Teorema de Gibbard-Satterthwaite

Teorema de Gibbard-Satterthwaite: Se f é uma função de escolha social à prova de estratégia sobre A, com $|A| \geq 3$, então f é uma ditadura.

Teorema de Gibbard-Satterthwaite

Teorema de Gibbard-Satterthwaite: Se f é uma função de escolha social à prova de estratégia sobre A, com $|A| \geq 3$, então f é uma ditadura.

Dinheiro pode ser usado para driblar o teorema acima.

Nem sempre dinheiro pode ser usado como compensação:
por razões éticas ou considerações institucionais
(decisões políticas, doações de orgãos, etc)

Teorema de Gibbard-Satterthwaite

Teorema de Gibbard-Satterthwaite: Se f é uma função de escolha social à prova de estratégia sobre A, com $|A| \geq 3$, então f é uma ditadura.

Dinheiro pode ser usado para driblar o teorema acima.

Nem sempre dinheiro pode ser usado como compensação:
por razões éticas ou considerações institucionais
(decisões políticas, doações de orgãos, etc)

Na aula passada, consideramos uma situação
onde a preferência dos participantes é restrita
de modo que o teorema não se aplique.

Preferências de pico único

Como escolher a temperatura do AC
num ambiente de trabalho com muitas pessoas?

Preferências de pico único

Como escolher a temperatura do AC
num ambiente de trabalho com muitas pessoas?

Considere $A = [0, 1]$ (conjunto de possíveis escolhas).

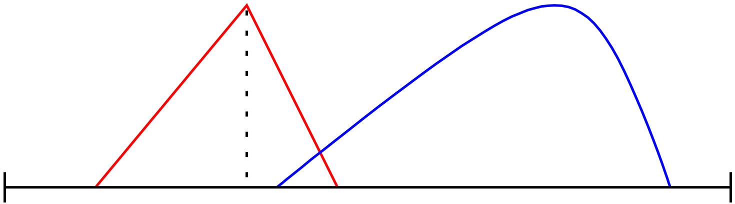
Preferências de pico único

Como escolher a temperatura do AC
num ambiente de trabalho com muitas pessoas?

Considere $A = [0, 1]$ (conjunto de possíveis escolhas).

Cada indivíduo tem uma preferência $\succ_i$ sobre A.

$\succ_i$ é de pico único se existe $p_i \in A$ tq,
para todo $x \in A \setminus \{p_i\}$ e $\lambda \in [0, 1)$,
$\lambda x + (1 - \lambda) p_i \succ_i x$.



Preferências de pico único

Como escolher a temperatura do AC
num ambiente de trabalho com muitas pessoas?

Considere $A = [0, 1]$ (conjunto de possíveis escolhas).

Cada indivíduo tem uma preferência $\succ_i$ sobre A.

$\succ_i$ é de pico único se existe $p_i \in A$ tq,
para todo $x \in A \setminus \{p_i\}$ e $\lambda \in [0, 1)$,
$\lambda\, x + (1 - \lambda)\, p_i \succ_i x$.

$\mathcal{R}$: coleção das preferências com pico único.

Preferências de pico único

Como escolher a temperatura do AC
num ambiente de trabalho com muitas pessoas?

Considere $A = [0, 1]$ (conjunto de possíveis escolhas).

Cada indivíduo tem uma preferência $\succ_i$ sobre A.

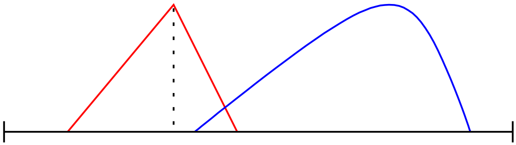
$\succ_i$ é de pico único se existe $p_i \in A$ tq,
para todo $x \in A \setminus \{p_i\}$ e $\lambda \in [0, 1)$,
$\lambda\, x + (1 - \lambda)\, p_i \succ_i x$.

$\mathcal{R}$: coleção das preferências com pico único.

Mecanismo $f : \mathcal{R}^n \rightarrow A$ é à prova de estratégia se declarar
a sua real preferência é uma estratégia (fracamente) dominante.

Preferências de pico único

$\succ_i$ é de pico único se existe $p_i \in A$ tq,
para todo $x \in A \setminus \{p_i\}$ e $\lambda \in [0,1)$,
$\lambda x + (1-\lambda) p_i \succ_i x$.

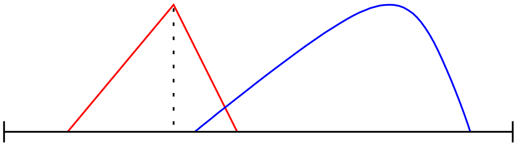


$\mathcal{R}$: coleção das preferências com pico único.

Mecanismo $f : \mathcal{R}^n \to A$ é à prova de estratégia:
preferência real é estratégia (fracamente) dominante.

Preferências de pico único

$\succ_i$ é de pico único se existe $p_i \in A$ tq,
para todo $x \in A \setminus \{p_i\}$ e $\lambda \in [0,1)$,
$\lambda\, x + (1-\lambda)\, p_i \succ_i x$.



$\mathcal{R}$: coleção das preferências com pico único.

Mecanismo $f : \mathcal{R}^n \to A$ é à prova de estratégia:
preferência real é estratégia (fracamente) dominante.

Vamos mostrar
um universo rico de mecanismo à prova de estratégia.

Definições

Considere um mecanismo $f : \mathcal{R}^n \to A$.

$\succ = (\succ_1, \ldots, \succ_n) \in \mathcal{R}^n, \quad p_i$ pico de $\succ_i$

Definições

Considere um mecanismo $f : \mathcal{R}^n \to A$.

$\succ = (\succ_1, \ldots, \succ_n) \in \mathcal{R}^n$, $\quad p_i$ pico de $\succ_i$

f é sobrejetor se existe $\succ$ tq $f(\succ) = x$ para todo $x \in A$.

Definições

Considere um mecanismo $f : \mathcal{R}^n \to A$.

$\succ = (\succ_1, \ldots, \succ_n) \in \mathcal{R}^n, \quad p_i$ pico de $\succ_i$

f é sobrejetor se existe $\succ$ tq $f(\succ) = x$ para todo $x \in A$.

f é unânime se $f(\succ) = x$ sempre que $p_i = x$ para todo i.

Definições

Considere um mecanismo $f : \mathcal{R}^n \to A$.

$\succ = (\succ_1, \ldots, \succ_n) \in \mathcal{R}^n$, $\quad p_i$ pico de $\succ_i$

f é sobrejetor se existe $\succ$ tq $f(\succ) = x$ para todo $x \in A$.

f é unânime se $f(\succ) = x$ sempre que $p_i = x$ para todo i.

Se f é unânime, então f é sobrejetor.

Definições

Considere um mecanismo $f : \mathcal{R}^n \to A$.

$\succ = (\succ_1, \ldots, \succ_n) \in \mathcal{R}^n, \quad p_i$ pico de $\succ_i$

f é sobrejetor se existe $\succ$ tq $f(\succ) = x$ para todo $x \in A$.

f é unânime se $f(\succ) = x$ sempre que $p_i = x$ para todo i.

Se f é unânime, então f é sobrejetor.

f é Pareto-ótimo se, para todo $\succ \in \mathcal{R}^n$,
não existe $x \in A$ tq $x \succ_i f(\succ)$ para todo i.

Definições

Considere um mecanismo $f : \mathcal{R}^n \to A$.

$\succ = (\succ_1, \ldots, \succ_n) \in \mathcal{R}^n$, $\quad p_i$ pico de $\succ_i$

f é sobrejetor se existe $\succ$ tq $f(\succ) = x$ para todo $x \in A$.

f é unânime se $f(\succ) = x$ sempre que $p_i = x$ para todo i.

Se f é unânime, então f é sobrejetor.

f é Pareto-ótimo se, para todo $\succ \in \mathcal{R}^n$,
não existe $x \in A$ tq $x \succ_i f(\succ)$ para todo i.

Se f é Pareto-ótimo, então f é unânime.

Equivalência das condições

f é sobrejetor se existe $\succ$ tq $f(\succ) = x$ para todo $x \in A$.

f é unânime se $f(\succ) = x$ sempre que $p_i = x$ para todo i.

f é Pareto-ótimo se, para todo $\succ \in \mathcal{R}^n$,
não existe $x \in A$ tq $x \succ_i f(\succ)$ para todo i.

Equivalência das condições

f é sobrejetor se existe $\succ$ tq $f(\succ) = x$ para todo $x \in A$.

f é unânime se $f(\succ) = x$ sempre que $p_i = x$ para todo i.

f é Pareto-ótimo se, para todo $\succ \in \mathcal{R}^n$,
não existe $x \in A$ tq $x \succ_i f(\succ)$ para todo i.

Lema: Seja f à prova de estratégia.
Vale que f é sobrejetora sse f é unânime sse f é Pareto-ótimo.

Equivalência das condições

f é sobrejetor se existe $\succ$ tq $f(\succ) = x$ para todo $x \in A$.

f é unânime se $f(\succ) = x$ sempre que $p_i = x$ para todo i.

f é Pareto-ótimo se, para todo $\succ \in \mathcal{R}^n$,
não existe $x \in A$ tq $x \succ_i f(\succ)$ para todo i.

Lema: Seja f à prova de estratégia.
Vale que f é sobrejetora sse f é unânime sse f é Pareto-ótimo.

Prova feita na aula passada.

Mecanismo à prova de estratégia

Dadas as preferências $\succ = (\succ_1, \ldots, \succ_n)$, com picos $p_1, \ldots, p_n$, seja $f(\succ)$ a mediana dos p_i's.

Mecanismo à prova de estratégia

Dadas as preferências $\succ = (\succ_1, \ldots, \succ_n)$, com picos $p_1, \ldots, p_n$, seja $f(\succ)$ a mediana dos p_i's.

Tal mecanismo é à prova de estratégia.

Mecanismo à prova de estratégia

Dadas as preferências $\succ = (\succ_1, \ldots, \succ_n)$, com picos $p_1, \ldots, p_n$, seja $f(\succ)$ a mediana dos p_i's.

Tal mecanismo é à prova de estratégia.

Para todo $k \in [n]$,
tomar $f(\succ)$ como o k-ésimo p_i é à prova de estratégia.

Mecanismo à prova de estratégia

Dadas as preferências $\succ = (\succ_1, \ldots, \succ_n)$, com picos $p_1, \ldots, p_n$, seja $f(\succ)$ a mediana dos p_i's.

Tal mecanismo é à prova de estratégia.

Para todo $k \in [n]$,
tomar $f(\succ)$ como o k-ésimo p_i é à prova de estratégia.

Em contraposição, tomar $f(\succ)$ como
a média dos p_i's não é à prova de estratégia.

Mecanismo à prova de estratégia

Dadas as preferências $\succ = (\succ_1, \ldots, \succ_n)$, com picos $p_1, \ldots, p_n$, seja $f(\succ)$ a mediana dos p_i's.

Tal mecanismo é à prova de estratégia.

Para todo $k \in [n]$,
tomar $f(\succ)$ como o k-ésimo p_i é à prova de estratégia.

Em contraposição, tomar $f(\succ)$ como
a média dos p_i's não é à prova de estratégia.

Qualquer média ponderada não é á prova de estratégia,
a menos que seja uma ditadura.

Mecanismos de estatísticas de ordem

Dadas as preferências $\succ = (\succ_1, \ldots, \succ_n)$, com picos $p_1, \ldots, p_n$, seja $f(\succ)$ a mediana dos p_i's.

Para todo $k \in [n]$,
tomar $f(\succ)$ como o k-ésimo p_i é à prova de estratégia.

Tais mecanismos são à prova de estratégia.

Ademais, tais mecanismos só dependem dos p_i's,
e não da $\succ_i$ completa.

Mecanismos de estatísticas de ordem

Dadas as preferências $\succ = (\succ_1, \ldots, \succ_n)$, com picos $p_1, \ldots, p_n$, seja $f(\succ)$ a mediana dos p_i's.

Para todo $k \in [n]$,
tomar $f(\succ)$ como o k-ésimo p_i é à prova de estratégia.

Tais mecanismos são à prova de estratégia.

Ademais, tais mecanismos só dependem dos p_i's,
e não da $\succ_i$ completa.

Vamos mostrar que todo mecanismo sobrejetor
à prova de estratégia só depende dos p_i's.

Generalização

Para as preferências $\succ = (\succ_1, \ldots, \succ_n)$,
sejam $p_1, \ldots, p_n$ os picos correspondentes.

Generalização

Para as preferências $\succ = (\succ_1, \ldots, \succ_n)$,
sejam $p_1, \ldots, p_n$ os picos correspondentes.

Sejam $y_1, \ldots, y_{n-1}$ valores em $A = [0, 1]$.

Generalização

Para as preferências $\succ = (\succ_1, \ldots, \succ_n)$,
sejam $p_1, \ldots, p_n$ os picos correspondentes.

Sejam $y_1, \ldots, y_{n-1}$ valores em $A = [0, 1]$.

Seja $f(\succ)$ a mediana do conjunto $\{p_1, \ldots, p_n, y_1, \ldots, y_{n-1}\}$.

Generalização

Para as preferências $\succ = (\succ_1, \ldots, \succ_n)$,
sejam $p_1, \ldots, p_n$ os picos correspondentes.

Sejam $y_1, \ldots, y_{n-1}$ valores em $A = [0, 1]$.

Seja $f(\succ)$ a mediana do conjunto $\{p_1, \ldots, p_n, y_1, \ldots, y_{n-1}\}$.

Note que f é à prova de estratégia.

Generalização

Para as preferências $\succ = (\succ_1, \ldots, \succ_n)$,
sejam $p_1, \ldots, p_n$ os picos correspondentes.

Sejam $y_1, \ldots, y_{n-1}$ valores em $A = [0, 1]$.

Seja $f(\succ)$ a mediana do conjunto $\{p_1, \ldots, p_n, y_1, \ldots, y_{n-1}\}$.

Note que f é à prova de estratégia.

Estes são todos os mecanismos "anônimos"
sobrejetores à prova de estratégia.

Generalização

Para as preferências $\succ = (\succ_1, \ldots, \succ_n)$,
sejam $p_1, \ldots, p_n$ os picos correspondentes.

Sejam $y_1, \ldots, y_{n-1}$ valores em $A = [0, 1]$.

Seja $f(\succ)$ a mediana do conjunto $\{p_1, \ldots, p_n, y_1, \ldots, y_{n-1}\}$.

Note que f é à prova de estratégia.

Estes são todos os mecanismos "anônimos"
sobrejetores à prova de estratégia.

Anônimo: $f(\succ) = f(\succ')$ para toda permutação $\succ'$ de $\succ$.

Generalização

Para as preferências $\succ = (\succ_1, \ldots, \succ_n)$,
sejam $p_1, \ldots, p_n$ os picos correspondentes.

Sejam $y_1, \ldots, y_{n-1}$ valores em $A = [0, 1]$.

Seja $f(\succ)$ a mediana do conjunto $\{p_1, \ldots, p_n, y_1, \ldots, y_{n-1}\}$.

f é à prova de estratégia.

Generalização

Para as preferências $\succ = (\succ_1, \ldots, \succ_n)$,
sejam $p_1, \ldots, p_n$ os picos correspondentes.

Sejam $y_1, \ldots, y_{n-1}$ valores em $A = [0, 1]$.

Seja $f(\succ)$ a mediana do conjunto $\{p_1, \ldots, p_n, y_1, \ldots, y_{n-1}\}$.

f é à prova de estratégia.

Teorema: Um mecanismo f é à prova de estratégia, sobrejetor e anônimo sse existem $y_1, \ldots, y_{n-1} \in A$ tq $f(\succ) \; = \; \mathrm{med}(p_1, \ldots, p_n, y_1, \ldots, y_{n-1})$ para todo $\succ \in \mathcal{R}^n$.

Generalização

$p_1, \ldots, p_n$: picos das preferências $\succ = (\succ_1, \ldots, \succ_n)$.

Teorema: Um mecanismo f é à prova de estratégia, sobrejetor e anônimo sse existem $y_1, \ldots, y_{n-1} \in A$ tq $f(\succ) \; = \; \mathrm{med}(p_1, \ldots, p_n, y_1, \ldots, y_{n-1})$ para todo $\succ \in \mathcal{R}^n$.

Generalização

$p_1, \ldots, p_n$: picos das preferências $\succ = (\succ_1, \ldots, \succ_n)$.

Teorema: Um mecanismo f é à prova de estratégia, sobrejetor e anônimo sse existem $y_1, \ldots, y_{n-1} \in A$ tq $f(\succ) = \mathrm{med}(p_1, \ldots, p_n, y_1, \ldots, y_{n-1})$ para todo $\succ \in \mathcal{R}^n$.

Esboço da prova: Se f é como no enunciado,
é fácil ver que f é sobrejetora, anônima e à prova de estratégia.

Generalização

$p_1, \ldots, p_n$: picos das preferências $\succ = (\succ_1, \ldots, \succ_n)$.

Teorema: Um mecanismo f é à prova de estratégia, sobrejetor e anônimo sse existem $y_1, \ldots, y_{n-1} \in A$ tq $f(\succ) \;=\; \mathrm{med}(p_1, \ldots, p_n, y_1, \ldots, y_{n-1})$ para todo $\succ \in \mathcal{R}^n$.

Esboço da prova: Se f é como no enunciado,
é fácil ver que f é sobrejetora, anônima e à prova de estratégia.

Suponha que f é sobrejetora, anônima e à prova de estratégia.

Generalização

$p_1, \ldots, p_n$: picos das preferências $\succ = (\succ_1, \ldots, \succ_n)$.

Teorema: Um mecanismo f é à prova de estratégia, sobrejetor e anônimo sse existem $y_1, \ldots, y_{n-1} \in A$ tq $f(\succ) = \mathrm{med}(p_1, \ldots, p_n, y_1, \ldots, y_{n-1})$ para todo $\succ \in \mathcal{R}^n$.

Esboço da prova: Se f é como no enunciado, é fácil ver que f é sobrejetora, anônima e à prova de estratégia.

Suponha que f é sobrejetora, anônima e à prova de estratégia.

Seja $\succ_i^b$ a preferência do participante i em que $p_i = b \in \{0, 1\}$.

Generalização

$p_1, \ldots, p_n$: picos das preferências $\succ = (\succ_1, \ldots, \succ_n)$.

Teorema: Um mecanismo f é à prova de estratégia, sobrejetor e anônimo sse existem $y_1, \ldots, y_{n-1} \in A$ tq $f(\succ) = \mathrm{med}(p_1, \ldots, p_n, y_1, \ldots, y_{n-1})$ para todo $\succ \in \mathcal{R}^n$.

Esboço da prova: Se f é como no enunciado, é fácil ver que f é sobrejetora, anônima e à prova de estratégia.

Suponha que f é sobrejetora, anônima e à prova de estratégia.

Seja $\succ_i^b$ a preferência do participante i em que $p_i = b \in \{0, 1\}$.

Seja $y_m = f(\succ_1^0, \ldots, \succ_{n-m}^0, \succ_{n-m+1}^1, \ldots, \succ_n^1)$ para $m = 1, \ldots, n$.

Generalização

$p_1, \ldots, p_n$: picos das preferências $\succ = (\succ_1, \ldots, \succ_n)$.

Teorema: Um mecanismo f é à prova de estratégia, sobrejetor e anônimo sse existem $y_1, \ldots, y_{n-1} \in A$ tq $f(\succ) = \operatorname{med}(p_1, \ldots, p_n, y_1, \ldots, y_{n-1})$ para todo $\succ \in \mathcal{R}^n$.

Esboço da prova: Se f é como no enunciado, é fácil ver que f é sobrejetora, anônima e à prova de estratégia.

Suponha que f é sobrejetora, anônima e à prova de estratégia.

Seja $\succ_i^b$ a preferência do participante i em que $p_i = b \in \{0, 1\}$.

Seja $y_m = f(\succ_1^0, \ldots, \succ_{n-m}^0, \succ_{n-m+1}^1, \ldots, \succ_n^1)$ para $m = 1, \ldots, n$.

Como f é anônima, y_m é o resultado sempre que $n - m$ participantes escolhem 0 e m escolhem 1.

Generalização

$p_1, \ldots, p_n$: picos das preferências $\succ = (\succ_1, \ldots, \succ_n)$.

Teorema: Um mecanismo f é à prova de estratégia, sobrejetor e anônimo sse existem $y_1, \ldots, y_{n-1} \in A$ tq $f(\succ) = \operatorname{med}(p_1, \ldots, p_n, y_1, \ldots, y_{n-1})$ para todo $\succ \in \mathcal{R}^n$.

Esboço da prova: Se f é como no enunciado, é fácil ver que f é sobrejetora, anônima e à prova de estratégia.

Suponha que f é sobrejetora, anônima e à prova de estratégia.

Seja $\succ_i^b$ a preferência do participante i em que $p_i = b \in \{0, 1\}$.

Seja $y_m = f(\succ_1^0, \ldots, \succ_{n-m}^0, \succ_{n-m+1}^1, \ldots, \succ_n^1)$ para $m = 1, \ldots, n$.

Como f é anônima, y_m é o resultado sempre que $n - m$ participantes escolhem 0 e m escolhem 1.

Note que $y_m \leq y_{m+1}$ ou f não seria à prova de estratégia.

Generalização

Teorema: Um mecanismo f é à prova de estratégia, sobrejetor e anônimo sse existem $y_1, \ldots, y_{n-1} \in A$ tq $f(\succ) = \operatorname{med}(p_1, \ldots, p_n, y_1, \ldots, y_{n-1})$ para todo $\succ \in \mathcal{R}^n$.

Esboço da prova: Suponha que f é sobrejetora, anônima e à prova de estratégia. Suponha que $p_1 \leq \cdots \leq p_n$.

Seja $y_m = f(\succ_1^0, \ldots, \succ_{n-m}^0, \succ_{n-m+1}^1, \ldots, \succ_n^1)$ para $m = 1, \ldots, n$.

Note que $y_m \leq y_{m+1}$ e seja $x^* = \operatorname{med}(p_1, \ldots, p_n, y_1, \ldots, y_{n-1})$.

Generalização

Teorema: Um mecanismo f é à prova de estratégia, sobrejetor e anônimo sse existem $y_1, \ldots, y_{n-1} \in A$ tq $f(\succ) = \mathrm{med}(p_1, \ldots, p_n, y_1, \ldots, y_{n-1})$ para todo $\succ \in \mathcal{R}^n$.

Esboço da prova: Suponha que f é sobrejetora, anônima e à prova de estratégia. Suponha que $p_1 \leq \cdots \leq p_n$.

Seja $y_m = f(\succ_1^0, \ldots, \succ_{n-m}^0, \succ_{n-m+1}^1, \ldots, \succ_n^1)$ para $m = 1, \ldots, n$.

Note que $y_m \leq y_{m+1}$ e seja $x^* = \mathrm{med}(p_1, \ldots, p_n, y_1, \ldots, y_{n-1})$.

Queremos mostrar que $f(\succ) = x^*$.

Generalização

Teorema: Um mecanismo f é à prova de estratégia, sobrejetor e anônimo sse existem $y_1, \ldots, y_{n-1} \in A$ tq $f(\succ) = \text{med}(p_1, \ldots, p_n, y_1, \ldots, y_{n-1})$ para todo $\succ \in \mathcal{R}^n$.

Esboço da prova: Suponha que f é sobrejetora, anônima e à prova de estratégia. Suponha que $p_1 \leq \cdots \leq p_n$.

Seja $y_m = f(\succ_1^0, \ldots, \succ_{n-m}^0, \succ_{n-m+1}^1, \ldots, \succ_n^1)$ para $m = 1, \ldots, n$.

Note que $y_m \leq y_{m+1}$ e seja $x^* = \text{med}(p_1, \ldots, p_n, y_1, \ldots, y_{n-1})$.

Queremos mostrar que $f(\succ) = x^*$.

Caso 1: $x^* = y_m$ para algum m.

Generalização

Teorema: Um mecanismo f é à prova de estratégia, sobrejetor e anônimo sse existem $y_1, \ldots, y_{n-1} \in A$ tq $f(\succ) \;=\; \mathrm{med}(p_1, \ldots, p_n, y_1, \ldots, y_{n-1})$ para todo $\succ \in \mathcal{R}^n$.

Esboço da prova: Suponha que f é sobrejetora, anônima e à prova de estratégia. Suponha que $p_1 \leq \cdots \leq p_n$.

Seja $y_m = f(\succ_1^0, \ldots, \succ_{n-m}^0, \succ_{n-m+1}^1, \ldots, \succ_n^1)$ para $m = 1, \ldots, n$.

Note que $y_m \leq y_{m+1}$ e seja $x^* = \mathrm{med}(p_1, \ldots, p_n, y_1, \ldots, y_{n-1})$.

Queremos mostrar que $f(\succ) = x^*$.

Caso 1: $x^* = y_m$ para algum m.

Note que $p_{n-m} \leq x^* = y_m \leq p_{n-m+1}$, logo

$$x^* = y_m = f(\succ_1^0, \ldots, \succ_{n-m}^0, \succ_{n-m+1}^1, \ldots, \succ_n^1).$$

Generalização

Teorema: Um mecanismo f é à prova de estratégia, sobrejetor e anônimo sse existem $y_1, \ldots, y_{n-1} \in A$ tq $f(\succ) \;=\; \mathrm{med}(p_1, \ldots, p_n, y_1, \ldots, y_{n-1})$ para todo $\succ \in \mathcal{R}^n$.

Esboço da prova: Suponha que f é sobrejetora, anônima e à prova de estratégia. Suponha que $p_1 \leq \cdots \leq p_n$.

Seja $y_m = f(\succ_1^0, \ldots, \succ_{n-m}^0, \succ_{n-m+1}^1, \ldots, \succ_n^1)$ para $m = 1, \ldots, n$.

Note que $y_m \leq y_{m+1}$ e seja $x^* = \mathrm{med}(p_1, \ldots, p_n, y_1, \ldots, y_{n-1})$.

Queremos mostrar que $f(\succ) = x^*$.

Caso 1: $x^* = y_m$ para algum m.

Note que $p_{n-m} \leq x^* = y_m \leq p_{n-m+1}$, logo

$$x^* = y_m = f(\succ_1^0, \ldots, \succ_{n-m}^0, \succ_{n-m+1}^1, \ldots, \succ_n^1).$$

Seja $x_1 = f(\succ_1, \succ_2^0 \ldots, \succ_{n-m}^0, \succ_{n-m+1}^1, \ldots, \succ_n^1)$.
Argumente que $x_1 = x^*$ ou f não seria à prova de estratégia.

Generalização

Teorema: Um mecanismo f é à prova de estratégia, sobrejetor e anônimo sse existem $y_1, \ldots, y_{n-1} \in A$ tq $f(\succ) \;=\; \mathrm{med}(p_1, \ldots, p_n, y_1, \ldots, y_{n-1})$ para todo $\succ \in \mathcal{R}^n$.

Esboço da prova: Suponha que f é sobrejetora, anônima e à prova de estratégia. Suponha que $p_1 \leq \cdots \leq p_n$.

Seja $y_m = f(\succ_1^0, \ldots, \succ_{n-m}^0, \succ_{n-m+1}^1, \ldots, \succ_n^1)$ para $m = 1, \ldots, n$.

Note que $y_m \leq y_{m+1}$ e seja $x^* = \mathrm{med}(p_1, \ldots, p_n, y_1, \ldots, y_{n-1})$.

Queremos mostrar que $f(\succ) = x^*$.

Caso 1: $x^* = y_m$ para algum m.

Note que $p_{n-m} \leq x^* = y_m \leq p_{n-m+1}$, logo

$$x^* = y_m = f(\succ_1^0, \ldots, \succ_{n-m}^0, \succ_{n-m+1}^1, \ldots, \succ_n^1).$$

Seja $x_1 = f(\succ_1, \succ_2^0 \ldots, \succ_{n-m}^0, \succ_{n-m+1}^1, \ldots, \succ_n^1)$.
Argumente que $x_1 = x^*$ ou f não seria à prova de estratégia.

Repita esse argumento n vezes e conclua que $f(\succ) = x^*$.

Segundo caso da prova

Teorema: Um mecanismo f é à prova de estratégia, sobrejetor e anônimo sse existem $y_1, \ldots, y_{n-1} \in A$ tq $f(\succ) = \operatorname{med}(p_1, \ldots, p_n, y_1, \ldots, y_{n-1})$ para todo $\succ \in \mathcal{R}^n$.

Esboço da prova: Suponha que f é sobrejetora, anônima e à prova de estratégia. Suponha que $p_1 \leq \cdots \leq p_n$.

Seja $y_m = f(\succ_1^0, \ldots, \succ_{n-m}^0, \succ_{n-m+1}^1, \ldots, \succ_n^1)$ para $m = 1, \ldots, n$.

Note que $y_m \leq y_{m+1}$ e seja $x^* = \operatorname{med}(p_1, \ldots, p_n, y_1, \ldots, y_{n-1})$.

Caso 2: $y_m < x^* < y_{m+1}$, considerando $y_0 = 0$ e $y_n = 1$.

Segundo caso da prova

Teorema: Um mecanismo f é à prova de estratégia, sobrejetor e anônimo sse existem $y_1, \ldots, y_{n-1} \in A$ tq $f(\succ) = \mathrm{med}(p_1, \ldots, p_n, y_1, \ldots, y_{n-1})$ para todo $\succ \in \mathcal{R}^n$.

Esboço da prova: Suponha que f é sobrejetora, anônima e à prova de estratégia. Suponha que $p_1 \leq \cdots \leq p_n$.

Seja $y_m = f(\succ_1^0, \ldots, \succ_{n-m}^0, \succ_{n-m+1}^1, \ldots, \succ_n^1)$ para $m = 1, \ldots, n$.

Note que $y_m \leq y_{m+1}$ e seja $x^* = \mathrm{med}(p_1, \ldots, p_n, y_1, \ldots, y_{n-1})$.

Caso 2: $y_m < x^* < y_{m+1}$, considerando $y_0 = 0$ e $y_n = 1$.

Então $x^* = p_{n-m}$.

Segundo caso da prova

Teorema: Um mecanismo f é à prova de estratégia, sobrejetor e anônimo sse existem $y_1, \ldots, y_{n-1} \in A$ tq $f(\succ) \ = \ \mathrm{med}(p_1, \ldots, p_n, y_1, \ldots, y_{n-1})$ para todo $\succ \in \mathcal{R}^n$.

Esboço da prova: Suponha que f é sobrejetora, anônima e à prova de estratégia. Suponha que $p_1 \leq \cdots \leq p_n$.

Seja $y_m = f(\succ_1^0, \ldots, \succ_{n-m}^0, \succ_{n-m+1}^1, \ldots, \succ_n^1)$ para $m = 1, \ldots, n$.

Note que $y_m \leq y_{m+1}$ e seja $x^* = \mathrm{med}(p_1, \ldots, p_n, y_1, \ldots, y_{n-1})$.

Caso 2: $y_m < x^* < y_{m+1}$, considerando $y_0 = 0$ e $y_n = 1$.

Então $x^* = p_{n-m}$.

Vamos mostrar que

$$f(\succ_1^0, \ldots, \succ_{n-m-1}^0, \succ_{n-m}, \succ_{n-m+1}^1, \ldots, \succ_n^1) = x^*.$$

Segundo caso da prova

Teorema: Um mecanismo f é à prova de estratégia, sobrejetor e anônimo sse existem $y_1, \ldots, y_{n-1} \in A$ tq $f(\succ) = \mathrm{med}(p_1, \ldots, p_n, y_1, \ldots, y_{n-1})$ para todo $\succ \in \mathcal{R}^n$.

Esboço da prova: Suponha que f é sobrejetora, anônima e à prova de estratégia. Suponha que $p_1 \leq \cdots \leq p_n$.

Seja $y_m = f(\succ_1^0, \ldots, \succ_{n-m}^0, \succ_{n-m+1}^1, \ldots, \succ_n^1)$ para $m = 1, \ldots, n$.

Note que $y_m \leq y_{m+1}$ e seja $x^* = \mathrm{med}(p_1, \ldots, p_n, y_1, \ldots, y_{n-1})$.

Caso 2: $y_m < x^* < y_{m+1}$, considerando $y_0 = 0$ e $y_n = 1$.

Então $x^* = p_{n-m}$.

Vamos mostrar que

$$f(\succ_1^0, \ldots, \succ_{n-m-1}^0, \succ_{n-m}, \succ_{n-m+1}^1, \ldots, \succ_n^1) = x^*.$$

Disso, como no Caso 1, podemos concluir que $f(\succ) = x^*$.

Segundo caso da prova

Esboço da prova: Suponha que f é sobrejetora, anônima e à prova de estratégia. Suponha que $p_1 \leq \cdots \leq p_n$.

Seja $y_m = f(\succ_1^0, \ldots, \succ_{n-m}^0, \succ_{n-m+1}^1, \ldots, \succ_n^1)$ para $m = 1, \ldots, n$ e $x^* = \mathrm{med}(p_1, \ldots, p_n, y_1, \ldots, y_{n-1})$, com $y_m < x^* = p_{n-m} < y_{m+1}$.

Seja $x' = f(\succ_1^0, \ldots, \succ_{n-m-1}^0, \succ_{n-m}, \succ_{n-m+1}^1, \ldots, \succ_n^1)$.

Queremos mostrar que $x' = x^*$.

Segundo caso da prova

Esboço da prova: Suponha que f é sobrejetora, anônima e à prova de estratégia. Suponha que $p_1 \leq \cdots \leq p_n$.

Seja $y_m = f(\succ_1^0, \ldots, \succ_{n-m}^0, \succ_{n-m+1}^1, \ldots, \succ_n^1)$ para $m = 1, \ldots, n$ e $x^* = \mathrm{med}(p_1, \ldots, p_n, y_1, \ldots, y_{n-1})$, com $y_m < x^* = p_{n-m} < y_{m+1}$.

Seja $x' = f(\succ_1^0, \ldots, \succ_{n-m-1}^0, \succ_{n-m}, \succ_{n-m+1}^1, \ldots, \succ_n^1)$.

Queremos mostrar que $x' = x^*$.

Suponha que $x' < x^*$ (o caso em que $x' > x^*$ é análogo).

Segundo caso da prova

Esboço da prova: Suponha que f é sobrejetora, anônima e à prova de estratégia. Suponha que $p_1 \leq \cdots \leq p_n$.

Seja $y_m = f(\succ_1^0, \ldots, \succ_{n-m}^0, \succ_{n-m+1}^1, \ldots, \succ_n^1)$ para $m = 1, \ldots, n$ e $x^* = \mathrm{med}(p_1, \ldots, p_n, y_1, \ldots, y_{n-1})$, com $y_m < x^* = p_{n-m} < y_{m+1}$.

Seja $x' = f(\succ_1^0, \ldots, \succ_{n-m-1}^0, \succ_{n-m}, \succ_{n-m+1}^1, \ldots, \succ_n^1)$.

Queremos mostrar que $x' = x^*$.

Suponha que $x' < x^*$ (o caso em que $x' > x^*$ é análogo).

Se $n - m$ declara $\succ_{n-m}^0$, f produz y_{n-m}, assim $y_m \leq x' < x^*$.

Segundo caso da prova

Esboço da prova: Suponha que f é sobrejetora, anônima e à prova de estratégia. Suponha que $p_1 \leq \cdots \leq p_n$.

Seja $y_m = f(\succ_1^0, \ldots, \succ_{n-m}^0, \succ_{n-m+1}^1, \ldots, \succ_n^1)$ para $m = 1, \ldots, n$ e $x^* = \mathrm{med}(p_1, \ldots, p_n, y_1, \ldots, y_{n-1})$, com $y_m < x^* = p_{n-m} < y_{m+1}$.

Seja $x' = f(\succ_1^0, \ldots, \succ_{n-m-1}^0, \succ_{n-m}, \succ_{n-m+1}^1, \ldots, \succ_n^1)$.

Queremos mostrar que $x' = x^*$.

Suponha que $x' < x^*$ (o caso em que $x' > x^*$ é análogo).

Se $n - m$ declara $\succ_{n-m}^0$, f produz y_{n-m}, assim $y_m \leq x' < x^*$.

Seja
$O = \{x \mid \exists\ \tilde{\succsim}_{n-m} \text{ tq } \ x = f(\ldots, \succ_{n-m-1}^0, \tilde{\succsim}_{n-m}, \succ_{n-m+1}^1, \ldots)\}$.

Segundo caso da prova

Esboço da prova: Suponha que f é sobrejetora, anônima e à prova de estratégia. Suponha que $p_1 \leq \cdots \leq p_n$.

Seja $y_m = f(\succ_1^0, \ldots, \succ_{n-m}^0, \succ_{n-m+1}^1, \ldots, \succ_n^1)$ para $m = 1, \ldots, n$ e $x^* = \mathrm{med}(p_1, \ldots, p_n, y_1, \ldots, y_{n-1})$, com $y_m < x^* = p_{n-m} < y_{m+1}$.

Seja $x' = f(\succ_1^0, \ldots, \succ_{n-m-1}^0, \succ_{n-m}, \succ_{n-m+1}^1, \ldots, \succ_n^1)$.

Queremos mostrar que $x' = x^*$.

Suponha que $x' < x^*$ (o caso em que $x' > x^*$ é análogo).

Se $n - m$ declara $\succ_{n-m}^0$, f produz y_{n-m}, assim $y_m \leq x' < x^*$.

Seja
$O = \{x \mid \exists \tilde{\succ}_{n-m} \text{ tq } x = f(\ldots, \succ_{n-m-1}^0, \tilde{\succ}_{n-m}, \succ_{n-m+1}^1, \ldots)\}$.

Note que $x', y_m, y_{m+1} \in O$ e que $x' = \max\{x \in O \mid x \leq x^*\}$.

Segundo caso da prova

Esboço da prova: Suponha que f é sobrejetora, anônima e à prova de estratégia. Suponha que $p_1 \leq \cdots \leq p_n$.

Seja $y_m = f(\succ_1^0, \ldots, \succ_{n-m}^0, \succ_{n-m+1}^1, \ldots, \succ_n^1)$ para $m = 1, \ldots, n$ e $x^* = \mathrm{med}(p_1, \ldots, p_n, y_1, \ldots, y_{n-1})$, com $y_m < x^* = p_{n-m} < y_{m+1}$.

Seja $x' = f(\succ_1^0, \ldots, \succ_{n-m-1}^0, \succ_{n-m}, \succ_{n-m+1}^1, \ldots, \succ_n^1)$.

Queremos mostrar que $x' = x^*$.

Suponha que $x' < x^*$ (o caso em que $x' > x^*$ é análogo).

Se $n - m$ declara $\succ_{n-m}^0$, f produz y_{n-m}, assim $y_m \leq x' < x^*$.

Seja
$O = \{x \mid \exists \tilde{\succsim}_{n-m} \text{ tq } x = f(\ldots, \succ_{n-m-1}^0, \tilde{\succsim}_{n-m}, \succ_{n-m+1}^1, \ldots)\}$.

Note que $x', y_m, y_{m+1} \in O$ e que $x' = \max\{x \in O \mid x \leq x^*\}$.

Seja $x'' = \inf\{x \in O \mid x \geq x^*\}$. Mostre que $x'' \in O$.

Segundo caso da prova

Esboço da prova: Suponha que f é sobrejetora, anônima e à prova de estratégia. Suponha que $p_1 \leq \cdots \leq p_n$.

Seja $y_m = f(\succ_1^0, \ldots, \succ_{n-m}^0, \succ_{n-m+1}^1, \ldots, \succ_n^1)$ para $m = 1, \ldots, n$ e $x^* = \mathrm{med}(p_1, \ldots, p_n, y_1, \ldots, y_{n-1})$, com $y_m < x^* = p_{n-m} < y_{m+1}$.

Seja $x' = f(\succ_1^0, \ldots, \succ_{n-m-1}^0, \succ_{n-m}, \succ_{n-m+1}^1, \ldots, \succ_n^1)$.

Queremos mostrar que $x' = x^*$.

Suponha que $x' < x^*$ (o caso em que $x' > x^*$ é análogo).

Se $n - m$ declara $\succ_{n-m}^0$, f produz y_{n-m}, assim $y_m \leq x' < x^*$.

Seja
$O = \{x \mid \exists \tilde{\succsim}_{n-m} \text{ tq } \ x = f(\ldots, \succ_{n-m-1}^0, \tilde{\succsim}_{n-m}, \succ_{n-m+1}^1, \ldots)\}$.

Note que $x', y_m, y_{m+1} \in O$ e que $x' = \max\{x \in O \mid x \leq x^*\}$.

Seja $x'' = \inf\{x \in O \mid x \geq x^*\}$. Mostre que $x'' \in O$.

Então $O \cap (x', x'') = \emptyset$.

Segundo caso da prova

Esboço da prova:
Seja $y_m = f(\succ_1^0, \ldots, \succ_{n-m}^0, \succ_{n-m+1}^1, \ldots, \succ_n^1)$ para $m = 1, \ldots, n$ e $x^* = \mathrm{med}(p_1, \ldots, p_n, y_1, \ldots, y_{n-1})$, com $y_m < x^* = p_{n-m} < y_{m+1}$.

Seja $x' = f(\succ_1^0, \ldots, \succ_{n-m-1}^0, \succ_{n-m}, \succ_{n-m+1}^1, \ldots, \succ_n^1)$.
$O = \{x \mid \exists \tilde{\succsim}_{n-m} \text{ tq } \; x = f(\ldots, \succ_{n-m-1}^0, \tilde{\succsim}_{n-m}, \succ_{n-m+1}^1, \ldots)\}$.
$x' = \max\{x \in O \mid x \leq x^*\}$ e $x'' = \min\{x \in O \mid x \geq x^*\}$.

Temos que $x' < x^* < x''$.

Segundo caso da prova

Esboço da prova:

Seja $y_m = f(\succ_1^0, \ldots, \succ_{n-m}^0, \succ_{n-m+1}^1, \ldots, \succ_n^1)$ para $m = 1, \ldots, n$ e $x^* = \mathrm{med}(p_1, \ldots, p_n, y_1, \ldots, y_{n-1})$, com $y_m < x^* = p_{n-m} < y_{m+1}$.

Seja $x' = f(\succ_1^0, \ldots, \succ_{n-m-1}^0, \succ_{n-m}, \succ_{n-m+1}^1, \ldots, \succ_n^1)$.
$O = \{x \mid \exists \tilde{\succsim}_{n-m} \text{ tq } \; x = f(\ldots, \succ_{n-m-1}^0, \tilde{\succsim}_{n-m}, \succ_{n-m+1}^1, \ldots)\}$.
$x' = \max\{x \in O \mid x \leq x^*\}$ e $x'' = \min\{x \in O \mid x \geq x^*\}$.

Temos que $x' < x^* < x''$.

Sejam $p^L = \frac{x'+x''}{2} - \epsilon$ e $p^H = \frac{x'+x''}{2} + \epsilon$,
com ϵ pequeno de modo que $p^L, p^H \in (x', x'')$.

Segundo caso da prova

Esboço da prova:
Seja $y_m = f(\succ_1^0, \ldots, \succ_{n-m}^0, \succ_{n-m+1}^1, \ldots, \succ_n^1)$ para $m = 1, \ldots, n$ e
$x^* = \mathrm{med}(p_1, \ldots, p_n, y_1, \ldots, y_{n-1})$, com $y_m < x^* = p_{n-m} < y_{m+1}$.

Seja $x' = f(\succ_1^0, \ldots, \succ_{n-m-1}^0, \succ_{n-m}, \succ_{n-m+1}^1, \ldots, \succ_n^1)$.
$O = \{x \mid \exists \tilde{\succsim}_{n-m} \text{ tq } \; x = f(\ldots, \succ_{n-m-1}^0, \tilde{\succsim}_{n-m}, \succ_{n-m+1}^1, \ldots)\}$.
$x' = \max\{x \in O \mid x \leq x^*\}$ e $x'' = \min\{x \in O \mid x \geq x^*\}$.

Temos que $x' < x^* < x''$.

Sejam $p^L = \frac{x'+x''}{2} - \epsilon$ e $p^H = \frac{x'+x''}{2} + \epsilon$,
com ϵ pequeno de modo que $p^L, p^H \in (x', x'')$.

Sejam $\succ_i^L$ e $\succ_i^H$ preferências simétricas com p^L e p^H de pico.

Segundo caso da prova

Esboço da prova:
Seja $y_m = f(\succ_1^0, \ldots, \succ_{n-m}^0, \succ_{n-m+1}^1, \ldots, \succ_n^1)$ para $m = 1, \ldots, n$ e $x^* = \text{med}(p_1, \ldots, p_n, y_1, \ldots, y_{n-1})$, com $y_m < x^* = p_{n-m} < y_{m+1}$.

Seja $x' = f(\succ_1^0, \ldots, \succ_{n-m-1}^0, \succ_{n-m}, \succ_{n-m+1}^1, \ldots, \succ_n^1)$.
$O = \{x \mid \exists \tilde{\succsim}_{n-m} \text{ tq } \; x = f(\ldots, \succ_{n-m-1}^0, \tilde{\succsim}_{n-m}, \succ_{n-m+1}^1, \ldots)\}$.
$x' = \max\{x \in O \mid x \leq x^*\}$ e $x'' = \min\{x \in O \mid x \geq x^*\}$.

Temos que $x' < x^* < x''$.

Sejam $p^L = \frac{x'+x''}{2} - \epsilon$ e $p^H = \frac{x'+x''}{2} + \epsilon$,
com ϵ pequeno de modo que $p^L, p^H \in (x', x'')$.

Sejam $\succ_i^L$ e $\succ_i^H$ preferências simétricas com p^L e p^H de pico.

Isto é, i com preferência $\succ_i^L$ prefere x' do que x'',
e simetricamente i com preferência $\succ_i^H$ prefere x'' do que x'.

Segundo caso da prova

Esboço da prova: $y_m = f(\succ_1^0, \ldots, \succ_{n-m}^0, \succ_{n-m+1}^1, \ldots, \succ_n^1)$ e $x^* = \mathrm{med}(p_1, \ldots, p_n, y_1, \ldots, y_{n-1})$, com $y_m < x^* = p_{n-m} < y_{m+1}$.

Seja $x' = f(\succ_1^0, \ldots, \succ_{n-m-1}^0, \succ_{n-m}, \succ_{n-m+1}^1, \ldots, \succ_n^1)$.
$O = \{x \mid \exists\ \tilde{\succ}_{n-m}$ tq $\ x = f(\ldots, \succ_{n-m-1}^0, \tilde{\succ}_{n-m}, \succ_{n-m+1}^1, \ldots)\}$.
$x' = \max\{x \in O \mid x \leq x^*\}$ e $x'' = \min\{x \in O \mid x \geq x^*\}$.

Temos que $x' < x^* < x''$, $p^L = \frac{x'+x''}{2} - \epsilon$ e $p^H = \frac{x'+x''}{2} + \epsilon$.
Sejam $\succ_i^L$ e $\succ_i^H$ preferências simétricas com p^L e p^H de pico.

Segundo caso da prova

Esboço da prova: $y_m = f(\succ_1^0, \ldots, \succ_{n-m}^0, \succ_{n-m+1}^1, \ldots, \succ_n^1)$ e $x^* = \mathrm{med}(p_1, \ldots, p_n, y_1, \ldots, y_{n-1})$, com $y_m < x^* = p_{n-m} < y_{m+1}$.

Seja $x' = f(\succ_1^0, \ldots, \succ_{n-m-1}^0, \succ_{n-m}, \succ_{n-m+1}^1, \ldots, \succ_n^1)$.
$O = \{x \mid \exists \tilde{\succ}_{n-m} \text{ tq } x = f(\ldots, \succ_{n-m-1}^0, \tilde{\succ}_{n-m}, \succ_{n-m+1}^1, \ldots)\}$.
$x' = \max\{x \in O \mid x \leq x^*\}$ e $x'' = \min\{x \in O \mid x \geq x^*\}$.

Temos que $x' < x^* < x''$, $p^L = \frac{x'+x''}{2} - \epsilon$ e $p^H = \frac{x'+x''}{2} + \epsilon$.
Sejam $\succ_i^L$ e $\succ_i^H$ preferências simétricas com p^L e p^H de pico.

Como f é à prova de estratégia e x'' é o mais preferido de O para $n-m$ com preferência $\succ_{n-m}^H$,

$$f(\succ_1^0, \ldots, \succ_{n-m-1}^0, \succ_{n-m}^H, \succ_{n-m+1}^1, \ldots, \succ_n^1) = x''.$$

Segundo caso da prova

Esboço da prova: $y_m = f(\succ_1^0, \ldots, \succ_{n-m}^0, \succ_{n-m+1}^1, \ldots, \succ_n^1)$ e $x^* = \mathrm{med}(p_1, \ldots, p_n, y_1, \ldots, y_{n-1})$, com $y_m < x^* = p_{n-m} < y_{m+1}$.

Seja $x' = f(\succ_1^0, \ldots, \succ_{n-m-1}^0, \succ_{n-m}, \succ_{n-m+1}^1, \ldots, \succ_n^1)$.
$O = \{x \mid \exists \tilde{\succ}_{n-m} \text{ tq } x = f(\ldots, \succ_{n-m-1}^0, \tilde{\succ}_{n-m}, \succ_{n-m+1}^1, \ldots)\}$.
$x' = \max\{x \in O \mid x \leq x^*\}$ e $x'' = \min\{x \in O \mid x \geq x^*\}$.

Temos que $x' < x^* < x''$, $p^L = \frac{x'+x''}{2} - \epsilon$ e $p^H = \frac{x'+x''}{2} + \epsilon$.
Sejam $\succ_i^L$ e $\succ_i^H$ preferências simétricas com p^L e p^H de pico.

Como f é à prova de estratégia e x'' é o mais preferido de O para $n - m$ com preferência $\succ_{n-m}^H$,

$$f(\succ_1^0, \ldots, \succ_{n-m-1}^0, \succ_{n-m}^H, \succ_{n-m+1}^1, \ldots, \succ_n^1) = x''.$$

Como no Caso 1, conclua que

$$f(\succ_1^L, \ldots, \succ_{n-m-1}^L, \succ_{n-m}^H, \succ_{n-m+1}^1, \ldots, \succ_n^1) = x''.$$

Segundo caso da prova

Esboço da prova: $x^* = \mathrm{med}(p_1, \ldots, p_n, y_1, \ldots, y_{n-1})$.

Seja $x' = f(\succ_1^0, \ldots, \succ_{n-m-1}^0, \succ_{n-m}, \succ_{n-m+1}^1, \ldots, \succ_n^1)$.
$O = \{x \mid \exists \tilde{\succ}_{n-m} \text{ tq } x = f(\ldots, \succ_{n-m-1}^0, \tilde{\succ}_{n-m}, \succ_{n-m+1}^1, \ldots)\}$.
$x' = \max\{x \in O \mid x \leq x^*\}$ e $x'' = \min\{x \in O \mid x \geq x^*\}$.

Temos que $x' < x^* < x''$, $p^L = \frac{x'+x''}{2} - \epsilon$ e $p^H = \frac{x'+x''}{2} + \epsilon$.
Sejam $\succ_i^L$ e $\succ_i^H$ preferências simétricas com p^L e p^H de pico.

$$
\begin{aligned}
f(\succ_1^0, \ldots, \succ_{n-m-1}^0, \succ_{n-m}^H, \succ_{n-m+1}^1, \ldots, \succ_n^1) &= x'' \\
f(\succ_1^L, \ldots, \succ_{n-m-1}^L, \succ_{n-m}^H, \succ_{n-m+1}^1, \ldots, \succ_n^1) &= x''
\end{aligned}
$$

Segundo caso da prova

Esboço da prova: $x^* = \mathrm{med}(p_1, \ldots, p_n, y_1, \ldots, y_{n-1})$.

Seja $x' = f(\succ_1^0, \ldots, \succ_{n-m-1}^0, \succ_{n-m}, \succ_{n-m+1}^1, \ldots, \succ_n^1)$.
$O = \{x \mid \exists \tilde{\succ}_{n-m} \text{ tq } \; x = f(\ldots, \succ_{n-m-1}^0, \tilde{\succ}_{n-m}, \succ_{n-m+1}^1, \ldots)\}$.
$x' = \max\{x \in O \mid x \leq x^*\}$ e $x'' = \min\{x \in O \mid x \geq x^*\}$.

Temos que $x' < x^* < x''$, $p^L = \frac{x'+x''}{2} - \epsilon$ e $p^H = \frac{x'+x''}{2} + \epsilon$.
Sejam $\succ_i^L$ e $\succ_i^H$ preferências simétricas com p^L e p^H de pico.

$$\begin{aligned} f(\succ_1^0, \ldots, \succ_{n-m-1}^0, \succ_{n-m}^H, \succ_{n-m+1}^1, \ldots, \succ_n^1) &= x'' \\ f(\succ_1^L, \ldots, \succ_{n-m-1}^L, \succ_{n-m}^H, \succ_{n-m+1}^1, \ldots, \succ_n^1) &= x'' \end{aligned}$$

Por Pareto-otimalidade,

$$f(\succ_1^L, \ldots, \succ_{n-m-1}^L, \succ_{n-m}^L, \succ_{n-m+1}^1, \ldots, \succ_n^1) \geq p_L$$

Segundo caso da prova

Esboço da prova: $x^* = \mathrm{med}(p_1, \ldots, p_n, y_1, \ldots, y_{n-1})$.

Seja $x' = f(\succ_1^0, \ldots, \succ_{n-m-1}^0, \succ_{n-m}, \succ_{n-m+1}^1, \ldots, \succ_n^1)$.
$O = \{x \mid \exists\ \tilde{\succ}_{n-m} \text{ tq } x = f(\ldots, \succ_{n-m-1}^0, \tilde{\succ}_{n-m}, \succ_{n-m+1}^1, \ldots)\}$.
$x' = \max\{x \in O \mid x \leq x^*\}$ e $x'' = \min\{x \in O \mid x \geq x^*\}$.

Temos que $x' < x^* < x''$, $p^L = \frac{x'+x''}{2} - \epsilon$ e $p^H = \frac{x'+x''}{2} + \epsilon$.
Sejam $\succ_i^L$ e $\succ_i^H$ preferências simétricas com p^L e p^H de pico.

$$
\begin{aligned}
f(\succ_1^0, \ldots, \succ_{n-m-1}^0, \succ_{n-m}^H, \succ_{n-m+1}^1, \ldots, \succ_n^1) &= x'' \\
f(\succ_1^L, \ldots, \succ_{n-m-1}^L, \succ_{n-m}^H, \succ_{n-m+1}^1, \ldots, \succ_n^1) &= x''
\end{aligned}
$$

Por Pareto-otimalidade,

$$f(\succ_1^L, \ldots, \succ_{n-m-1}^L, \succ_{n-m}^L, \succ_{n-m+1}^1, \ldots, \succ_n^1) \geq p_L$$

e como x'' é o menos preferido em $[p_l, x'']$ para $n-m$ com preferência $\succ_{n-m}^H$,

$$f(\succ_1^L, \ldots, \succ_{n-m-1}^L, \succ_{n-m}^L, \succ_{n-m+1}^1, \ldots, \succ_n^1) = x''.$$

Segundo caso da prova

Esboço da prova: $x^* = \mathrm{med}(p_1, \ldots, p_n, y_1, \ldots, y_{n-1})$.

Seja $x' = f(\succ_1^0, \ldots, \succ_{n-m-1}^0, \succ_{n-m}, \succ_{n-m+1}^1, \ldots, \succ_n^1)$.
$O = \{x \mid \exists \tilde{\succ}_{n-m} \text{ tq } \; x = f(\ldots, \succ_{n-m-1}^0, \tilde{\succ}_{n-m}, \succ_{n-m+1}^1, \ldots)\}$.
$x' = \max\{x \in O \mid x \leq x^*\}$ e $x'' = \min\{x \in O \mid x \geq x^*\}$.

Sejam $p^L = \frac{x'+x''}{2} - \epsilon$ e $p^H = \frac{x'+x''}{2} + \epsilon$ e
$\succ_i^L$ e $\succ_i^H$ preferências simétricas com p^L e p^H de pico.

Vimos que $f(\succ_1^L, \ldots, \succ_{n-m-1}^L, \succ_{n-m}^L, \succ_{n-m+1}^1, \ldots, \succ_n^1) = x''$.

Segundo caso da prova

Esboço da prova: $x^* = \mathrm{med}(p_1, \ldots, p_n, y_1, \ldots, y_{n-1})$.

Seja $x' = f(\succ_1^0, \ldots, \succ_{n-m-1}^0, \succ_{n-m}, \succ_{n-m+1}^1, \ldots, \succ_n^1)$.
$O = \{x \mid \exists\ \tilde{\succ}_{n-m} \text{ tq } \ x = f(\ldots, \succ_{n-m-1}^0, \tilde{\succ}_{n-m}, \succ_{n-m+1}^1, \ldots)\}$.
$x' = \max\{x \in O \mid x \leq x^*\}$ e $x'' = \min\{x \in O \mid x \geq x^*\}$.

Sejam $p^L = \frac{x'+x''}{2} - \epsilon$ e $p^H = \frac{x'+x''}{2} + \epsilon$ e
$\succ_i^L$ e $\succ_i^H$ preferências simétricas com p^L e p^H de pico.

Vimos que $f(\succ_1^L, \ldots, \succ_{n-m-1}^L, \succ_{n-m}^L, \succ_{n-m+1}^1, \ldots, \succ_n^1) = x''$.

Ademais, sabemos também que

$$f(\succ_1^0, \ldots, \succ_{n-m-1}^0, \succ_{n-m}^L, \succ_{n-m+1}^1, \ldots, \succ_n^1) = x'.$$

Segundo caso da prova

Esboço da prova: $x^* = \mathrm{med}(p_1, \ldots, p_n, y_1, \ldots, y_{n-1})$.

Seja $x' = f(\succ_1^0, \ldots, \succ_{n-m-1}^0, \succ_{n-m}, \succ_{n-m+1}^1, \ldots, \succ_n^1)$.
$O = \{x \mid \exists\ \tilde{\succ}_{n-m} \text{ tq } x = f(\ldots, \succ_{n-m-1}^0, \tilde{\succ}_{n-m}, \succ_{n-m+1}^1, \ldots)\}$.
$x' = \max\{x \in O \mid x \leq x^*\}$ e $x'' = \min\{x \in O \mid x \geq x^*\}$.

Sejam $p^L = \frac{x'+x''}{2} - \epsilon$ e $p^H = \frac{x'+x''}{2} + \epsilon$ e
$\succ_i^L$ e $\succ_i^H$ preferências simétricas com p^L e p^H de pico.

Vimos que $f(\succ_1^L, \ldots, \succ_{n-m-1}^L, \succ_{n-m}^L, \succ_{n-m+1}^1, \ldots, \succ_n^1) = x''$.

Ademais, sabemos também que

$$f(\succ_1^0, \ldots, \succ_{n-m-1}^0, \succ_{n-m}^L, \succ_{n-m+1}^1, \ldots, \succ_n^1) = x'.$$

Alterando um a um de $\succ_i^0$ para $\succ_i^L$,
só podemos nos aproximar do pico p^L.

Segundo caso da prova

Esboço da prova: $x^* = \mathrm{med}(p_1, \ldots, p_n, y_1, \ldots, y_{n-1})$.

Seja $x' = f(\succ_1^0, \ldots, \succ_{n-m-1}^0, \succ_{n-m}, \succ_{n-m+1}^1, \ldots, \succ_n^1)$.
$O = \{x \mid \exists\ \tilde{\succ}_{n-m}$ tq $x = f(\ldots, \succ_{n-m-1}^0, \tilde{\succ}_{n-m}, \succ_{n-m+1}^1, \ldots)\}$.
$x' = \max\{x \in O \mid x \leq x^*\}$ e $x'' = \min\{x \in O \mid x \geq x^*\}$.

Sejam $p^L = \frac{x'+x''}{2} - \epsilon$ e $p^H = \frac{x'+x''}{2} + \epsilon$ e
$\succ_i^L$ e $\succ_i^H$ preferências simétricas com p^L e p^H de pico.

Vimos que $f(\succ_1^L, \ldots, \succ_{n-m-1}^L, \succ_{n-m}^L, \succ_{n-m+1}^1, \ldots, \succ_n^1) = x''$.

Ademais, sabemos também que

$$f(\succ_1^0, \ldots, \succ_{n-m-1}^0, \succ_{n-m}^L, \succ_{n-m+1}^1, \ldots, \succ_n^1) = x'.$$

Alterando um a um de $\succ_i^0$ para $\succ_i^L$,
só podemos nos aproximar do pico p^L.

No entanto terminamos em x''
que é mais longe que x' do pico p^L, uma contradição.

Sem anonimato

Um mecanismo é um esquema generalizado de mediana se existem 2^n pontos $\{\alpha_S : S \subseteq [n]\}$ em $[0,1]$ tais que $S \subseteq T \subseteq [n]$ implica que $\alpha_S \leq \alpha_T$, $\alpha_\emptyset = 0$ e $\alpha_{[n]} = 1$, e

$$f(\succ) = \max_{S \subseteq [n]} \min\{\alpha_S, p_i : i \in S\} \text{ para todo } \succ \in \mathcal{R}^n.$$

Sem anonimato

Um mecanismo é um esquema generalizado de mediana se existem 2^n pontos $\{\alpha_S : S \subseteq [n]\}$ em $[0,1]$ tais que $S \subseteq T \subseteq [n]$ implica que $\alpha_S \leq \alpha_T$, $\alpha_\emptyset = 0$ e $\alpha_{[n]} = 1$, e

$$f(\succ) = \max_{S \subseteq [n]} \min\{\alpha_S, p_i : i \in S\} \text{ para todo } \succ \in \mathcal{R}^n.$$

Teorema: Um mecanismo f é à prova de estratégia e sobrejetor sse for um esquema generalizado de mediana.

Exemplo

Um mecanismo é um esquema generalizado de mediana se existem 2^n pontos $\{\alpha_S : S \subseteq [n]\}$ em $[0,1]$ tais que $S \subseteq T \subseteq [n]$ implica que $\alpha_S \leq \alpha_T$, $\alpha_\emptyset = 0$ e $\alpha_{[n]} = 1$, e
$f(\succ) = \max_{S \subseteq [n]} \min\{\alpha_S, p_i : i \in S\}$ para todo $\succ \in \mathcal{R}^n$.

Teorema: Um mecanismo f é à prova de estratégia e sobrejetor sse for um esquema generalizado de mediana.

Um mecanismo natural para o caso sem anonimato:

Exemplo

Um mecanismo é um esquema generalizado de mediana se existem 2^n pontos $\{\alpha_S : S \subseteq [n]\}$ em $[0,1]$ tais que $S \subseteq T \subseteq [n]$ implica que $\alpha_S \leq \alpha_T$, $\alpha_\emptyset = 0$ e $\alpha_{[n]} = 1$, e $f(\succ) = \max_{S\subseteq[n]} \min\{\alpha_S, p_i : i \in S\}$ para todo $\succ \in \mathcal{R}^n$.

Teorema: Um mecanismo f é à prova de estratégia e sobrejetor sse for um esquema generalizado de mediana.

Um mecanismo natural para o caso sem anonimato:

Cada participante tem um peso inteiro β_i.

Exemplo

Um mecanismo é um esquema generalizado de mediana se existem 2^n pontos $\{\alpha_S : S \subseteq [n]\}$ em $[0,1]$ tais que $S \subseteq T \subseteq [n]$ implica que $\alpha_S \leq \alpha_T$, $\alpha_\emptyset = 0$ e $\alpha_{[n]} = 1$, e $f(\succ) = \max_{S \subseteq [n]} \min\{\alpha_S, p_i : i \in S\}$ para todo $\succ \in \mathcal{R}^n$.

Teorema: Um mecanismo f é à prova de estratégia e sobrejetor sse for um esquema generalizado de mediana.

Um mecanismo natural para o caso sem anonimato:

Cada participante tem um peso inteiro β_i.

$$f(\succ) = \mathrm{med}(p_1, \ldots, p_1, p_2, \ldots, p_2, \ldots, p_n, \ldots, p_n),$$

onde cada p_i aparece β_i vezes.

Exemplo

Um mecanismo é um esquema generalizado de mediana se existem 2^n pontos $\{\alpha_S : S \subseteq [n]\}$ em $[0,1]$ tais que $S \subseteq T \subseteq [n]$ implica que $\alpha_S \leq \alpha_T$, $\alpha_\emptyset = 0$ e $\alpha_{[n]} = 1$, e $f(\succ) = \max_{S \subseteq [n]} \min\{\alpha_S, p_i : i \in S\}$ para todo $\succ \in \mathcal{R}^n$.

Teorema: Um mecanismo f é à prova de estratégia e sobrejetor sse for um esquema generalizado de mediana.

Um mecanismo natural para o caso sem anonimato:

Cada participante tem um peso inteiro β_i.

$f(\succ) = \mathrm{med}(p_1, \ldots, p_1, p_2, \ldots, p_2, \ldots, p_n, \ldots, p_n)$,
onde cada p_i aparece β_i vezes.

f é à prova de estratégia e unânime, logo é sobrejetor.

Então f deve ser um esquema generalizado de mediana.

Exemplo

Um mecanismo é um esquema generalizado de mediana se existem 2^n pontos $\{\alpha_S : S \subseteq [n]\}$ em $[0,1]$ tais que $S \subseteq T \subseteq [n]$ implica que $\alpha_S \leq \alpha_T$, $\alpha_\emptyset = 0$ e $\alpha_{[n]} = 1$, e $f(\succ) = \max_{S \subseteq [n]} \min\{\alpha_S, p_i : i \in S\}$ para todo $\succ \in \mathcal{R}^n$.

Cada participante tem um peso inteiro β_i.

$f(\succ) = \mathrm{med}(p_1, \ldots, p_1, p_2, \ldots, p_2, \ldots, p_n, \ldots, p_n)$,
onde cada p_i aparece β_i vezes.

Exemplo

Um mecanismo é um esquema generalizado de mediana se existem 2^n pontos $\{\alpha_S : S \subseteq [n]\}$ em $[0,1]$ tais que $S \subseteq T \subseteq [n]$ implica que $\alpha_S \leq \alpha_T$, $\alpha_\emptyset = 0$ e $\alpha_{[n]} = 1$, e
$f(\succ) = \max_{S \subseteq [n]} \min\{\alpha_S, p_i : i \in S\}$ para todo $\succ \in \mathcal{R}^n$.

Cada participante tem um peso inteiro β_i.

$$f(\succ) = \mathrm{med}(p_1, \ldots, p_1, p_2, \ldots, p_2, \ldots, p_n, \ldots, p_n),$$
onde cada p_i aparece β_i vezes.

f é um esquema generalizado de mediana.

Exemplo

Um mecanismo é um esquema generalizado de mediana se existem 2^n pontos $\{\alpha_S : S \subseteq [n]\}$ em $[0,1]$ tais que $S \subseteq T \subseteq [n]$ implica que $\alpha_S \leq \alpha_T$, $\alpha_\emptyset = 0$ e $\alpha_{[n]} = 1$, e $f(\succ) = \max_{S \subseteq [n]} \min\{\alpha_S, p_i : i \in S\}$ para todo $\succ \in \mathcal{R}^n$.

Cada participante tem um peso inteiro β_i.

$$f(\succ) = \mathrm{med}(p_1, \ldots, p_1, p_2, \ldots, p_2, \ldots, p_n, \ldots, p_n),$$

onde cada p_i aparece β_i vezes.

f é um esquema generalizado de mediana.

Quem são os α_S's?

Exemplo

Um mecanismo é um esquema generalizado de mediana se existem 2^n pontos $\{\alpha_S : S \subseteq [n]\}$ em $[0,1]$ tais que $S \subseteq T \subseteq [n]$ implica que $\alpha_S \leq \alpha_T$, $\alpha_\emptyset = 0$ e $\alpha_{[n]} = 1$, e $f(\succ) = \max_{S \subseteq [n]} \min\{\alpha_S, p_i : i \in S\}$ para todo $\succ \in \mathcal{R}^n$.

Cada participante tem um peso inteiro β_i.

$f(\succ) = \mathrm{med}(p_1, \ldots, p_1, p_2, \ldots, p_2, \ldots, p_n, \ldots, p_n)$,
onde cada p_i aparece β_i vezes.

f é um esquema generalizado de mediana.

Quem são os α_S's?

Considere $f(\succ) = \min(p_1, \ldots, p_1, p_2, \ldots, p_2, \ldots, p_n, \ldots, p_n)$,
onde cada p_i aparece β_i vezes.

Quem são os α para tal f?

Exemplo mais simples

Um mecanismo é um esquema generalizado de mediana se existem 2^n pontos $\{\alpha_S : S \subseteq [n]\}$ em $[0, 1]$ tais que $S \subseteq T \subseteq [n]$ implica que $\alpha_S \leq \alpha_T$, $\alpha_\emptyset = 0$ e $\alpha_{[n]} = 1$, e $f(\succ) = \max_{S \subseteq [n]} \min\{\alpha_S, p_i : i \in S\}$ para todo $\succ \in \mathcal{R}^n$.

Cada participante tem um peso inteiro β_i.

$$f(\succ) = \min(p_1, \ldots, p_1, p_2, \ldots, p_2, \ldots, p_n, \ldots, p_n),$$

onde cada p_i aparece β_i vezes.

f é um esquema generalizado de mediana:

Exemplo mais simples

Um mecanismo é um esquema generalizado de mediana se existem 2^n pontos $\{\alpha_S : S \subseteq [n]\}$ em $[0,1]$ tais que $S \subseteq T \subseteq [n]$ implica que $\alpha_S \leq \alpha_T$, $\alpha_\emptyset = 0$ e $\alpha_{[n]} = 1$, e
$f(\succ) = \max_{S \subseteq [n]} \min\{\alpha_S, p_i : i \in S\}$ para todo $\succ \in \mathcal{R}^n$.

Cada participante tem um peso inteiro β_i.

$$f(\succ) = \min(p_1, \ldots, p_1, p_2, \ldots, p_2, \ldots, p_n, \ldots, p_n),$$
onde cada p_i aparece β_i vezes.

f é um esquema generalizado de mediana:

$$\text{Tome } \alpha_S = \begin{cases} 0 & \text{se } S \neq [n] \\ 1 & \text{se } S = [n]. \end{cases}$$

Exemplo mais simples

Um mecanismo é um esquema generalizado de mediana se existem 2^n pontos $\{\alpha_S : S \subseteq [n]\}$ em $[0,1]$ tais que $S \subseteq T \subseteq [n]$ implica que $\alpha_S \leq \alpha_T$, $\alpha_\emptyset = 0$ e $\alpha_{[n]} = 1$, e $f(\succ) = \max_{S \subseteq [n]} \min\{\alpha_S, p_i : i \in S\}$ para todo $\succ \in \mathcal{R}^n$.

Cada participante tem um peso inteiro β_i.

$$f(\succ) = \min(p_1, \ldots, p_1, p_2, \ldots, p_2, \ldots, p_n, \ldots, p_n),$$

onde cada p_i aparece β_i vezes.

f é um esquema generalizado de mediana:

Tome $\alpha_S = \begin{cases} 0 & \text{se } S \neq [n] \\ 1 & \text{se } S = [n]. \end{cases}$

$$\min\{\alpha_S, p_i : i \in S\} = \begin{cases} 0 & \text{para todo } S \neq [n] \\ \min\{p_i : i \in [n]\} & \text{para } S = [n]. \end{cases}$$

Outro exemplo

Um mecanismo é um esquema generalizado de mediana se existem 2^n pontos $\{\alpha_S : S \subseteq [n]\}$ em $[0,1]$ tais que $S \subseteq T \subseteq [n]$ implica que $\alpha_S \leq \alpha_T$, $\alpha_\emptyset = 0$ e $\alpha_{[n]} = 1$, e
$f(\succ) = \max_{S \subseteq [n]} \min\{\alpha_S, p_i : i \in S\}$ para todo $\succ \in \mathcal{R}^n$.

Cada participante tem um peso inteiro β_i.

Outro exemplo

Um mecanismo é um esquema generalizado de mediana se existem 2^n pontos $\{\alpha_S : S \subseteq [n]\}$ em $[0,1]$ tais que $S \subseteq T \subseteq [n]$ implica que $\alpha_S \leq \alpha_T$, $\alpha_\emptyset = 0$ e $\alpha_{[n]} = 1$, e
$f(\succ) = \max_{S \subseteq [n]} \min\{\alpha_S, p_i : i \in S\}$ para todo $\succ \in \mathcal{R}^n$.

Cada participante tem um peso inteiro β_i.

Considere $f(\succ) = \max(p_1, \ldots, p_1, p_2, \ldots, p_2, \ldots, p_n, \ldots, p_n)$,
onde cada p_i aparece β_i vezes.

Quem são os α para tal f?

De volta ao primeiro exemplo

Um mecanismo é um esquema generalizado de mediana se existem 2^n pontos $\{\alpha_S : S \subseteq [n]\}$ em $[0,1]$ tais que $S \subseteq T \subseteq [n]$ implica que $\alpha_S \leq \alpha_T$, $\alpha_\emptyset = 0$ e $\alpha_{[n]} = 1$, e $f(\succ) = \max_{S \subseteq [n]} \min\{\alpha_S, p_i : i \in S\}$ para todo $\succ \in \mathcal{R}^n$.

Cada participante tem um peso inteiro β_i.

$$f(\succ) = \mathrm{med}(p_1, \ldots, p_1, p_2, \ldots, p_2, \ldots, p_n, \ldots, p_n),$$
onde cada p_i aparece β_i vezes.

f é um esquema generalizado de mediana.

De volta ao primeiro exemplo

Um mecanismo é um esquema generalizado de mediana se existem 2^n pontos $\{\alpha_S : S \subseteq [n]\}$ em $[0,1]$ tais que $S \subseteq T \subseteq [n]$ implica que $\alpha_S \leq \alpha_T$, $\alpha_\emptyset = 0$ e $\alpha_{[n]} = 1$, e
$f(\succ) = \max_{S\subseteq[n]} \min\{\alpha_S, p_i : i \in S\}$ para todo $\succ \in \mathcal{R}^n$.

Cada participante tem um peso inteiro β_i.

$f(\succ) = \mathrm{med}(p_1, \ldots, p_1, p_2, \ldots, p_2, \ldots, p_n, \ldots, p_n)$,
onde cada p_i aparece β_i vezes.

f é um esquema generalizado de mediana.

Quem são os α_S's?

De volta ao primeiro exemplo

Um mecanismo é um esquema generalizado de mediana se existem 2^n pontos $\{\alpha_S : S \subseteq [n]\}$ em $[0,1]$ tais que $S \subseteq T \subseteq [n]$ implica que $\alpha_S \leq \alpha_T$, $\alpha_\emptyset = 0$ e $\alpha_{[n]} = 1$, e $f(\succ) = \max_{S\subseteq[n]} \min\{\alpha_S, p_i : i \in S\}$ para todo $\succ \in \mathcal{R}^n$.

Cada participante tem um peso inteiro β_i.

$$f(\succ) = \mathrm{med}(p_1, \ldots, p_1, p_2, \ldots, p_2, \ldots, p_n, \ldots, p_n),$$
onde cada p_i aparece β_i vezes.

f é um esquema generalizado de mediana.

Quem são os α_S's?

Exercício!