em $S_i$ é resposta ótima para $\sigma_{-i}$ se

$$U_i(s, \sigma_{-i}) = \max\{U_i(\rho, \sigma_{-i}) : \rho \in \Sigma_i\}.$$

Teorema: $\sigma \in \Sigma$ é equilíbrio de Nash sse todas as estratégias puras no suporte dos $\sigma_i$ são respostas ótimas.

# Discussão

Nash descreveu um jogo de poker com três jogadores, com utilidades inteiras, e único equilíbrio envolvendo irracionais.

Seja $\sigma \in \Sigma$. Estratégia $s$ em $S_i$ é resposta ótima para $\sigma_{-i}$ se

$$U_i(s, \sigma_{-i}) = \max\{U_i(\rho, \sigma_{-i}) : \rho \in \Sigma_i\}.$$

Teorema: $\sigma \in \Sigma$ é equilíbrio de Nash sse todas as estratégias puras no suporte dos $\sigma_i$ são respostas ótimas.

Suporte de $\sigma_i$: subconjunto de $S_i$ em que $\sigma_i$ é positivo.

# Discussão

Seja $\sigma \in \Sigma$. Estratégia $s$ em $S_i$ é resposta ótima para $\sigma_{-i}$ se

$$U_i(s, \sigma_{-i}) = \max\{U_i(\rho, \sigma_{-i}) : \rho \in \Sigma_i\}.$$

Teorema: $\sigma \in \Sigma$ é equilíbrio de Nash sse todas as estratégias puras no suporte dos $\sigma_i$ são respostas ótimas.

Suporte de $\sigma_i$: subconjunto de $S_i$ em que $\sigma_i$ é positivo.

# Discussão

Seja $\sigma \in \Sigma$. Estratégia $s$ em $S_i$ é resposta ótima para $\sigma_{-i}$ se

$$U_i(s, \sigma_{-i}) = \max\{U_i(\rho, \sigma_{-i}) : \rho \in \Sigma_i\}.$$

Teorema: $\sigma \in \Sigma$ é equilíbrio de Nash sse todas as estratégias puras no suporte dos $\sigma_i$ são respostas ótimas.

Suporte de $\sigma_i$: subconjunto de $S_i$ em que $\sigma_i$ é positivo.

Exemplo: Jogo simétrico com dois jogadores dado por

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

# Discussão

Seja $\sigma \in \Sigma$. Estratégia $s$ em $S_i$ é resposta ótima para $\sigma_{-i}$ se

$$U_i(s, \sigma_{-i}) = \max\{U_i(\rho, \sigma_{-i}) : \rho \in \Sigma_i\}.$$

Teorema: $\sigma \in \Sigma$ é equilíbrio de Nash sse todas as estratégias puras no suporte dos $\sigma_i$ são respostas ótimas.

Suporte de $\sigma_i$: subconjunto de $S_i$ em que $\sigma_i$ é positivo.

Exemplo: Jogo simétrico com dois jogadores dado por

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Jogo simétrico de dois jogadores: $A_2 = A_1^t$.

# Discussão

Seja $\sigma \in \Sigma$. Estratégia $s$ em $S_i$ é resposta ótima para $\sigma_{-i}$ se

$$U_i(s, \sigma_{-i}) = \max\{U_i(\rho, \sigma_{-i}) : \rho \in \Sigma_i\}.$$

Teorema: $\sigma \in \Sigma$ é equilíbrio de Nash sse todas as estratégias puras no suporte dos $\sigma_i$ são respostas ótimas.

Suporte de $\sigma_i$: subconjunto de $S_i$ em que $\sigma_i$ é positivo.

Exemplo: Jogo simétrico com dois jogadores dado por

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Equilíbrio simétrico de Nash: (0, 1/3, 2/3).

# Consequência

Resolver NASH significa encontrar
o suporte certo das estratégias mistas de cada jogador.

# Consequência

Resolver NASH significa encontrar
o suporte certo das estratégias mistas de cada jogador.

Dados os suportes,
um sistema de equações polinomiais identifica $\sigma$.

# Consequência

Resolver NASH significa encontrar
o suporte certo das estratégias mistas de cada jogador.

Dados os suportes,
um sistema de equações polinomiais identifica $\sigma$.

Sejam $S'_i \subseteq S_i$ os suportes para cada $i$, e $k_i = |S'_i|$.

As $k_i$ probabilidades correspondentes devem somar $1$.

O valor de $U_i$ deve ser igual para as $k_i$ estratégias.

# Consequência

Resolver NASH significa encontrar
o suporte certo das estratégias mistas de cada jogador.

Dados os suportes,
um sistema de equações polinomiais identifica $\sigma$.

Sejam $S'_i \subseteq S_i$ os suportes para cada $i$, e $k_i = |S'_i|$.

As $k_i$ probabilidades correspondentes devem somar $1$.

O valor de $U_i$ deve ser igual para as $k_i$ estratégias.

Tais restrições são descritas em $k_i$ equações,
para um total de $\sum_i k_i$ equações, com $\sum_i k_i$ variáveis.

# Consequência

Resolver NASH significa encontrar o suporte certo das estratégias mistas de cada jogador.

Sejam $S'_i \subseteq S_i$ os suportes para cada $i$, e $k_i = |S'_i|$.

Sistema de equações polinomiais:

As $k_i$ probabilidades correspondentes devem somar $1$.
O valor de $U_i$ deve ser igual para as $k_i$ estratégias.

Tais restrições são descritas em $k_i$'s equações, para um total de $\sum_i k_i$ equações, com $\sum_i k_i$ variáveis.

# Consequência

Resolver NASH significa encontrar o suporte certo das estratégias mistas de cada jogador.

Sejam $S'_i \subseteq S_i$ os suportes para cada $i$, e $k_i = |S'_i|$.

Sistema de equações polinomiais:

As $k_i$ probabilidades correspondentes devem somar $1$.
O valor de $U_i$ deve ser igual para as $k_i$ estratégias.

Tais restrições são descritas em $k_i$'s equações, para um total de $\sum_i k_i$ equações, com $\sum_i k_i$ variáveis.

Resolva o sistema e verifique se a solução consiste em números positivos que formam um equilíbrio.

# Complexidade computacional

Os seguintes problemas são NP-completos:
dado um jogo com dois jogadores na forma matricial, decidir se este jogo tem

- pelo menos dois equilíbrios de Nash;
- dado $k$, um equilíbrio de Nash para o jogador 1 com utilidade pelo menos $k$;
- dado $k$, um equilíbrio de Nash com valor social pelo menos $k$;
- dado $k$, um equilíbrio de Nash com pelo menos $k$ estratégias no seu suporte;
- dado $s$, um equilíbrio de Nash com $s$ no suporte;
- dado $s$, um equilíbrio de Nash sem $s$ no suporte.

# Complexidade computacional

Problema: Dado jogo com dois jogadores na forma padrão, decidir se existem pelo menos dois equilíbrios de Nash.

# Complexidade computacional

Problema: Dado jogo com dois jogadores na forma padrão, decidir se existem pelo menos dois equilíbrios de Nash.

Vamos mostrar uma redução de SAT para este problema.

# Complexidade computacional

Problema: Dado jogo com dois jogadores na forma padrão, decidir se existem pelo menos dois equilíbrios de Nash.

Vamos mostrar uma redução de SAT para este problema.

$\phi$: fórmula booleana em FNC sobre as variáveis $x_1, \ldots, x_n$.

$J_\epsilon(\phi)$: jogo simétrico com dois jogadores para $\epsilon > 0$.

# Complexidade computacional

Problema: Dado jogo com dois jogadores na forma padrão, decidir se existem pelo menos dois equilíbrios de Nash.

Vamos mostrar uma redução de SAT para este problema.

$\phi$: fórmula booleana em FNC sobre as variáveis $x_1, \ldots, x_n$.

$J_\epsilon(\phi)$: jogo simétrico com dois jogadores para $\epsilon > 0$.

O conjunto $S$ de estratégias de cada jogador é a união

- do conjunto das variáveis $V = \{x_1, \ldots, x_n\}$,
- do conjunto dos literais $L = \{+x_1, -x_1, \ldots, +x_n, -x_n\}$,
- do conjunto das cláusulas $C$, e
- de uma estratégia especial $f$.

# Funções utilidade

- $u_1(f, f) = u_2(f, f) = \epsilon$
- $u_1(y, f) = u_2(f, y) = 0$ para todo $x$ em $S \setminus \{f\}$
- $u_1(f, y) = u_2(y, f) = n - 1$ para todo $x$ em $S \setminus \{f\}$

# Funções utilidade

- $u_1(f, f) = u_2(f, f) = \epsilon$
- $u_1(y, f) = u_2(f, y) = 0$ para todo $x$ em $S \setminus \{f\}$
- $u_1(f, y) = u_2(y, f) = n - 1$ para todo $x$ em $S \setminus \{f\}$
- $u_1(c, \ell) = u_2(\ell, c) = 0$ para todo $c$ em $C$ e $\ell$ in $c$
- $u_1(c, \ell) = u_2(\ell, c) = n$ para todo $c$ em $C$ e $\ell$ in $L \setminus c$
- $u_1(c, y) = u_2(y, c) = n - 4$ para todo $c$ em $C$ e $y$ in $V \cup C$

# Funções utilidade

- $u_1(f, f) = u_2(f, f) = \epsilon$
- $u_1(y, f) = u_2(f, y) = 0$ para todo $x$ em $S \setminus \{f\}$
- $u_1(f, y) = u_2(y, f) = n - 1$ para todo $x$ em $S \setminus \{f\}$
- $u_1(c, \ell) = u_2(\ell, c) = 0$ para todo $c$ em $C$ e $\ell$ in $c$
- $u_1(c, \ell) = u_2(\ell, c) = n$ para todo $c$ em $C$ e $\ell$ in $L \setminus c$
- $u_1(c, y) = u_2(y, c) = n - 4$ para todo $c$ em $C$ e $y$ in $V \cup C$
- $u_1(v, \ell) = u_2(\ell, v) = 0$ para todo $v$ em $V$ e $\ell$ tq $v(\ell) = v$
- $u_1(v, \ell) = u_2(\ell, v) = n$ para todo $v$ em $V$ e $\ell$ tq $v(\ell) \neq v$
- $u_1(v, y) = u_2(y, v) = n - 4$ para todo $v$ em $V$ e $y$ in $V \cup C$

# Funções utilidade

- $u_1(f,f) = u_2(f,f) = \epsilon$
- $u_1(y,f) = u_2(f,y) = 0$ para todo $x$ em $S \setminus \{f\}$
- $u_1(f,y) = u_2(y,f) = n-1$ para todo $x$ em $S \setminus \{f\}$
- $u_1(c,\ell) = u_2(\ell,c) = 0$ para todo $c$ em $C$ e $\ell$ in $c$
- $u_1(c,\ell) = u_2(\ell,c) = n$ para todo $c$ em $C$ e $\ell$ in $L \setminus c$
- $u_1(c,y) = u_2(y,c) = n-4$ para todo $c$ em $C$ e $y$ in $V \cup C$
- $u_1(v,\ell) = u_2(\ell,v) = 0$ para todo $v$ em $V$ e $\ell$ tq $v(\ell) = v$
- $u_1(v,\ell) = u_2(\ell,v) = n$ para todo $v$ em $V$ e $\ell$ tq $v(\ell) \neq v$
- $u_1(v,y) = u_2(y,v) = n-4$ para todo $v$ em $V$ e $y$ in $V \cup C$
- $u_1(\ell_1,\ell_2) = u_2(\ell_2,\ell_1) = n-1$ para todo $\ell_1 \neq -\ell_2$
- $u_1(\ell_1,\ell_2) = u_2(\ell_2,\ell_1) = n-4$ para todo $\ell_1 = -\ell_2$
- $u_1(\ell,y) = u_2(y,\ell) = n-4$ para todo $\ell$ em $L$ e $y$ in $V \cup C$

# Equilíbrios de Nash

Equilíbrio óbvio: $(f, f)$ pois

- $u_1(f, f) = u_2(f, f) = \epsilon$
- $u_1(y, f) = u_2(f, y) = 0$ para todo $x$ em $S \setminus \{f\}$

# Equilíbrios de Nash

Equilíbrio óbvio: $(f, f)$ pois

- $u_1(f, f) = u_2(f, f) = \epsilon$
- $u_1(y, f) = u_2(f, y) = 0$ para todo $x$ em $S \setminus \{f\}$

Existe um outro equilíbrio de Nash (EN) sse $\phi$ é satisfatível.

# Equilíbrios de Nash

Equilíbrio óbvio: $(f, f)$ pois

- $u_1(f, f) = u_2(f, f) = \epsilon$
- $u_1(y, f) = u_2(f, y) = 0$ para todo $x$ em $S \setminus \{f\}$

Existe um outro equilíbrio de Nash (EN) sse $\phi$ é satisfatível.

$A \subseteq L$: conjunto de literais de atribuição que satisfaz $\phi$.

Estratégia mista que escolhe
cada elemento de $A$ com probabilidade $1/n$ é EN.

# Equilíbrios de Nash

Equilíbrio óbvio: $(f, f)$ pois

- $u_1(f, f) = u_2(f, f) = \epsilon$
- $u_1(y, f) = u_2(f, y) = 0$ para todo $x$ em $S \setminus \{f\}$

Existe um outro equilíbrio de Nash (EN) sse $\phi$ é satisfatível.

$A \subseteq L$: conjunto de literais de atribuição que satisfaz $\phi$.

Estratégia mista que escolhe
cada elemento de $A$ com probabilidade $1/n$ é EN.

EN distinto de $(f, f)$ é uma estratégia mista do tipo acima.