Análise de Algoritmos

Parte destes slides são adaptações de slides

do Prof. Paulo Feofiloff e do Prof. José Coelho de Pina.

Programação dinâmica

CLRS 15.2–15.3

= “recursão–com–tabela”
= transformação inteligente de recursão em iteração

Multiplicação iterada de matrizes

Se A é $p \times q$ e B é $q \times r$ então AB é $p \times r$.

$(AB)[i,j] = \sum_k A[i,k]\, B[k,j]$

MULT-MAT (p, A, q, B, r)

```
1    para i ← 1 até p faça
2        para j ← 1 até r faça
3            AB[i,j] ← 0
4            para k ← 1 até q faça
5                AB[i,j] ← AB[i,j] + A[i,k] · B[k,j]
```

Número de multiplicações escalares = $p \cdot q \cdot r$

Multiplicação iterada

Problema: Encontrar número mínimo de multiplicações escalares necessário para calcular produto $A_1 A_2 \cdots A_n$.

$$\begin{array}{ccccccccc} p[0] & & p[1] & & p[2] & \ldots & p[n-1] & & p[n] \\ & A_1 & & A_2 & & \ldots & & A_n & \end{array}$$

cada A_i é $p[i-1] \times p[i]$ ($A_i[1\,..\,p[i-1], 1\,..\,p[i]]$)

Exemplo: $A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$

$$\overset{10}{\quad} A_1 \overset{100}{\quad} A_2 \overset{5}{\quad} A_3 \overset{50}{\quad}$$

$((A_1\ A_2)\ A_3)$	7500	multiplicações escalares
$(A_1\ (A_2\ A_3))$	75000	multiplicações escalares

Soluções ótimas contêm soluções ótimas

Se

$$(A_1 A_2)\,(A_3((A_4 A_5)A_6))$$

é ordem ótima de multiplicação então

$$(A_1 A_2) \quad \text{e} \quad (A_3((A_4 A_5)A_6))$$

também são ordens ótimas.

Soluções ótimas contêm soluções ótimas

Se

$$(A_1 A_2)\,(A_3((A_4 A_5)A_6))$$

é ordem ótima de multiplicação então

$$(A_1 A_2) \quad \text{e} \quad (A_3((A_4 A_5)A_6))$$

também são ordens ótimas.

Decomposição: $(A_i \cdots A_k)\,(A_{k+1} \cdots A_j)$

$m[i,j] =$ número mínimo de multiplicações escalares para calcular $A_i \cdots A_j$

Recorrência

$m[i,j] =$ número mínimo de multiplicações escalares para calcular $A_i \cdots A_j$

se $i = j$ então $m[i,j] = 0$

se $i < j$ então

$$m[i,j] = \min_{i \le k < j} \{ m[i,k] + p[i-1]p[k]p[j] + m[k+1,j] \}$$

Exemplo:

$$m[3,7] = \min_{3 \le k < 7} \{ m[3,k] + p[2]p[k]p[7] + m[k+1,7] \}$$

Algoritmo recursivo

Recebe $p[i-1\,..\,j]$ e devolve $m[i,j]$

```
REC-MAT-CHAIN (p, i, j)
 1  se i = j
 2        então devolva 0
 3  m[i, j] ← ∞
 4  para k ← i até j − 1 faça
 5        q1 ← REC-MAT-CHAIN (p, i, k)
 6        q2 ← REC-MAT-CHAIN (p, k + 1, j)
 7        q ← q1 + p[i − 1]p[k]p[j] + q2
 8        se q < m[i, j]
 9              então m[i, j] ← q
10  devolva m[i, j]
```

Consumo de tempo?

Consumo de tempo

A plataforma utilizada nos experimentos é um PC rodando Linux Debian ?.? com um processador Pentium II de 233 MHz e 128MB de memória RAM .

O programa foi compilado com o gcc versão ?? e opção de compilação "-O2".

n	3	6	10	20	25
tempo	$0.0s$	$0.0s$	$0.01s$	$201s$	$567m$

Consumo de tempo

$T(n) =$ número comparações entre q e $m[\star\,,\star]$
na linha 8 quando $n := j - i + 1$

$$T(1) = 0$$

$$T(n) = \sum_{h=1}^{n-1} (T(h) + T(n-h) + 1) = 2\sum_{h=2}^{n-1} T(h) + (n-1)$$

$$= 2(T(2) + \cdots + T(n-1)) + (n-1) \text{ para } n \geq 2$$

Consumo de tempo

$T(n) =$ número comparações entre q e $m[\star\,,\star]$
na linha 8 quando $n := j - i + 1$

$$T(1) = 0$$

$$T(n) = \sum_{h=1}^{n-1} (T(h) + T(n-h) + 1) = 2\sum_{h=2}^{n-1} T(h) + (n-1)$$

$$= 2(T(2) + \cdots + T(n-1)) + (n-1) \text{ para } n \geq 2$$

Considere a mesma fórmula para $n-1$:

$$T(n-1) = 2(T(2) + \cdots + T(n-2)) + (n-2)$$

e subtraia a primeira da segunda.

Consumo de tempo

$T(n) =$ número comparações entre q e $m[\star\,,\star]$
na linha 8 quando $n := j - i + 1$

$$T(n) \;=\; 2(T(2) + \cdots + T(n{-}1)) \;+\; (n-1)$$

Considere a mesma fórmula para $n-1$:

$$T(n-1) \;=\; 2(T(2) + \cdots + T(n{-}2)) \;+\; (n-2)$$

e subtraia a primeira da segunda:

Consumo de tempo

$T(n) =$ número comparações entre q e $m[\star\,,\star]$
na linha 8 quando $n := j - i + 1$

$$T(n) \;=\; 2(T(2) + \cdots + T(n{-}1)) \;+\; (n-1)$$

Considere a mesma fórmula para $n-1$:

$$T(n-1) \;=\; 2(T(2) + \cdots + T(n{-}2)) \;+\; (n-2)$$

e subtraia a primeira da segunda:

$$T(n) - T(n-1) \;=\; 2\,T(n-1) + 1.$$

Logo $T(n) \;=\; 3\,T(n-1) + 1$.

Consumo de tempo

$T(n) =$ número comparações entre q e $m[\star\,,\star]$
na linha 8 quando $n := j - i + 1$

$$T(n) \;=\; 2(T(2) + \cdots + T(n{-}1)) \;+\; (n-1)$$

Considere a mesma fórmula para $n-1$:

$$T(n-1) \;=\; 2(T(2) + \cdots + T(n{-}2)) \;+\; (n-2)$$

e subtraia a primeira da segunda:

$$T(n) - T(n-1) \;=\; 2\,T(n-1) + 1.$$

Logo $T(n) \;=\; 3\,T(n-1) + 1$.

Fácil verificar que $T(n) \geq \frac{3^{n-1}-1}{2}$ para $n \geq 1$.

Recorrência

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$T(n)$	0	1	4	13	40	121	364	1093
$3^{n-1}-1$	0	2	8	26	80	242	728	2186

Prova: Para $n = 1$, $T(1) = 0 = (1-1)/2$.

Recorrência

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$T(n)$	0	1	4	13	40	121	364	1093
$3^{n-1}-1$	0	2	8	26	80	242	728	2186

Prova: Para $n = 1$, $T(1) = 0 = (1-1)/2$.

Para $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} T(n) &= 3T(n-1)+1 \\ &\overset{\text{hi}}{=} 3(\frac{3^{n-1}-1}{2})+1 \\ &= \frac{3^n-3}{2}+1 = \frac{3^n-3+2}{2} \\ &= \frac{3^n-1}{2}. \end{aligned}$$

Conclusão

$T(n) \geq \frac{3^{n-1}-1}{2}$ para $n \geq 1$.

O consumo de tempo do algoritmo
REC-MAT-CHAIN é $\Omega(3^n)$.

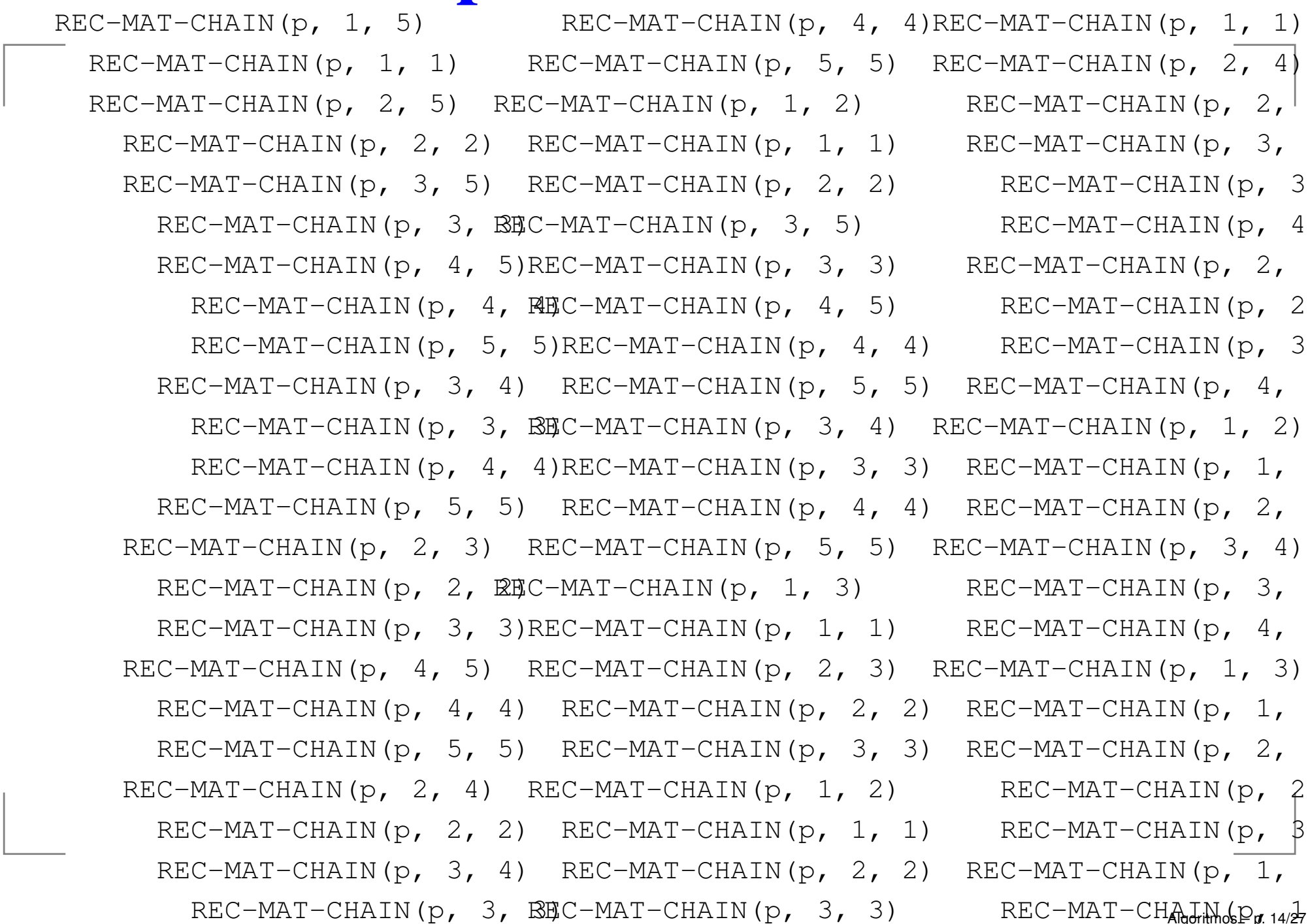
Resolve subproblemas muitas vezes

$p[0] = 10 \quad p[1] = 100 \quad p[2] = 5 \quad p[3] = 50$

```
REC-MAT-CHAIN(p, 1, 3)
  REC-MAT-CHAIN(p, 1, 1)
  REC-MAT-CHAIN(p, 2, 3)
    REC-MAT-CHAIN(p, 2, 2)
    REC-MAT-CHAIN(p, 3, 3)
  REC-MAT-CHAIN(p, 1, 2)
    REC-MAT-CHAIN(p, 1, 1)
    REC-MAT-CHAIN(p, 2, 2)
  REC-MAT-CHAIN(p, 3, 3)
```

Número mínimo de mults = 7500

Resolve subproblemas muitas vezes



Programação dinâmica

Cada subproblema

$$A_i \cdots A_j$$

é resolvido uma só vez.

Em que ordem calcular os componentes da tabela m?

Para calcular $m[2, 6]$ preciso de ...

Programação dinâmica

Cada subproblema

$$A_i \cdots A_j$$

é resolvido uma só vez.

Em que ordem calcular os componentes da tabela m?

Para calcular $m[2,6]$ preciso de ...

$m[2,2]$, $m[2,3]$, $m[2,4]$, $m[2,5]$ e de
$m[3,6]$, $m[4,6]$, $m[5,6]$, $m[6,6]$.

Programação dinâmica

Cada subproblema

$$A_i \cdots A_j$$

é resolvido uma só vez.

Em que ordem calcular os componentes da tabela m?

Para calcular $m[2,6]$ preciso de ...

$m[2,2]$, $m[2,3]$, $m[2,4]$, $m[2,5]$ e de
$m[3,6]$, $m[4,6]$, $m[5,6]$, $m[6,6]$.

Calcule todos os $m[i,j]$ com $j-i+1=2$,
depois todos com $j-i+1=3$,
depois todos com $j-i+1=4$,
etc.

Programação dinâmica

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0							
2		0	$\star$	$\star$	$\star$	??		
3			0			$\star$		
4				0		$\star$		
5					0	$\star$		
6						0		
7							0	
8								0

j

i

Simulação

$p[0]{=}10 \;\; p[1]{=}10 \;\; p[2]{=}20 \;\; p[3]{=}30 \;\; p[4]{=}10 \;\; p[5]{=}15 \;\; p[6]{=}30$

Simulação

$p[0]{=}10$ $p[1]{=}10$ $p[2]{=}20$ $p[3]{=}30$ $p[4]{=}10$ $p[5]{=}15$ $p[6]{=}30$

	1	2	3	4	5	6
1	0	??				
2		0				
3			0			
4				0		
5					0	
6						0

j

i

Simulação

$p[0]{=}10$ $p[1]{=}10$ $p[2]{=}20$ $p[3]{=}30$ $p[4]{=}10$ $p[5]{=}15$ $p[6]{=}30$

	1	2	3	4	5	6
						j
1	0	2000				
2		0				
3			0			
4				0		
5					0	
6						0

$m[1,1] + p[1{-}1]p[1]p[2] + m[1{+}1,2]{=}0{+}2000{+}0{=}2000$

Simulação

$p[0]{=}10$ $p[1]{=}10$ $p[2]{=}20$ $p[3]{=}30$ $p[4]{=}10$ $p[5]{=}15$ $p[6]{=}30$

	1	2	3	4	5	6
1	0	2000				
2		0	??			
3			0			
4				0		
5					0	
6						0

j

i

Simulação

$p[0]$=10 $p[1]$=10 $p[2]$=20 $p[3]$=30 $p[4]$=10 $p[5]$=15 $p[6]$=30

	1	2	3	4	5	6
						j
1	0	2000				
2		0	6000			
3			0			
4				0		
5					0	
6						0

$m[2,2] + p[2-1]p[2]p[3] + m[2+1,3]$=0+6000+0=6000

Simulação

$p[0]$=10 $p[1]$=10 $p[2]$=20 $p[3]$=30 $p[4]$=10 $p[5]$=15 $p[6]$=30

	1	2	3	4	5	6
1	0	2000				
2		0	6000			
3			0	??		
4				0		
5					0	
6						0

j

i

Simulação

$p[0]$=10 $p[1]$=10 $p[2]$=20 $p[3]$=30 $p[4]$=10 $p[5]$=15 $p[6]$=30

	1	2	3	4	5	6
				j		
1	0	2000				
2		0	6000			
3			0	6000		
4				0		
5					0	
6						0

$m[3,3] + p[3-1]p[3]p[4] + m[3+1,4]$=0+6000+0=6000

Simulação

$p[0]{=}10$ $p[1]{=}10$ $p[2]{=}20$ $p[3]{=}30$ $p[4]{=}10$ $p[5]{=}15$ $p[6]{=}30$

	1	2	3	4	5	6
						j
1	0	2000				
2		0	6000			
3			0	6000		
4				0	??	
5					0	
6						0
i						

Simulação

$p[0]$=10 $p[1]$=10 $p[2]$=20 $p[3]$=30 $p[4]$=10 $p[5]$=15 $p[6]$=30

	1	2	3	4	5	6
						j
1	0	2000				
2		0	6000			
3			0	6000		
4				0	4500	
5					0	
6						0

$m[4,4] + p[4-1]p[4]p[5] + m[4+1,5]$=0+4500+0=4500

Simulação

$p[0]$=10 $p[1]$=10 $p[2]$=20 $p[3]$=30 $p[4]$=10 $p[5]$=15 $p[6]$=30

	1	2	3	4	5	6 (j)
1	0	2000				
2		0	6000			
3			0	6000		
4				0	4500	
5					0	??
6						0

i

Simulação

$p[0]$=10 $p[1]$=10 $p[2]$=20 $p[3]$=30 $p[4]$=10 $p[5]$=15 $p[6]$=30

	1	2	3	4	5	6 j
1	0	2000				
2		0	6000			
3			0	6000		
4				0	4500	
5					0	4500
6						0

$m[5,5] + p[5-1]p[5]p[6] + m[5+1,6]$=0+4500+0=4500

Simulação

$p[0]$=10 $p[1]$=10 $p[2]$=20 $p[3]$=30 $p[4]$=10 $p[5]$=15 $p[6]$=30

	1	2	3	4	5	6
1	0	2000	??			
2		0	6000			
3			0	6000		
4				0	4500	
5					0	4500
6						0

j

i

Simulação

$p[0]{=}10$ $p[1]{=}10$ $p[2]{=}20$ $p[3]{=}30$ $p[4]{=}10$ $p[5]{=}15$ $p[6]{=}30$

	1	2	3	4	5	6
						j
1	0	2000	9000			
2		0	6000			
3			0	6000		
4				0	4500	
5					0	4500
6						0

$m[1,1] + p[1{-}1]p[1]p[3] + m[1{+}1,3]{=}0{+}3000{+}6000{=}9000$

Simulação

$p[0]$=10 $p[1]$=10 $p[2]$=20 $p[3]$=30 $p[4]$=10 $p[5]$=15 $p[6]$=30

	1	2	3	4	5	6
i 1	0	2000	8000			
2		0	6000			
3			0	6000		
4				0	4500	
5					0	4500
6						0

$m[1,2] + p[1-1]p[2]p[3] + m[2+1,3]$=2000+6000+0=8000

Simulação

$p[0]{=}10$ $p[1]{=}10$ $p[2]{=}20$ $p[3]{=}30$ $p[4]{=}10$ $p[5]{=}15$ $p[6]{=}30$

i \ j	1	2	3	4	5	6
1	0	2000	8000			
2		0	6000	??		
3			0	6000		
4				0	4500	
5					0	4500
6						0

Simulação

$p[0]$=10 $p[1]$=10 $p[2]$=20 $p[3]$=30 $p[4]$=10 $p[5]$=15 $p[6]$=30

	1	2	3	4	5	6
				j		
1	0	2000	8000			
2		0	6000	8000		
3			0	6000		
4				0	4500	
5					0	4500
6						0

$m[2,2] + p[2-1]p[2]p[4] + m[2+1,4]$=0+2000+6000=8000

Simulação

$p[0]$=10 $p[1]$=10 $p[2]$=20 $p[3]$=30 $p[4]$=10 $p[5]$=15 $p[6]$=30

	1	2	3	4	5	6
				j		
1	0	2000	8000			
2		0	6000	8000		
3			0	6000		
4				0	4500	
5					0	4500
6						0

$m[2,3] + p[2-1]p[3]p[4] + m[3+1,4]$=6000+3000+0=9000

Simulação

$p[0]$=10 $p[1]$=10 $p[2]$=20 $p[3]$=30 $p[4]$=10 $p[5]$=15 $p[6]$=30

	1	2	3	4	5	6
						j
1	0	2000	8000			
2		0	6000	8000		
3			0	6000	??	
4				0	4500	
5					0	4500
6						0
i						

Simulação

$p[0]$=10 $p[1]$=10 $p[2]$=20 $p[3]$=30 $p[4]$=10 $p[5]$=15 $p[6]$=30

	1	2	3	4	5	6
						j
1	0	2000	8000			
2		0	6000	8000		
3			0	6000	13500	
4				0	4500	
5					0	4500
6						0

$m[3,3] + p[3-1]p[3]p[5] + m[3+1,5]$=0+9000+4500=13500

Simulação

$p[0]$=10 $p[1]$=10 $p[2]$=20 $p[3]$=30 $p[4]$=10 $p[5]$=15 $p[6]$=30

	1	2	3	4	5	6
						j
1	0	2000	8000			
2		0	6000	8000		
3			0	6000	9000	
4				0	4500	
5					0	4500
6						0

$m[3,4] + p[3-1]p[4]p[5] + m[4+1,5]$=6000+3000+0=9000

Simulação

$p[0]{=}10$ $p[1]{=}10$ $p[2]{=}20$ $p[3]{=}30$ $p[4]{=}10$ $p[5]{=}15$ $p[6]{=}30$

	1	2	3	4	5	6 (j)
1	0	2000	8000			
2		0	6000	8000		
3			0	6000	9000	
4				0	4500	??
5					0	4500
6						0

(i)

Simulação

$p[0]$=10 $p[1]$=10 $p[2]$=20 $p[3]$=30 $p[4]$=10 $p[5]$=15 $p[6]$=30

	1	2	3	4	5	6 j
1	0	2000	8000			
2		0	6000	8000		
3			0	6000	9000	
4				0	4500	13500
5					0	4500
6						0

$m[4,4] + p[4-1]p[4]p[6] + m[4+1,6]$=0+9000+4500=13500

Simulação

$p[0]$=10 $p[1]$=10 $p[2]$=20 $p[3]$=30 $p[4]$=10 $p[5]$=15 $p[6]$=30

	1	2	3	4	5	6 j
1	0	2000	8000			
2		0	6000	8000		
3			0	6000	9000	
4				0	4500	13500
5					0	4500
6						0

$m[4,5] + p[4-1]p[5]p[6] + m[5+1,6]$=4500+13500+0=18000

Simulação

$p[0]$=10 $p[1]$=10 $p[2]$=20 $p[3]$=30 $p[4]$=10 $p[5]$=15 $p[6]$=30

	1	2	3	4	5	6
1	0	2000	8000	??		
2		0	6000	8000		
3			0	6000	9000	
4				0	4500	13500
5					0	4500
6						0

i j

Simulação

$p[0]$=10 $p[1]$=10 $p[2]$=20 $p[3]$=30 $p[4]$=10 $p[5]$=15 $p[6]$=30

	1	2	3	4	5	6
1	0	2000	8000	9000		
2		0	6000	8000		
3			0	6000	9000	
4				0	4500	13500
5					0	4500
6						0

j

$m[1,1] + p[1-1]p[1]p[4] + m[1+1,4]$=0+1000+8000=9000

Simulação

$p[0]$=10 $p[1]$=10 $p[2]$=20 $p[3]$=30 $p[4]$=10 $p[5]$=15 $p[6]$=30

	1	2	3	4	5	6
1	0	2000	8000	9000		
2		0	6000	8000		
3			0	6000	9000	
4				0	4500	13500
5					0	4500
6						0

j

$m[1,2] + p[1-1]p[2]p[4] + m[2+1,4]$=2000+2000+6000=10000

Simulação

$p[0]{=}10$ $p[1]{=}10$ $p[2]{=}20$ $p[3]{=}30$ $p[4]{=}10$ $p[5]{=}15$ $p[6]{=}30$

	1	2	3	4	5	6
						j
1	0	2000	8000	9000		
2		0	6000	8000		
3			0	6000	9000	
4				0	4500	13500
5					0	4500
6						0

$m[1,3] + p[1{-}1]p[3]p[4] + m[3{+}1,4]{=}8000{+}3000{+}0{=}11000$

Simulação

$p[0]$=10 $p[1]$=10 $p[2]$=20 $p[3]$=30 $p[4]$=10 $p[5]$=15 $p[6]$=30

	1	2	3	4	5	6
						j
1	0	2000	8000	9000		
2		0	6000	8000	??	
3			0	6000	9000	
4				0	4500	13500
5					0	4500
6						0
i						

Simulação

$p[0]$=10 $p[1]$=10 $p[2]$=20 $p[3]$=30 $p[4]$=10 $p[5]$=15 $p[6]$=30

	1	2	3	4	5	6
						j
1	0	2000	8000	9000		
2		0	6000	8000	12000	
3			0	6000	9000	
4				0	4500	13500
5					0	4500
6						0

$m[2,2] + p[2-1]p[2]p[5] + m[2+1,5]$=0+3000+9000=12000

Simulação

$p[0]$=10 $p[1]$=10 $p[2]$=20 $p[3]$=30 $p[4]$=10 $p[5]$=15 $p[6]$=30

	1	2	3	4	5	6
						j
1	0	2000	8000	9000		
2		0	6000	8000	12000	
3			0	6000	9000	
4				0	4500	13500
5					0	4500
6						0

$m[2,3] + p[2-1]p[3]p[5] + m[3+1,5]$=6000+4500+4500=15000

Simulação

$p[0]$=10 $p[1]$=10 $p[2]$=20 $p[3]$=30 $p[4]$=10 $p[5]$=15 $p[6]$=30

	1	2	3	4	5	6
						j
1	0	2000	8000	9000		
2		0	6000	8000	9500	
3			0	6000	9000	
4				0	4500	13500
5					0	4500
6						0

$m[2,4] + p[2-1]p[4]p[5] + m[4+1,5]$=8000+1500+0=9500

Simulação

$p[0]{=}10$ $p[1]{=}10$ $p[2]{=}20$ $p[3]{=}30$ $p[4]{=}10$ $p[5]{=}15$ $p[6]{=}30$

	1	2	3	4	5	6 (j)
1	0	2000	8000	9000		
2		0	6000	8000	9500	
3 (i)			0	6000	9000	??
4				0	4500	13500
5					0	4500
6						0

Simulação

$p[0]$=10 $p[1]$=10 $p[2]$=20 $p[3]$=30 $p[4]$=10 $p[5]$=15 $p[6]$=30

	1	2	3	4	5	6 j
1	0	2000	8000	9000		
2		0	6000	8000	9500	
3			0	6000	9000	31500
4				0	4500	13500
5					0	4500
6						0

$m[3,3] + p[3-1]p[3]p[6] + m[3+1,6]$=0+18000+13500=31500

Simulação

$p[0]$=10 $p[1]$=10 $p[2]$=20 $p[3]$=30 $p[4]$=10 $p[5]$=15 $p[6]$=30

	1	2	3	4	5	6 j
1	0	2000	8000	9000		
2		0	6000	8000	9500	
3			0	6000	9000	16500
4				0	4500	13500
5					0	4500
6						0

$m[3,4] + p[3-1]p[4]p[6] + m[4+1,6]$=6000+6000+4500=16500

Simulação

$p[0]$=10 $p[1]$=10 $p[2]$=20 $p[3]$=30 $p[4]$=10 $p[5]$=15 $p[6]$=30

	1	2	3	4	5	6 j
1	0	2000	8000	9000		
2		0	6000	8000	9500	
3			0	6000	9000	16500
4				0	4500	13500
5					0	4500
6						0

$m[3,5] + p[3-1]p[5]p[6] + m[5+1,6]$=9000+9000+0=18000

Simulação

$p[0]$=10 $p[1]$=10 $p[2]$=20 $p[3]$=30 $p[4]$=10 $p[5]$=15 $p[6]$=30

	1	2	3	4	5	6
1	0	2000	8000	9000	??	
2		0	6000	8000	9500	
3			0	6000	9000	16500
4				0	4500	13500
5					0	4500
6						0

j

i

Simulação

$p[0]$=10 $p[1]$=10 $p[2]$=20 $p[3]$=30 $p[4]$=10 $p[5]$=15 $p[6]$=30

	1	2	3	4	5	6
						j
1	0	2000	8000	9000	11000	
2		0	6000	8000	9500	
3			0	6000	9000	16500
4				0	4500	13500
5					0	4500
6						0

$m[1,1] + p[1-1]p[1]p[5] + m[1+1,5]$=0+1500+9500=11000

Simulação

$p[0]$=10 $p[1]$=10 $p[2]$=20 $p[3]$=30 $p[4]$=10 $p[5]$=15 $p[6]$=30

	1	2	3	4	5	6
						j
1	0	2000	8000	9000	11000	
2		0	6000	8000	9500	
3			0	6000	9000	16500
4				0	4500	13500
5					0	4500
6						0

$m[1,2] + p[1-1]p[2]p[5] + m[2+1,5]$=2000+3000+9000=14000

Simulação

$p[0]$=10 $p[1]$=10 $p[2]$=20 $p[3]$=30 $p[4]$=10 $p[5]$=15 $p[6]$=30

	1	2	3	4	5	6
						j
1	0	2000	8000	9000	11000	
2		0	6000	8000	9500	
3			0	6000	9000	16500
4				0	4500	13500
5					0	4500
6						0

$m[1,3] + p[1-1]p[3]p[5] + m[3+1,5]$=8000+4500+4500=17000

Simulação

$p[0]$=10 $p[1]$=10 $p[2]$=20 $p[3]$=30 $p[4]$=10 $p[5]$=15 $p[6]$=30

	1	2	3	4	5	6
1	0	2000	8000	9000	10500	
2		0	6000	8000	9500	
3			0	6000	9000	16500
4				0	4500	13500
5					0	4500
6						0

j

$m[1,4] + p[1-1]p[4]p[5] + m[4+1,5]$=9000+1500+0=10500

Simulação

$p[0]{=}10$ $p[1]{=}10$ $p[2]{=}20$ $p[3]{=}30$ $p[4]{=}10$ $p[5]{=}15$ $p[6]{=}30$

	1	2	3	4	5	6 (j)
1	0	2000	8000	9000	10500	
2		0	6000	8000	9500	??
3			0	6000	9000	16500
4				0	4500	13500
5					0	4500
6						0

(i)

Simulação

$p[0]$=10 $p[1]$=10 $p[2]$=20 $p[3]$=30 $p[4]$=10 $p[5]$=15 $p[6]$=30

	1	2	3	4	5	6 j
1	0	2000	8000	9000	10500	
2		0	6000	8000	9500	22500
3			0	6000	9000	16500
4				0	4500	13500
5					0	4500
6						0

$m[2,2] + p[2-1]p[2]p[6] + m[2+1,6]$=0+6000+16500=22500

Simulação

$p[0]$=10 $p[1]$=10 $p[2]$=20 $p[3]$=30 $p[4]$=10 $p[5]$=15 $p[6]$=30

	1	2	3	4	5	6 j
1	0	2000	8000	9000	10500	
2		0	6000	8000	9500	22500
3			0	6000	9000	16500
4				0	4500	13500
5					0	4500
6						0

$m[2,3] + p[2-1]p[3]p[6] + m[3+1,6]$=6000+9000+13500=28500

Simulação

$p[0]$=10 $p[1]$=10 $p[2]$=20 $p[3]$=30 $p[4]$=10 $p[5]$=15 $p[6]$=30

	1	2	3	4	5	6 j
1	0	2000	8000	9000	10500	
2		0	6000	8000	9500	15500
3			0	6000	9000	16500
4				0	4500	13500
5					0	4500
6						0

$m[2,4] + p[2-1]p[4]p[6] + m[4+1,6]$=8000+3000+4500=15500

Simulação

$p[0]$=10 $p[1]$=10 $p[2]$=20 $p[3]$=30 $p[4]$=10 $p[5]$=15 $p[6]$=30

	1	2	3	4	5	6 j
1	0	2000	8000	9000	10500	
2		0	6000	8000	9500	14000
3			0	6000	9000	16500
4				0	4500	13500
5					0	4500
6						0

$m[2,5] + p[2-1]p[5]p[6] + m[5+1,6]$=9500+4500+0=14000

Simulação

$p[0]$=10 $p[1]$=10 $p[2]$=20 $p[3]$=30 $p[4]$=10 $p[5]$=15 $p[6]$=30

	1	2	3	4	5	6 j
1	0	2000	8000	9000	10500	??
2		0	6000	8000	9500	14000
3			0	6000	9000	16500
4				0	4500	13500
5					0	4500
6						0

i

Simulação

$p[0]{=}10$ $p[1]{=}10$ $p[2]{=}20$ $p[3]{=}30$ $p[4]{=}10$ $p[5]{=}15$ $p[6]{=}30$

	1	2	3	4	5	6 j
1	0	2000	8000	9000	10500	17000
2		0	6000	8000	9500	14000
3			0	6000	9000	16500
4				0	4500	13500
5					0	4500
6						0

$m[1,1] + p[1{-}1]p[1]p[6] + m[1{+}1,6]{=}0{+}3000{+}14000{=}17000$

Simulação

$p[0]$=10 $p[1]$=10 $p[2]$=20 $p[3]$=30 $p[4]$=10 $p[5]$=15 $p[6]$=30

	1	2	3	4	5	6 j
1	0	2000	8000	9000	10500	17000
2		0	6000	8000	9500	14000
3			0	6000	9000	16500
4				0	4500	13500
5					0	4500
6						0

$m[1,2] + p[1-1]p[2]p[6] + m[2+1,6]$=2000+6000+16500=24500

Simulação

$p[0]{=}10$ $p[1]{=}10$ $p[2]{=}20$ $p[3]{=}30$ $p[4]{=}10$ $p[5]{=}15$ $p[6]{=}30$

	1	2	3	4	5	6	j
1	0	2000	8000	9000	10500	17000	
2		0	6000	8000	9500	14000	
3			0	6000	9000	16500	
4				0	4500	13500	
5					0	4500	
6						0	

$m[1,3] + p[1{-}1]p[3]p[6] + m[3{+}1,6]{=}8000{+}9000{+}13500{=}30500$

Simulação

$p[0]$=10 $p[1]$=10 $p[2]$=20 $p[3]$=30 $p[4]$=10 $p[5]$=15 $p[6]$=30

	1	2	3	4	5	6 (j)
1	0	2000	8000	9000	10500	16500
2		0	6000	8000	9500	14000
3			0	6000	9000	16500
4				0	4500	13500
5					0	4500
6						0

$m[1,4] + p[1-1]p[4]p[6] + m[4+1,6]$=9000+3000+4500=16500

Simulação

$p[0]$=10 $p[1]$=10 $p[2]$=20 $p[3]$=30 $p[4]$=10 $p[5]$=15 $p[6]$=30

	1	2	3	4	5	6 (j)
1	0	2000	8000	9000	10500	15000
2		0	6000	8000	9500	14000
3			0	6000	9000	16500
4				0	4500	13500
5					0	4500
6						0

$m[1,5] + p[1-1]p[5]p[6] + m[5+1,6]$=10500+4500+0=15000

Simulação

$p[0]$=10 $p[1]$=10 $p[2]$=20 $p[3]$=30 $p[4]$=10 $p[5]$=15 $p[6]$=30

	1	2	3	4	5	6 (j)
1	0	2000	8000	9000	10500	15000
2		0	6000	8000	9500	14000
3			0	6000	9000	16500
4				0	4500	13500
5					0	4500
6						0

i

Algoritmo de programação dinâmica

Recebe $p[0\,..\,n]$ e devolve $m[1, n]$.

MATRIX-CHAIN-ORDER (p, n)

```
 1  para i ← 1 até n faça
 2      m[i, i] ← 0
 3  para ℓ ← 2 até n faça
 4      para i ← 1 até n − ℓ + 1 faça
 5          j ← i + ℓ − 1
 6          m[i, j] ← ∞
 7          para k ← i até j − 1 faça
 8              q ← m[i, k] + p[i − 1]p[k]p[j] + m[k+1, j]
 9              se q < m[i, j]
10                  então m[i, j] ← q
11  devolva m[1, n]
```

Correção e consumo de tempo

Linhas 3–10: tratam subcadeias $A_i \cdots A_j$ de comprimento ℓ

Correção e consumo de tempo

Linhas 3–10: tratam subcadeias $A_i \cdots A_j$ de comprimento ℓ

Consumo de tempo: ???

Correção e consumo de tempo

Linhas 3–10: tratam subcadeias $A_i \cdots A_j$ de comprimento ℓ

Consumo de tempo: $\mathrm{O}(n^3)$ (três loops encaixados)

Correção e consumo de tempo

Linhas 3–10: tratam subcadeias $A_i \cdots A_j$ de comprimento ℓ

Consumo de tempo: $\mathrm{O}(n^3)$ (três loops encaixados)

Curioso verificar que consumo de tempo é $\Omega(n^3)$:

Número de execuções da linha 8:

Correção e consumo de tempo

Linhas 3–10: tratam subcadeias $A_i \cdots A_j$ de comprimento ℓ

Consumo de tempo: $\mathrm{O}(n^3)$ (três loops encaixados)

Curioso verificar que consumo de tempo é $\Omega(n^3)$:

Número de execuções da linha 8:

ℓ	i	execs linha 8
2	$1, \ldots, n-1$	$(n-1) \cdot 1$
3	$1, \ldots, n-2$	$(n-2) \cdot 2$
4	$1, \ldots, n-3$	$(n-3) \cdot 3$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$n-1$	$1, 2$	$2 \cdot (n-2)$
n	1	$1 \cdot (n-1)$
	total	$\sum_{h=1}^{n-1} h(n-h)$

Consumo de tempo

Para $n \geq 6$, $\sum_{h=1}^{n-1} h(n-h) =$

$$
\begin{aligned}
&= n\sum_{h=1}^{n-1} h - \sum_{h=1}^{n-1} h^2 \\
&= n\tfrac{1}{2}n(n-1) - \tfrac{1}{6}(n-1)n(2n-1) \quad \text{(CLRS p.1060)} \\
&\geq \tfrac{1}{2}n^2(n-1) - \tfrac{1}{6}2n^3 \\
&\geq \tfrac{1}{2}n^2\tfrac{5n}{6} - \tfrac{1}{3}n^3 \\
&= \tfrac{5}{12}n^3 - \tfrac{1}{3}n^3 \\
&= \tfrac{1}{12}n^3.
\end{aligned}
$$

Consumo de tempo é $\Omega(n^3)$

Conclusão

O consumo de tempo do algoritmo MATRIX-CHAIN-ORDER é $\Theta(n^3)$.

Versão recursiva eficiente

MEMOIZED-MATRIX-CHAIN-ORDER (p, n)

1 **para** $i \leftarrow 1$ **até** n **faça**
2 **para** $j \leftarrow 1$ **até** n **faça**
3 $m[i, j] \leftarrow \infty$
4 **devolva** LOOKUP-CHAIN $(p, 1, n)$

Versão recursiva eficiente

```
LOOKUP-CHAIN (p, i, j)
 1   se m[i, j] < ∞
 2         então devolva m[i, j]
 3   se i = j
 4         então m[i, j] ← 0
 5         senão para k ← i até j − 1 faça
 6                     q ← LOOKUP-CHAIN (p, i, k)
 7                       + p[i−1]p[k]p[j]
 8                       + LOOKUP-CHAIN (p, k+1, j)
 9                     se q < m[i, j]
10                           então m[i, j] ← q
11   devolva m[1, n]
```

Ingredientes de programação dinâmica

- Subestrutura ótima: soluções ótimas contém soluções ótimas de subproblemas.
- Subestrutura: decomponha o problema em subproblemas menores e, com sorte, mais simples.
- *Bottom-up*: combine as soluções dos problemas menores para obter soluções dos maiores.
- Tabela: armazene as soluções dos subproblemas em uma tabela, pois soluções dos subproblemas são consultadas várias vezes.
- Número de subproblemas: para a eficiência do algoritmo é importante que o número de subproblemas resolvidos seja 'pequeno'.
- Memoized: versão *top-down*, recursão com tabela.

Exercício

O algoritmo MATRIX-CHAIN-ORDER determina o número mínimo de multiplicações escalares necessário para calcular produto $A_1 A_2 \cdots A_n$.

Na aula, mencionamos uma maneira de obter uma parentização ótima a partir dos cálculos feitos, usando para isso um dado a mais que podemos guardar no decorrer do algoritmo.

Faça os ajustes sugeridos na aula, de modo a guardar esse dado extra, e devolvê-lo junto com o valor $m[1, n]$.

Faça uma rotina que recebe a informação extra armazenada pelo algoritmo acima e imprime uma parentização ótima das matrizes $A_1 A_2 \cdots A_n$.

Exercícios

Exercício 13.A [CLRS 15.2-1]
Encontre a maneira ótima de fazer a multiplicação iterada das matrizes cujas dimensões são $(5, 10, 3, 12, 5, 50, 6)$.

Exercício 13.B [CLRS 15.2-5]
Mostre que são necessários exatamente $n - 1$ pares de parênteses para especificar exatamente a ordem de multiplicação de $A_1 \cdot A_2 \cdots A_n$.

Exercício 13.C [CLRS 15.3-2]
Desenhe a árvore de recursão para o algoritmo MERGE-SORT aplicado a um vetor de 16 elementos. Por que a técnica de programação dinâmica não é capaz de acelerar o algoritmo?

Mais exercícios

Exercício 13.D [CLRS 15.3-5 expandido]
Considere o seguinte algoritmo para determinar a ordem de multiplicação de uma cadeia de matrizes $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de dimensões $p_0, p_1, \ldots, p_n$: primeiro, escolha k que minimize p_k; depois, determine recursivamente as ordens de multiplicação de $A_1, \ldots, A_k$ e $A_{k+1}, \ldots, A_n$. Esse algoritmo produz uma ordem que minimiza o número total de multiplicações escalares? E se k for escolhido de modo a maximizar p_k? E se k for escolhido de modo a minimizar p_k?

Exercício 13.E
Prove que o número de execuções da linha 9 em MATRIX-CHAIN-ORDER é $\mathrm{O}(n^3)$.