Análise de Algoritmos

Parte destes slides são adaptações de slides

do Prof. Paulo Feofiloff e do Prof. José Coelho de Pina.

Ordenação em tempo linear

CLRS cap 8

Ordenação: limite inferior

Problema: Rearranjar um vetor $A[1\,..\,n]$ de modo que ele fique em ordem crescente.

Existem algoritmos que consomem tempo $\mathrm{O}(n \lg n)$.

Ordenação: limite inferior

Problema: Rearranjar um vetor $A[1\,..\,n]$ de modo que ele fique em ordem crescente.

Existem algoritmos que consomem tempo $\mathrm{O}(n \lg n)$.

Existe algoritmo assintoticamente melhor?

Ordenação: limite inferior

Problema: Rearranjar um vetor $A[1\,..\,n]$ de modo que ele fique em ordem crescente.

Existem algoritmos que consomem tempo $\mathrm{O}(n \lg n)$.

Existe algoritmo assintoticamente melhor?

NÃO, se o algoritmo é baseado em comparações.

Prova?

Ordenação: limite inferior

Problema: Rearranjar um vetor $A[1\,..\,n]$ de modo que ele fique em ordem crescente.

Existem algoritmos que consomem tempo $\mathrm{O}(n \lg n)$.

Existe algoritmo assintoticamente melhor?

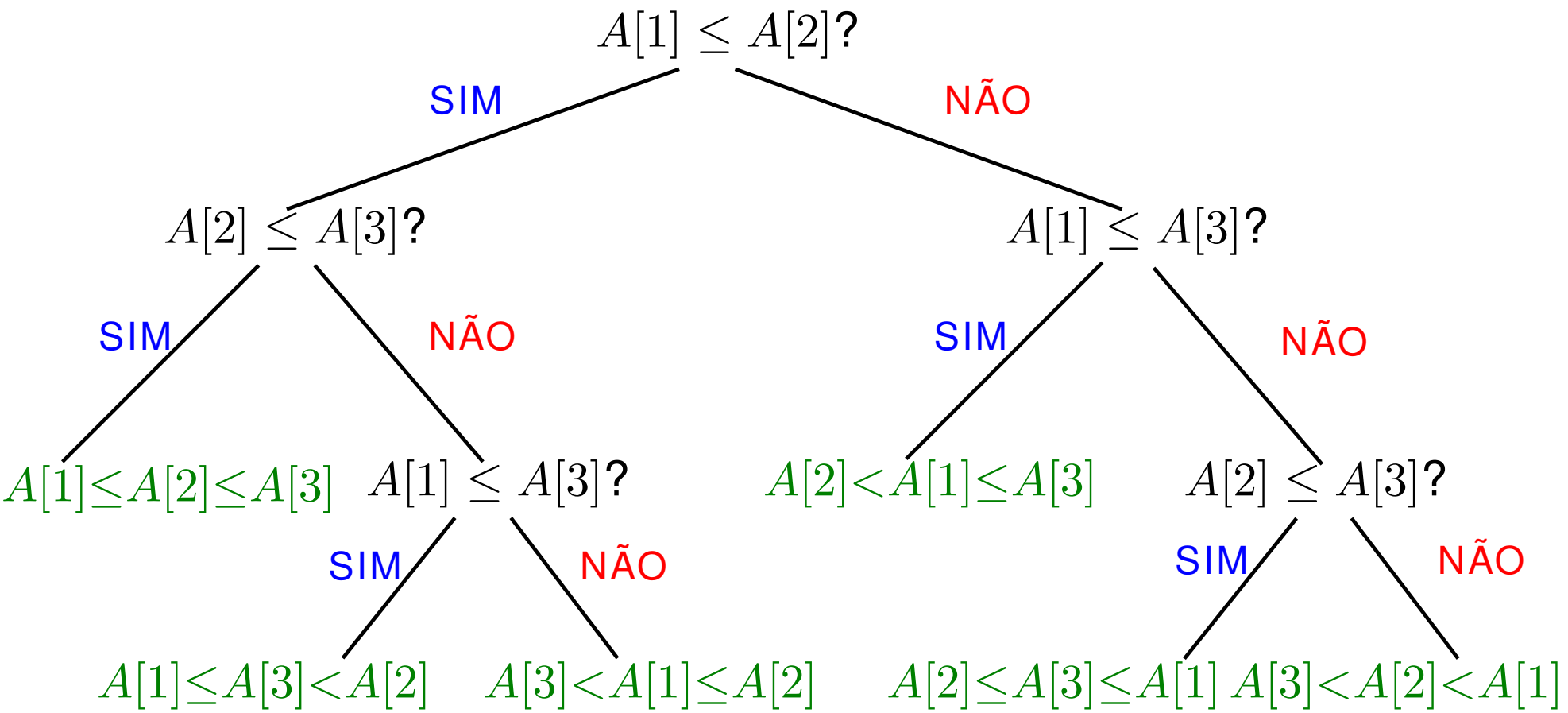
NÃO, se o algoritmo é baseado em comparações.

Prova?

Qualquer algoritmo baseado em comparações é uma "árvore de decisão".

Exemplo

ORDENA-POR-INSERÇÃO $(A[1\,..\,3])$:



Limite inferior

Considere uma árvore de decisão para $A[1\,..\,n]$.

Limite inferior

Considere uma árvore de decisão para $A[1\,..\,n]$.

Número de comparações, no pior caso?

Limite inferior

Considere uma árvore de decisão para $A[1\,..\,n]$.

Número de comparações, no pior caso?
Resposta: altura, h, da árvore de decisão.

Limite inferior

Considere uma árvore de decisão para $A[1\,..\,n]$.

Número de comparações, no pior caso?
Resposta: altura, h, da árvore de decisão.

Todas as $n!$ permutações de $1, \ldots, n$ devem ser folhas.

Limite inferior

Considere uma árvore de decisão para $A[1\,..\,n]$.

Número de comparações, no pior caso?
Resposta: altura, h, da árvore de decisão.

Todas as $n!$ permutações de $1, \ldots, n$ devem ser folhas.

Toda árvore binária de altura h tem no máximo 2^h folhas.

Limite inferior

Considere uma árvore de decisão para $A[1\,..\,n]$.

Número de comparações, no pior caso?
Resposta: altura, h, da árvore de decisão.

Todas as $n!$ permutações de $1, \ldots, n$ devem ser folhas.

Toda árvore binária de altura h tem no máximo 2^h folhas.

Prova: Por indução em h. A afirmação vale para $h = 0$.

Limite inferior

Considere uma árvore de decisão para $A[1\,..\,n]$.

Número de comparações, no pior caso?
Resposta: altura, h, da árvore de decisão.

Todas as $n!$ permutações de $1, \ldots, n$ devem ser folhas.

Toda árvore binária de altura h tem no máximo 2^h folhas.

Prova: Por indução em h. A afirmação vale para $h = 0$.
Suponha que a afirmação vale para toda árvore binária de altura menor que h, para $h \geq 1$.

Limite inferior

Considere uma árvore de decisão para $A[1\,..\,n]$.

Número de comparações, no pior caso?
Resposta: altura, h, da árvore de decisão.

Todas as $n!$ permutações de $1, \ldots, n$ devem ser folhas.

Toda árvore binária de altura h tem no máximo 2^h folhas.

Prova: Por indução em h. A afirmação vale para $h = 0$.
Suponha que a afirmação vale para toda árvore binária de altura menor que h, para $h \geq 1$.
Número de folhas de árvore de altura h é a soma do número de folhas das subárvores, que têm altura $\leq h - 1$.

Limite inferior

Considere uma árvore de decisão para $A[1\,..\,n]$.

Número de comparações, no pior caso?
Resposta: altura, h, da árvore de decisão.

Todas as $n!$ permutações de $1, \ldots, n$ devem ser folhas.

Toda árvore binária de altura h tem no máximo 2^h folhas.

Prova: Por indução em h. A afirmação vale para $h = 0$.
Suponha que a afirmação vale para toda árvore binária de altura menor que h, para $h \geq 1$.
Número de folhas de árvore de altura h é a soma do número de folhas das subárvores, que têm altura $\leq h - 1$.
Logo, o número de folhas de uma árvore de altura h é

$$\leq \; 2 \times 2^{h-1} \; = \; 2^h.$$

Limite inferior

Assim, devemos ter $2^h \geq n!$, donde $h \geq \lg(n!)$.

Limite inferior

Assim, devemos ter $2^h \geq n!$, donde $h \geq \lg(n!)$.

$$(n!)^2 \;=\; \prod_{i=0}^{n-1} (n-i)(i+1) \;\geq\; \prod_{i=1}^{n} n \;=\; n^n$$

Limite inferior

Assim, devemos ter $2^h \geq n!$, donde $h \geq \lg(n!)$.

$$(n!)^2 \;=\; \prod_{i=0}^{n-1} (n-i)(i+1) \;\geq\; \prod_{i=1}^{n} n \;=\; n^n$$

Portanto,

$$h \;\geq\; \lg(n!) \;\geq\; \frac{1}{2}\, n \lg n.$$

Limite inferior

Assim, devemos ter $2^h \geq n!$, donde $h \geq \lg(n!)$.

$$(n!)^2 \;=\; \prod_{i=0}^{n-1} (n-i)(i+1) \;\geq\; \prod_{i=1}^{n} n \;=\; n^n$$

Portanto,

$$h \;\geq\; \lg(n!) \;\geq\; \frac{1}{2}\, n \lg n.$$

Alternativamente, a fórmula de Stirling diz que

$$n! \;=\; \sqrt{2\pi\, n}\big(\frac{n}{e}\big)^n (1 + \Theta(\frac{1}{n})).$$

Limite inferior

Assim, devemos ter $2^h \geq n!$, donde $h \geq \lg(n!)$.

$$(n!)^2 \;=\; \prod_{i=0}^{n-1} (n-i)(i+1) \;\geq\; \prod_{i=1}^{n} n \;=\; n^n$$

Portanto,

$$h \;\geq\; \lg(n!) \;\geq\; \frac{1}{2}\, n \lg n.$$

Alternativamente, a fórmula de Stirling diz que

$$n! \;=\; \sqrt{2\pi\, n}\big(\frac{n}{e}\big)^n (1 + \Theta(\frac{1}{n})).$$

Disso, temos que $h \;\geq\; \lg(n!) \;\geq\; \lg\left(\frac{n}{e}\right)^n \;=\; n(\lg n - \lg e)$.

Conclusão

Todo algoritmo de ordenação
baseado em comparações faz

$$\Omega(n \lg n)$$

comparações no pior caso.

Counting Sort

Recebe inteiros n e k, e um vetor $A[1\,..\,n]$ onde cada elemento é um inteiro entre 1 e k.

Counting Sort

Recebe inteiros n e k, e um vetor $A[1\,..\,n]$ onde cada elemento é um inteiro entre 1 e k.

Devolve um vetor $B[1\,..\,n]$ com os elementos de $A[1\,..\,n]$ em ordem crescente.

Counting Sort

Recebe inteiros n e k, e um vetor $A[1\,..\,n]$ onde cada elemento é um inteiro entre 1 e k.

Devolve um vetor $B[1\,..\,n]$ com os elementos de $A[1\,..\,n]$ em ordem crescente.

```
CountingSort(A, n)
 1   para i ← 1 até k faça
 2       C[i] ← 0
 3   para j ← 1 até n faça
 4       C[A[j]] ← C[A[j]] + 1
 5   para i ← 2 até k faça
 6       C[i] ← C[i] + C[i − 1]
 7   para j ← n decrescendo até 1 faça
 8       B[C[A[j]]] ← A[j]
 9       C[A[j]] ← C[A[j]] − 1
10   devolva B
```

Consumo de tempo

linha	consumo na linha
1	$\Theta(k)$
2	$\mathrm{O}(k)$
3	$\Theta(n)$
4	$\mathrm{O}(n)$
5	$\Theta(k)$
6	$\mathrm{O}(k)$
7	$\Theta(n)$
8	$\mathrm{O}(n)$
9	$\mathrm{O}(n)$
10	$\Theta(1)$
total	????

Consumo de tempo

linha	consumo na linha
1	$\Theta(k)$
2	$\mathrm{O}(k)$
3	$\Theta(n)$
4	$\mathrm{O}(n)$
5	$\Theta(k)$
6	$\mathrm{O}(k)$
7	$\Theta(n)$
8	$\mathrm{O}(n)$
9	$\mathrm{O}(n)$
10	$\Theta(1)$
total	$\Theta(k+n)$

Counting Sort

```
COUNTINGSORT(A, n)
 1   para i ← 1 até k faça
 2       C[i] ← 0
 3   para j ← 1 até n faça
 4       C[A[j]] ← C[A[j]] + 1
 5   para i ← 2 até k faça
 6       C[i] ← C[i] + C[i − 1]
 7   para j ← n decrescendo até 1 faça
 8       B[C[A[j]]] ← A[j]
 9       C[A[j]] ← C[A[j]] − 1
10   devolva B
```

Consumo de tempo: $\Theta(k+n)$

Se $k = \mathrm{O}(n)$, o consumo de tempo é $\Theta(n)$.

Radix Sort

Algoritmo usado para ordenar

- inteiros não-negativos com d dígitos
- cartões perfurados
- registros cuja chave tem vários campos

Radix Sort

Algoritmo usado para ordenar

- inteiros não-negativos com d dígitos
- cartões perfurados
- registros cuja chave tem vários campos

dígito 1: menos significativo
dígito d: mais significativo

Radix Sort

Algoritmo usado para ordenar

- inteiros não-negativos com d dígitos
- cartões perfurados
- registros cuja chave tem vários campos

dígito 1: menos significativo
dígito d: mais significativo

```
RADIXSORT(A, n, d)
1   para i ← 1 até d faça
2       ORDENE(A, n, i)
```

Radix Sort

Algoritmo usado para ordenar

- inteiros não-negativos com d dígitos
- cartões perfurados
- registros cuja chave tem vários campos

dígito 1: menos significativo
dígito d: mais significativo

```
RADIXSORT(A, n, d)
1   para i ← 1 até d faça
2       ORDENE(A, n, i)
```

ORDENE(A, n, i): ordena $A[1\,..\,n]$ pelo i-ésimo dígito dos números em A por meio de um algoritmo estável.

Estabilidade

Um algoritmo de ordenação é estável se sempre que, inicialmente, $A[i] = A[j]$ para $i < j$, a cópia $A[i]$ termina em uma posição menor do vetor que a cópia $A[j]$.

Estabilidade

Um algoritmo de ordenação é estável se sempre que, inicialmente, $A[i] = A[j]$ para $i < j$, a cópia $A[i]$ termina em uma posição menor do vetor que a cópia $A[j]$.

Isso só é relevante quando temos informação satélite.

Estabilidade

Um algoritmo de ordenação é estável se sempre que, inicialmente, $A[i] = A[j]$ para $i < j$, a cópia $A[i]$ termina em uma posição menor do vetor que a cópia $A[j]$.

Isso só é relevante quando temos informação satélite.

Quais dos algoritmos que vimos são estáveis?

Estabilidade

Um algoritmo de ordenação é estável se sempre que, inicialmente, $A[i] = A[j]$ para $i < j$, a cópia $A[i]$ termina em uma posição menor do vetor que a cópia $A[j]$.

Isso só é relevante quando temos informação satélite.

Quais dos algoritmos que vimos são estáveis?

- inserção direta? seleção direta? bubblesort?
- mergesort?
- quicksort?
- heapsort?
- countingsort?

Consumo de tempo do Radixsort

Depende do algoritmo ORDENE.

Consumo de tempo do Radixsort

Depende do algoritmo ORDENE.

Se cada dígito é um inteiro de 1 a k,
então podemos usar o CountingSort.

Consumo de tempo do Radixsort

Depende do algoritmo ORDENE.

Se cada dígito é um inteiro de 1 a k,
então podemos usar o CountingSort.

Neste caso, o consumo de tempo é $\Theta(d(k+n))$.

Consumo de tempo do Radixsort

Depende do algoritmo ORDENE.

Se cada dígito é um inteiro de 1 a k,
então podemos usar o CountingSort.

Neste caso, o consumo de tempo é $\Theta(d(k+n))$.

Se d é limitado por uma constante (ou seja, se $d = \mathrm{O}(1)$)
e $k = \mathrm{O}(n)$, então o consumo de tempo é $\Theta(n)$.

Bucket Sort

Recebe um inteiro n e um vetor $A[1\,..\,n]$ onde cada elemento é um número no intervalo $[0, 1)$.

Bucket Sort

Recebe um inteiro n e um vetor $A[1\,..\,n]$ onde cada elemento é um número no intervalo $[0, 1)$.

Devolve um vetor $C[1\,..\,n]$ com os elementos de $A[1\,..\,n]$ em ordem crescente.

Bucket Sort

Recebe um inteiro n e um vetor $A[1\,..\,n]$ onde cada elemento é um número no intervalo $[0, 1)$.

Devolve um vetor $C[1\,..\,n]$ com os elementos de $A[1\,..\,n]$ em ordem crescente.

```
BUCKETSORT(A, n)
1   para i ← 0 até n − 1 faça
2       B[i] ← NIL
3   para i ← 1 até n faça
4       INSIRA(B[⌊n A[i]⌋], A[i])
5   para i ← 0 até n − 1 faça
6       ORDENELISTA(B[i])
7   C ← CONCATENE(B, n)
8   devolva C
```

Bucket Sort

```
BUCKETSORT(A, n)
 1   para i ← 0 até n − 1 faça
 2         B[i] ← NIL
 3   para i ← 1 até n faça
 4         INSIRA(B[⌊n A[i]⌋], A[i])
 5   para i ← 0 até n − 1 faça
 6         ORDENELISTA(B[i])
 7   C ← CONCATENE(B, n)
 8   devolva C
```

Bucket Sort

```
BUCKETSORT(A, n)
 1  para i ← 0 até n − 1 faça
 2        B[i] ← NIL
 3  para i ← 1 até n faça
 4        INSIRA(B[⌊n A[i]⌋], A[i])
 5  para i ← 0 até n − 1 faça
 6        ORDENELISTA(B[i])
 7  C ← CONCATENE(B, n)
 8  devolva C
```

INSIRA(p, x): insere x na lista apontada por p

ORDENELISTA(p): ordena a lista apontada por p

CONCATENE(B, n): devolve a lista obtida da concatenação das listas apontadas por $B[0], \ldots, B[n-1]$.

Bucket Sort

```
BUCKETSORT(A, n)
 1  para i ← 0 até n − 1 faça
 2        B[i] ← NIL
 3  para i ← 1 até n faça
 4        INSIRA(B[⌊n A[i]⌋], A[i])
 5  para i ← 0 até n − 1 faça
 6        ORDENELISTA(B[i])
 7  C ← CONCATENE(B, n)
 8  devolva C
```

Se os números em $A[1\,..\,n]$ forem uniformemente distribuídos no intervalo $[0, 1)$, então o consumo de tempo esperado é linear em n.

Bucket Sort

Se os números em $A[1\,..\,n]$ forem uniformemente distribuídos no intervalo $[0, 1)$, então o número esperado de elementos de $A[1\,..\,n]$ em cada lista $B[i]$ é $\Theta(1)$.

Bucket Sort

Se os números em $A[1\,..\,n]$ forem uniformemente distribuídos no intervalo $[0, 1)$, então o número esperado de elementos de $A[1\,..\,n]$ em cada lista $B[i]$ é $\Theta(1)$.

Logo, o consumo de tempo esperado para ordenar cada uma das listas $B[i]$ é $\Theta(1)$.

Assim, o consumo de tempo esperado do algoritmo BUCKETSORT neste caso é $\Theta(n)$.

Bucket Sort

Se os números em $A[1\,..\,n]$ forem uniformemente distribuídos no intervalo $[0, 1)$, então o número esperado de elementos de $A[1\,..\,n]$ em cada lista $B[i]$ é $\Theta(1)$.

Logo, o consumo de tempo esperado para ordenar cada uma das listas $B[i]$ é $\Theta(1)$.

Assim, o consumo de tempo esperado do algoritmo BUCKETSORT neste caso é $\Theta(n)$.

Exercícios

Exercício 10.A
Desenhe a árvore de decisão para o SELECTIONSORT aplicado a $A[1\,..\,3]$ com todos os elementos distintos.

Exercício 10.B [CLRS 8.1-1]
Qual o menor profundidade (= menor nível) que uma folha pode ter em uma árvore de decisão que descreve um algoritmo de ordenação baseado em comparações?

Exercício 10.C [CLRS 8.1-2]
Mostre que $\lg(n!) = \Omega(n \lg n)$ sem usar a fórmula de Stirling. Sugestão: Calcule $\sum_{k=n/2}^{n} \lg k$. Use as técnicas de CLRS A.2.

Exercícios

Exercício 10.D [CLRS 8.2-1]
Simule a execução do CountingSort usando como entrada o vetor $A[1\,..\,11] = \langle 7, 1, 3, 1, 2, 4, 5, 7, 2, 4, 3\rangle$.

Exercício 10.E [CLRS 8.2-2]
Mostre que o CountingSort é estável.

Exercício 10.F [CLRS 8.2-3]
Suponha que o **para** da linha 7 do CountingSort é substituído por

```
7    para j ← 1 até n faça
```

Mostre que o ainda funciona. O algoritmo resultante continua estável?