Melhores momentos

AULA 22

Árvore binárias de busca

Considere uma árvore binária cujos nós têm um campo `chave` (como `int` ou `String`, por exemplo).

```
typedef struct celula Celula;
struct celula {
   int conteudo; /* tipo devia ser Item*/
   int chave; /* tipo devia ser Chave*/
   Celula *esq;
   Celula *dir;
};
typedef Celula No;
typedef No *Arvore;
```

Árvore binárias de busca

Uma árvore binária deste tipo é de **busca** (em relação ao campo `chave`) se para cada nó `x` `x.chave` é

1. maior ou igual à chave de qualquer nó na subárvore esquerda de `x` e
2. menor ou igual à chave de qualquer nó na subárvore direita de `x`.

Árvore binárias de busca

Uma árvore binária deste tipo é de **busca** (em relação ao campo `chave`) se para cada nó `x` `x.chave` é

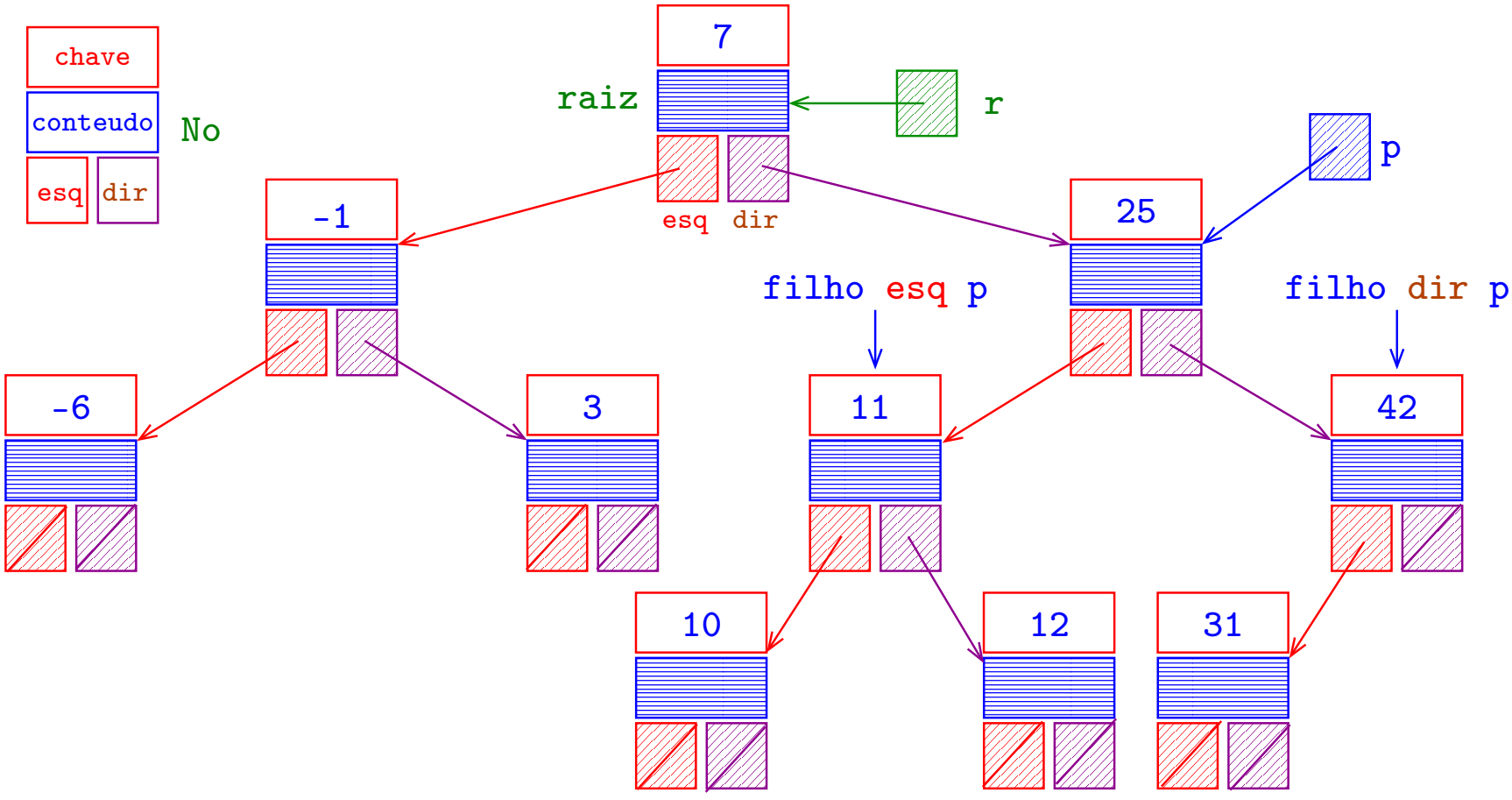
1. maior ou igual à chave de qualquer nó na subárvore esquerda de `x` e
2. menor ou igual à chave de qualquer nó na subárvore direita de `x`.

Assim, se `p` é um nó qualquer então vale que

```
q->chave <= p->chave e
p->chave <= t->chave
```

para todo nó `q` na subárvore esquerda de `p`
e todo nó `t` na subárvore direita de `p`.

Ilustração de uma árvore binária de busca



in-ordem (e-r-d): -6 -1 3 7 10 11 12 25 31 42

Inserção recursiva

uma árvore de busca `r` e um nó `novo`.
Insere o nó no lugar correto da árvore de modo que a árvore continue sendo de busca e retorna o endereço da nova árvore.

```
Arvore insere(Arvore r, No *novo) {
   if (r == NULL) return novo;
   if (r->chave > novo->chave)
       r->esq = insere(r->esq, novo);
   else
       r->dir = insere(r->dir, novo);
   return r;
}
```

AULA 23

Remoção

Recebe uma árvore de busca não vazia `r`. Remove a sua raiz e rearranja a árvore de modo que continue sendo de busca e retorna o endereço da nova árvore.

Remoção

```
Arvore removeRaiz(Arvore r) {
   No *p, *q;
   if (r->esq == NULL) {
       q = r->dir; free(r); return q;
   }
   /* encontre na subarvore r->esq o nó q
      com maior valor */
   p = r; q = r->esq;
   while (q->dir != NULL) {
       p = q;
       q = q->dir;
   }
```

Remoção

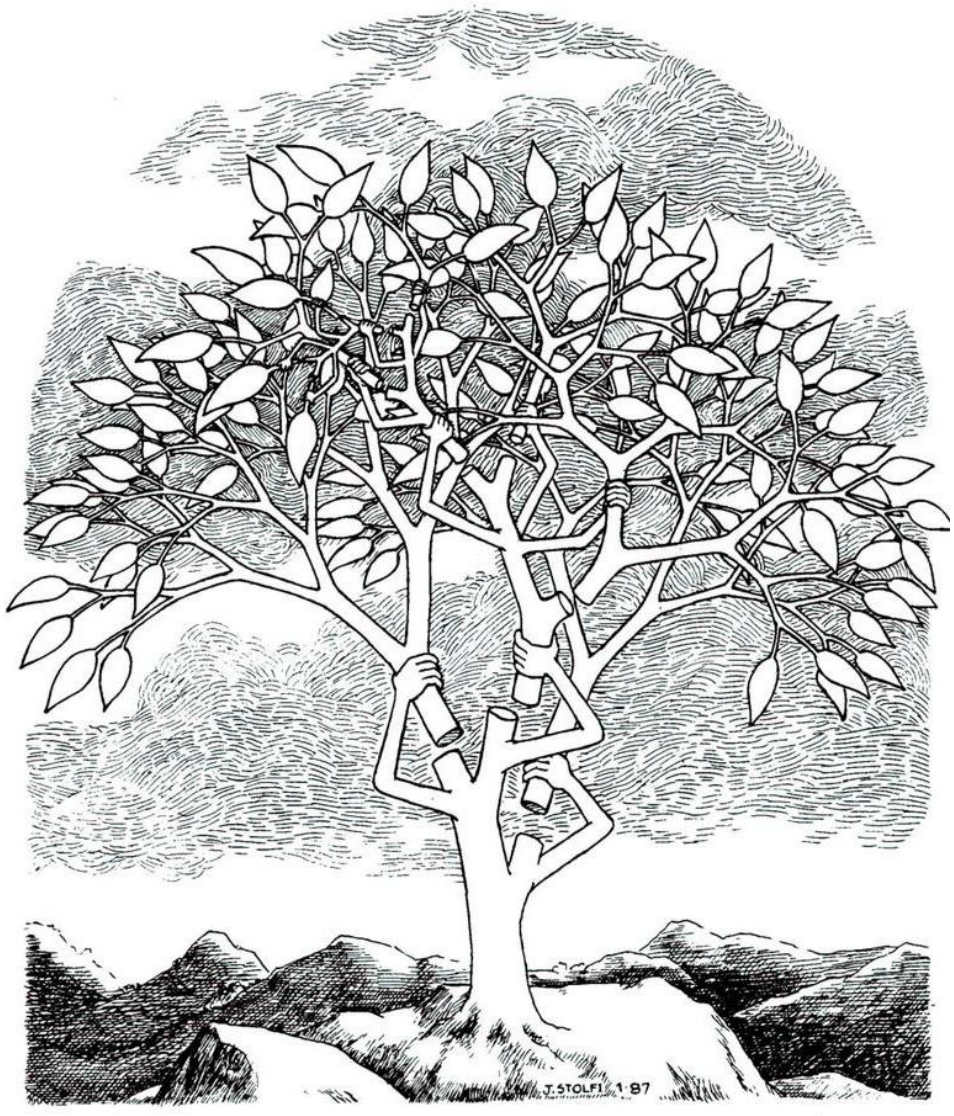
```
    /* q é o nó anterior a r na ordem e-r-d
       p é o pai de q*/
    if (p != r) {
        p->dir = q->esq;
        q->esq = r->esq;
    }
    q->dir = r->dir; free(r); return q;
}
```

Consumo de tempo

O consumo de tempo das funções `busca`, `insere` e `removeRaiz` é, no pior caso, proporcional à altura da árvore.

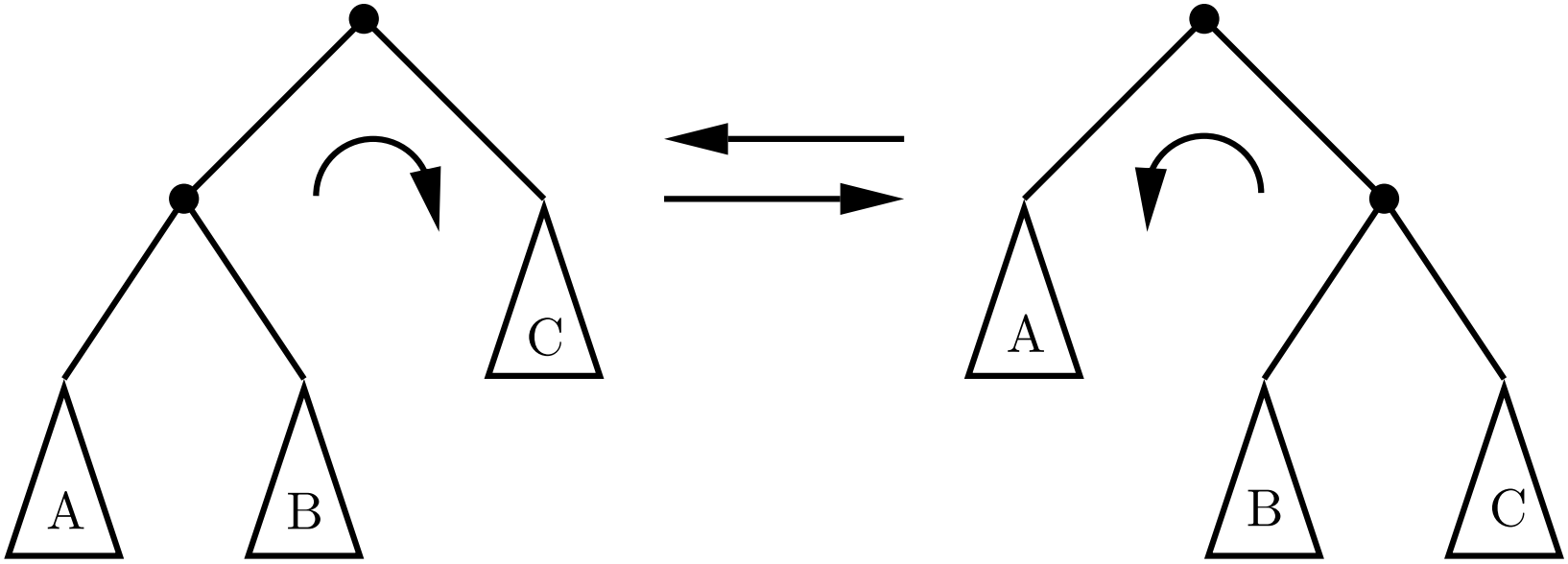
Conclusão:
interessa trabalhar com árvores balanceadas:
árvores AVL, árvores rubro-negras, treaps ...

Self balancing trees

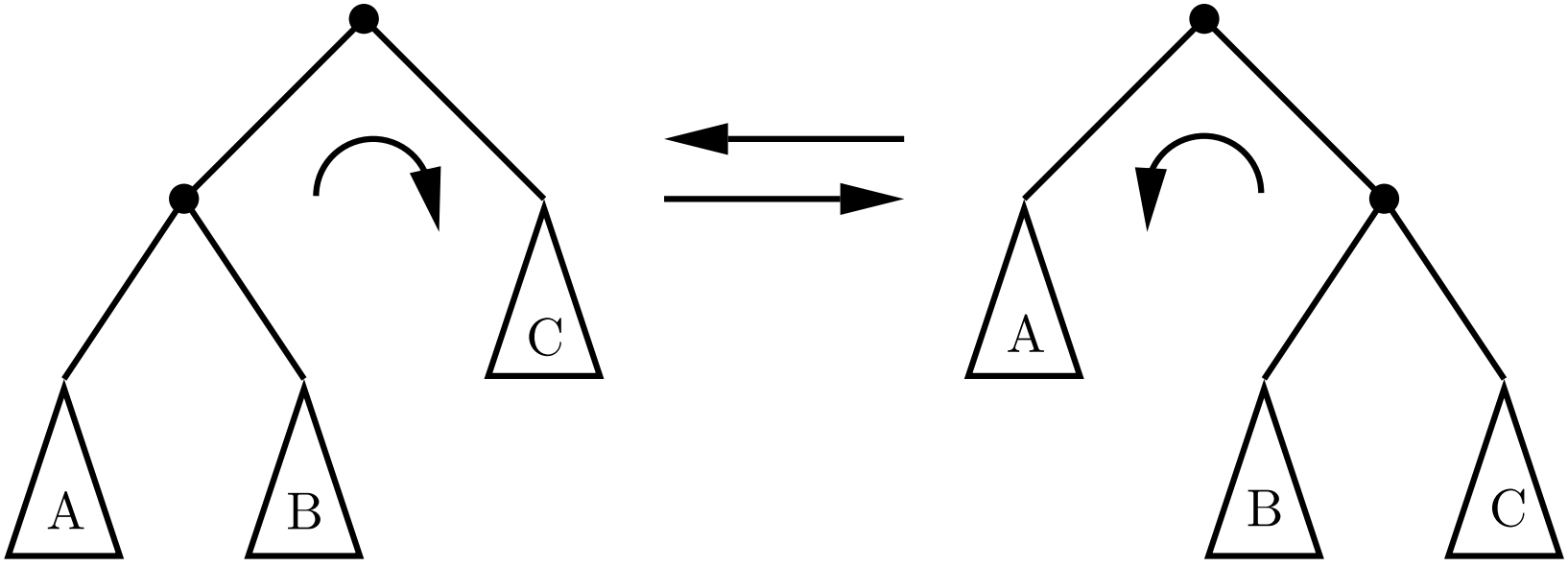


autor: Jorge Stolfi

Rotações



Rotações



Observe que a ordem se mantem:

se era ABB, então continua ABB.

Rotação para direita

Recebe uma árvore `r` com
`r` $\neq$ `NULL` e `r->esq` $\neq$ `NULL`.

```
Arvore rotacaoDir(Arvore r) {
   No *q = r->esq;
   r->esq = q->dir;
   q->dir = r;
   return q;
}
```

Rotação para direita

Recebe uma árvore `r` com
`r` $\neq$ `NULL` e `r->esq` $\neq$ `NULL`.

```
Arvore rotacaoDir(Arvore r) {
   No *q = r->esq;
   r->esq = q->dir;
   q->dir = r;
   return q;
}
```

Escreva o `rotacaoEsq`.

Treap

Uma **treap** (= *tree + heap*) é uma árvore de busca binária aleatorizada, onde cada nó tem um campo extra chamado prior (= *priority*).

Treap

Uma **treap** (= *tree + heap*) é uma árvore de busca binária aleatorizada, onde cada nó tem um campo extra chamado prior (= *priority*).

A treap, como a árvore de busca binária, guarda um conjunto de objetos (itens), cada um dotado de uma chave (= *key*) e de um valor (= *value*).

Treap

Uma **treap** (= *tree + heap*) é uma árvore de busca binária aleatorizada, onde cada nó tem um campo extra chamado prior (= *priority*).

A treap, como a árvore de busca binária, guarda um conjunto de objetos (itens), cada um dotado de uma chave (= *key*) e de um valor (= *value*).

As chaves podem ser números inteiros ou *strings* ou outro tipo de dados.

Treap

Uma **treap** (= *tree + heap*) é uma árvore de busca binária aleatorizada, onde cada nó tem um campo extra chamado prior (= *priority*).

A treap, como a árvore de busca binária, guarda um conjunto de objetos (itens), cada um dotado de uma chave (= *key*) e de um valor (= *value*).

As chaves podem ser números inteiros ou *strings* ou outro tipo de dados.

As prioridades satisfazem a propriedade de um heap:
todo nós deve ter prioridade maior que a prioridade dos seus filhos.

Busca em treap

Como fica a busca?

Busca em treap

Como fica a busca? Igual!

Busca em treap

Como fica a busca? Igual!

E remoção?

Busca em treap

Como fica a busca? Igual!

E remoção? Quase igual!

Como fica a prioridade do nó que substituiu a raiz?

Busca em treap

Como fica a busca? Igual!

E remoção? Quase igual!
Como fica a prioridade do nó que substituiu a raiz?

Consumo de tempo:

O consumo de tempo de `busca` e `remove` numa treap é, no pior caso, proporcional à sua altura.

Busca em treap

Como fica a busca? Igual!

E remoção? Quase igual!
Como fica a prioridade do nó que substituiu a raiz?

Consumo de tempo:

O consumo de tempo de `busca` e `remove` numa treap é, no pior caso, proporcional à sua altura.

Qual é a altura de uma treap?

Depende das prioridades aleatórias...

Busca em treap

Como fica a busca? Igual!

E remoção? Quase igual!
Como fica a prioridade do nó que substituiu a raiz?

Consumo de tempo:

O consumo de tempo de `busca` e `remove` numa treap é, no pior caso, proporcional à sua altura.

Qual é a altura de uma treap?

Depende das prioridades aleatórias...
É uma variável aleatória!

Inserção em treaps

Insere-se o novo nó exatamente como antes.

Inserção em treaps

Insere-se o novo nó exatamente como antes.

Atribui-se uma prioridade escolhida aleatoriamente de maneira uniforme de um conjunto grande.

Inserção em treaps

Insere-se o novo nó exatamente como antes.

Atribui-se uma prioridade escolhida aleatoriamente de maneira uniforme de um conjunto grande.

Por meio de rotações,
se simula um sobe_heap caso necessário.

Inserção em treaps

Insere-se o novo nó exatamente como antes.

Atribui-se uma prioridade escolhida aleatoriamente de maneira uniforme de um conjunto grande.

Por meio de rotações,
se simula um sobe_heap caso necessário.

Ou seja, enquanto o nó tem prioridade maior que o seu pai, executa-se uma rotação apropriada para que ele fique acima do pai.

Inserção em treaps

Implementação com apontador `pai`.

```
typedef struct celula Celula;
struct celula {
   int conteudo; /* tipo devia ser Item*/
   int chave; /* tipo devia ser Chave*/
   int prior;
   Celula *pai;
   Celula *esq;
   Celula *dir;
};
typedef Celula No;
typedef No *Treap;
```

Inserção

Recebe uma `treap` `r` e um nó `novo`.
Insere o nó no lugar correto da `treap`, executa um `sobe_heap` e retorna o endereço da nova treap.

Inserção

Recebe uma treap r e um nó novo.
Insere o nó no lugar correto da treap, executa um sobe_heap e retorna o endereço da nova treap.

```
No *new(int chave,int conteudo, No *esq, No*dir)
{
   No *novo = mallocSafe(sizeof *novo);
   novo->chave= chave;
   novo->conteudo = conteudo;
   novo->prior = random();
   novo->pai = NULL;
   novo->esq = esq;
   novo->dir = dir;
   return novo;
}
```

Rotação com apontador pai

Recebe treap `r` e nó `q` $\neq$ `NULL` com `q->pai` $\neq$ `NULL`.

Rotação com apontador pai

Recebe treap `r` e nó `q` $\neq$ `NULL` com `q->pai` $\neq$ `NULL`.

```
Treap rotaciona(Treap r, No *q) {
   No *p = q->pai;
   q->pai = p->pai;
   if (q == p->esq) {    ▷ rotação p/direita
      p->esq = q->dir;
      if (q->dir != NULL) q->dir->pai = p;
      q->dir = p;
      p->pai = q;
   } else                ▷ rotação p/esquerda ...
   if (q->pai == NULL) r = q;
   return r;
}
```

Inserção

```
Treap insere(Treap r, No *novo) {
   No *f, *p; /* pai de f */
   if (r == NULL) return novo;
   f = r;
   while (f != NULL) {
       p = f;
       if (f->chave > novo->chave)
           f = f->esq;
       else
           f = f->dir;
   }
```

Inserção

```
    /* novo sera uma folha, filho de p */
    novo->pai = p;
    if (p->chave > novo->chave)
        p->esq = novo;
    else
        p->dir = novo;

    q = novo->pai;
    while (q != NULL && q->prior < novo->prior)
        r = rotaciona (r, novo);
        q = novo->pai;

    return r;
}
```

Qual é a altura de uma treap?

Depende das prioridades aleatórias...

É uma variável aleatória!

Pode-se mostra que o valor esperado da altura de uma treap é $\mathrm{O}(\lg n)$, onde n é o número de nós na treap.

Qual é a altura de uma treap?

Depende das prioridades aleatórias...

É uma variável aleatória!

Pode-se mostra que o valor esperado da altura de uma treap é $\mathrm{O}(\lg n)$, onde n é o número de nós na treap.

Consumo de tempo:

O consumo de tempo esperado de `busca`, `insere` e `remove` numa treap é $\mathrm{O}(\lg n)$.