

Caminhos mais curtos

CLRS Secs 24.3 e 25.2

Caminhos mais curtos

Dados grafo **dirigido** $G = (V, E)$ e

função c que atribui um comprimento $c(e)$ para cada $e \in E$.

Caminhos mais curtos

Dados grafo **dirigido** $G = (V, E)$ e

função c que atribui um comprimento $c(e)$ para cada $e \in E$.

- ▶ O **comprimento** de um caminho é a soma dos comprimentos de suas arestas.
- ▶ Para vértices u e v , a **distância** de u a v é o menor comprimento de um caminho de u a v .

Caminhos mais curtos

Dados grafo **dirigido** $G = (V, E)$ e função c que atribui um comprimento $c(e)$ para cada $e \in E$.

- ▶ O **comprimento** de um caminho é a soma dos comprimentos de suas arestas.
- ▶ Para vértices u e v , a **distância** de u a v é o menor comprimento de um caminho de u a v .

Problema 1: Dados G , c e um vértice s de G , encontrar a distância de s a cada vértice de G .

Caminhos mais curtos

Dados grafo **dirigido** $G = (V, E)$ e função c que atribui um comprimento $c(e)$ para cada $e \in E$.

- ▶ O **comprimento** de um caminho é a soma dos comprimentos de suas arestas.
- ▶ Para vértices u e v , a **distância** de u a v é o menor comprimento de um caminho de u a v .

Problema 1: Dados G , c e um vértice s de G , encontrar a distância de s a cada vértice de G .

Problema 2: Dados G e c , encontrar a distância entre todo par de vértices de G .

Caminhos mais curtos

Dados grafo **dirigido** $G = (V, E)$ e função c que atribui um comprimento $c(e)$ para cada $e \in E$.

- ▶ O **comprimento** de um caminho é a soma dos comprimentos de suas arestas.
- ▶ Para vértices u e v , a **distância** de u a v é o menor comprimento de um caminho de u a v .

Problema 1: Dados G , c e um vértice s de G , encontrar a distância de s a cada vértice de G .

Problema 2: Dados G e c , encontrar a distância entre todo par de vértices de G .

Algoritmo de Dijkstra: comprimentos não negativos

Caminhos mais curtos

Dados grafo **dirigido** $G = (V, E)$ e

função c que atribui um comprimento $c(e)$ para cada $e \in E$.

- ▶ O **comprimento** de um caminho é a soma dos comprimentos de suas arestas.
- ▶ Para vértices u e v , a **distância** de u a v é o menor comprimento de um caminho de u a v .

Problema 1: Dados G , c e um vértice s de G , encontrar a distância de s a cada vértice de G .

Problema 2: Dados G e c , encontrar a distância entre todo par de vértices de G .

Algoritmo de Dijkstra: comprimentos não negativos

Algoritmo de Floyd-Warshall: sem circuitos negativos

Circuitos negativos

Dados:

$G = (V, E)$: grafo **dirigido**

Função c que atribui um comprimento $c(e)$ para cada $e \in E$.

Para vértices u e v , a **distância** de u a v é o comprimento de um caminho entre u e v de comprimento mínimo.

Circuitos negativos

Dados:

$G = (V, E)$: grafo **dirigido**

Função c que atribui um comprimento $c(e)$ para cada $e \in E$.

Para vértices u e v , a **distância** de u a v é o comprimento de um caminho entre u e v de comprimento mínimo.

Quando há um circuito de comprimento negativo no grafo, a distância entre certos vértices pode ficar mal-definida.

Circuitos negativos

Dados:

$G = (V, E)$: grafo **dirigido**

Função c que atribui um comprimento $c(e)$ para cada $e \in E$.

Para vértices u e v , a **distância** de u a v é o comprimento de um caminho entre u e v de comprimento mínimo.

Quando há um circuito de comprimento negativo no grafo, a distância entre certos vértices pode ficar mal-definida.

Poderíamos dar “voltas” num circuito negativo, cada vez obtendo um “caminho” de comprimento menor.

Circuitos negativos

Dados:

$G = (V, E)$: grafo **dirigido**

Função c que atribui um comprimento $c(e)$ para cada $e \in E$.

Para vértices u e v , a **distância** de u a v é o comprimento de um caminho entre u e v de comprimento mínimo.

Quando há um circuito de comprimento negativo no grafo, a distância entre certos vértices pode ficar mal-definida.

Poderíamos dar “voltas” num circuito negativo, cada vez obtendo um “caminho” de comprimento menor.

Assim definimos a distância $\delta(u, v)$ como $-\infty$, caso exista circuito negativo alcançável de u , e o comprimento de um caminho mais curto de u a v c.c.

Propriedades

P : caminho mais curto de s a t

Subestrutura ótima:

Subcaminhos de P são caminhos mais curtos.

Propriedades

P : caminho mais curto de s a t

Subestrutura ótima:

Subcaminhos de P são caminhos mais curtos.

Lema: Dados G e c , seja $P = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$ um caminho mais curto em G de v_1 a v_k . Para todo $1 \leq i \leq j \leq k$, $P_{ij} := \langle v_i, \dots, v_j \rangle$ é um caminho mais curto de v_i a v_j .

Propriedades

P : caminho mais curto de s a t

Subestrutura ótima:

Subcaminhos de P são caminhos mais curtos.

Lema: Dados G e c , seja $P = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$ um caminho mais curto em G de v_1 a v_k . Para todo $1 \leq i \leq j \leq k$, $P_{ij} := \langle v_i, \dots, v_j \rangle$ é um caminho mais curto de v_i a v_j .

Corolário: Para G e c , se o último arco de um caminho mais curto de s a t é o arco ut , então $\delta(s, t) = \delta(s, u) + c(ut)$.

Propriedades

P : caminho mais curto de s a t

Subestrutura ótima:

Subcaminhos de P são caminhos mais curtos.

Lema: Dados G e c , seja $P = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$ um caminho mais curto em G de v_1 a v_k . Para todo $1 \leq i \leq j \leq k$, $P_{ij} := \langle v_i, \dots, v_j \rangle$ é um caminho mais curto de v_i a v_j .

Corolário: Para G e c , se o último arco de um caminho mais curto de s a t é o arco ut , então $\delta(s, t) = \delta(s, u) + c(ut)$.

Lema: Para G , c e s ,

$$\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + c(uv) \text{ para todos os arcos } uv.$$

Algoritmo de Dijkstra

π : representa os caminhos mínimos até s

d : guarda estimativa a distância de s ao vértice

DIJKSTRA (G, c, s)

- 1 **para** $v \in V(G)$ **faça** $v.d \leftarrow \infty$ $v.\pi \leftarrow \text{nil}$
- 2 $s.d \leftarrow 0$
- 3 $Q \leftarrow V(G)$ \triangleright fila de prioridade: chave de v é $v.d$
- 4 **enquanto** $Q \neq \emptyset$ **faça**
- 5 $u \leftarrow \text{EXTRACT-MIN}(Q)$
- 6 **para cada** $v \in \text{adj}(u)$ **faça**
- 7 **se** $v \in Q$ e $v.d > u.d + c(uv)$
- 8 **então** $v.\pi \leftarrow u$ $v.d \leftarrow u.d + c(uv)$
- 9 π e d são a informação desejada.

Algoritmo de Dijkstra

π : representa os caminhos mínimos até s

d : guarda estimativa a distância de s ao vértice

DIJKSTRA (G, c, s)

- 1 para $v \in V(G)$ faça $v.d \leftarrow \infty$ $v.\pi \leftarrow \text{nil}$
- 2 $s.d \leftarrow 0$
- 3 $Q \leftarrow V(G)$ \triangleright fila de prioridade: chave de v é $v.d$
- 4 enquanto $Q \neq \emptyset$ faça
- 5 $u \leftarrow \text{EXTRACT-MIN}(Q)$
- 6 para cada $v \in \text{adj}(u)$ faça
- 7 se $v \in Q$ e $v.d > u.d + c(uv)$
- 8 então $v.\pi \leftarrow u$ $v.d \leftarrow u.d + c(uv)$
- 9 π e d são a informação desejada.

$u.d$: comprimento de um caminho mínimo de s a u
cujos vértices internos estão fora de Q

Algoritmo de Dijkstra

π : representa os caminhos mínimos até s

d : guarda estimativa a distância de s ao vértice

DIJKSTRA (G, c, s)

- 1 para $v \in V(G)$ faça $v.d \leftarrow \infty$ $v.\pi \leftarrow \text{nil}$
- 2 $s.d \leftarrow 0$
- 3 $Q \leftarrow V(G)$ \triangleright fila de prioridade: chave de v é $v.d$
- 4 enquanto $Q \neq \emptyset$ faça
- 5 $u \leftarrow \text{EXTRACT-MIN}(Q)$
- 6 para cada $v \in \text{adj}(u)$ faça
- 7 se $v \in Q$ e $v.d > u.d + c(uv)$
- 8 então $v.\pi \leftarrow u$ $v.d \leftarrow u.d + c(uv)$
- 9 π e d são a informação desejada.

Invariantes: $u.d = \delta(s, u)$ se $u \notin Q$
 $u.d \geq \delta(s, u)$ se $u \in Q$

Algoritmo de Dijkstra

π : representa os caminhos mínimos até s

d : guarda estimativa a distância de s ao vértice

DIJKSTRA (G, c, s)

- 1 para $v \in V(G)$ faça $v.d \leftarrow \infty$ $v.\pi \leftarrow \text{nil}$
- 2 $s.d \leftarrow 0$
- 3 $Q \leftarrow V(G)$ \triangleright fila de prioridade: chave de v é $v.d$
- 4 enquanto $Q \neq \emptyset$ faça
- 5 $u \leftarrow \text{EXTRACT-MIN}(Q)$
- 6 para cada $v \in \text{adj}(u)$ faça
- 7 se $v \in Q$ e $v.d > u.d + c(uv)$
- 8 então $v.\pi \leftarrow u$ $v.d \leftarrow u.d + c(uv)$
- 9 π e d são a informação desejada.

Invariantes: $u.d = \delta(s, u)$ se $u \notin Q$
 $u.d \geq \delta(s, u)$ se $u \in Q$

Onde usamos que não há arestas de comprimento negativo?

Algoritmo de Dijkstra

Complexidade:

DIJKSTRA (G, c, s)

- 1 para $v \in V(G)$ faça $v.d \leftarrow \infty$ $v.\pi \leftarrow \text{nil}$
- 2 $s.d \leftarrow 0$
- 3 $Q \leftarrow V(G)$ \triangleright fila de prioridade: chave de v é $v.d$
- 4 enquanto $Q \neq \emptyset$ faça
- 5 $u \leftarrow \text{EXTRACT-MIN}(Q)$
- 6 para cada $v \in \text{adj}(u)$ faça
- 7 se $v \in Q$ e $v.d > u.d + c(uv)$
- 8 então $v.\pi \leftarrow u$ $v.d \leftarrow u.d + c(uv)$
- 9 π e d são a informação desejada.

Algoritmo de Dijkstra

Complexidade:

DIJKSTRA (G, c, s)

- 1 **para** $v \in V(G)$ **faça** $v.d \leftarrow \infty$ $v.\pi \leftarrow \text{nil}$
- 2 $s.d \leftarrow 0$
- 3 $Q \leftarrow V(G)$ \triangleright fila de prioridade: chave de v é $v.d$
- 4 **enquanto** $Q \neq \emptyset$ **faça**
- 5 $u \leftarrow \text{EXTRACT-MIN}(Q)$
- 6 **para cada** $v \in \text{adj}(u)$ **faça**
- 7 **se** $v \in Q$ e $v.d > u.d + c(uv)$
- 8 **então** $v.\pi \leftarrow u$ $v.d \leftarrow u.d + c(uv)$
- 9 π e d são a informação desejada.

Se Q for uma lista simples:

Linha 3 e EXTRACT-MIN : $O(n)$

Algoritmo de Dijkstra

Complexidade:

DIJKSTRA (G, c, s)

- 1 **para** $v \in V(G)$ **faça** $v.d \leftarrow \infty$ $v.\pi \leftarrow \text{nil}$
- 2 $s.d \leftarrow 0$
- 3 $Q \leftarrow V(G)$ \triangleright fila de prioridade: chave de v é $v.d$
- 4 **enquanto** $Q \neq \emptyset$ **faça**
- 5 $u \leftarrow \text{EXTRACT-MIN}(Q)$
- 6 **para cada** $v \in \text{adj}(u)$ **faça**
- 7 **se** $v \in Q$ e $v.d > u.d + c(uv)$
- 8 **então** $v.\pi \leftarrow u$ $v.d \leftarrow u.d + c(uv)$
- 9 π e d são a informação desejada.

Se Q for uma lista simples:

Linha 3 e **EXTRACT-MIN** : $O(n)$

Consumo de tempo do Dijkstra: $O(n^2)$

Algoritmo de Dijkstra

Complexidade:

DIJKSTRA (G, c, s)

- 1 para $v \in V(G)$ faça $v.d \leftarrow \infty$ $v.\pi \leftarrow \text{nil}$
- 2 $s.d \leftarrow 0$
- 3 $Q \leftarrow V(G)$ \triangleright fila de prioridade: chave de v é $v.d$
- 4 enquanto $Q \neq \emptyset$ faça
- 5 $u \leftarrow \text{EXTRACT-MIN}(Q)$
- 6 para cada $v \in \text{adj}(u)$ faça
- 7 se $v \in Q$ e $v.d > u.d + c(uv)$
- 8 então $v.\pi \leftarrow u$ $v.d \leftarrow u.d + c(uv)$
- 9 π e d são a informação desejada.

Algoritmo de Dijkstra

Complexidade:

DIJKSTRA (G, c, s)

- 1 **para** $v \in V(G)$ **faça** $v.d \leftarrow \infty$ $v.\pi \leftarrow \text{nil}$
- 2 $s.d \leftarrow 0$
- 3 $Q \leftarrow V(G)$ \triangleright fila de prioridade: chave de v é $v.d$
- 4 **enquanto** $Q \neq \emptyset$ **faça**
- 5 $u \leftarrow \text{EXTRACT-MIN}(Q)$
- 6 **para cada** $v \in \text{adj}(u)$ **faça**
- 7 **se** $v \in Q$ e $v.d > u.d + c(uv)$
- 8 **então** $v.\pi \leftarrow u$ $v.d \leftarrow u.d + c(uv)$
- 9 π e d são a informação desejada.

Se Q for implementada com um heap:

Inicialização: $O(n)$ **EXTRACT-MIN** e **DECREASE-KEY** : $O(\lg n)$

DECREASE-KEY : linha 8

Algoritmo de Dijkstra

Complexidade:

DIJKSTRA (G, c, s)

- 1 **para** $v \in V(G)$ **faça** $v.d \leftarrow \infty$ $v.\pi \leftarrow \text{nil}$
- 2 $s.d \leftarrow 0$
- 3 $Q \leftarrow V(G)$ \triangleright fila de prioridade: chave de v é $v.d$
- 4 **enquanto** $Q \neq \emptyset$ **faça**
- 5 $u \leftarrow \text{EXTRACT-MIN}(Q)$
- 6 **para cada** $v \in \text{adj}(u)$ **faça**
- 7 **se** $v \in Q$ e $v.d > u.d + c(uv)$
- 8 **então** $v.\pi \leftarrow u$ $v.d \leftarrow u.d + c(uv)$
- 9 π e d são a informação desejada.

Consumo de tempo do Dijkstra: $O(m \lg n)$

Algoritmo de Dijkstra

Complexidade:

DIJKSTRA (G, c, s)

- 1 **para** $v \in V(G)$ **faça** $v.d \leftarrow \infty$ $v.\pi \leftarrow \text{nil}$
- 2 $s.d \leftarrow 0$
- 3 $Q \leftarrow V(G)$ \triangleright fila de prioridade: chave de v é $v.d$
- 4 **enquanto** $Q \neq \emptyset$ **faça**
- 5 $u \leftarrow \text{EXTRACT-MIN}(Q)$
- 6 **para cada** $v \in \text{adj}(u)$ **faça**
- 7 **se** $v \in Q$ e $v.d > u.d + c(uv)$
- 8 **então** $v.\pi \leftarrow u$ $v.d \leftarrow u.d + c(uv)$
- 9 π e d são a informação desejada.

Consumo de tempo do Dijkstra: $O(m \lg n)$

Consumo de tempo com Fibonacci heap: $O(m + n \lg n)$

Problema 2

Dados:

$G = (V, E)$: grafo **dirigido**

Função c que atribui um comprimento $c(e)$ para cada $e \in E$.

Função c que atribui um comprimento $c(e)$ para cada $e \in E$.

Problema 2: Dados G e c ,
encontrar a distância entre todo par de vértices de G .

Problema 2

Dados:

$G = (V, E)$: grafo **dirigido**

Função c que atribui um comprimento $c(e)$ para cada $e \in E$.

Função c que atribui um comprimento $c(e)$ para cada $e \in E$.

Problema 2: Dados G e c ,
encontrar a distância entre todo par de vértices de G .

Hipótese:

Não há circuito de comprimento negativo em G .

Problema 2

Dados:

$G = (V, E)$: grafo **dirigido**

Função c que atribui um comprimento $c(e)$ para cada $e \in E$.

Função c que atribui um comprimento $c(e)$ para cada $e \in E$.

Problema 2: Dados G e c ,
encontrar a distância entre todo par de vértices de G .

Hipótese:

Não há circuito de comprimento negativo em G .

Algoritmo de Floyd-Warshall: programação dinâmica

Propriedades

P : caminho mais curto de s a t

Subestrutura ótima:

Subcaminhos de P são caminhos mais curtos.

Propriedades

P : caminho mais curto de s a t

Subestrutura ótima:

Subcaminhos de P são caminhos mais curtos.

Lema: Dados G e c , seja $P = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$ um caminho mais curto em G de v_1 a v_k . Para todo $1 \leq i \leq j \leq k$, $P_{ij} := \langle v_i, \dots, v_j \rangle$ é um caminho mais curto de v_i a v_j .

Propriedades

P : caminho mais curto de s a t

Subestrutura ótima:

Subcaminhos de P são caminhos mais curtos.

Lema: Dados G e c , seja $P = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$ um caminho mais curto em G de v_1 a v_k . Para todo $1 \leq i \leq j \leq k$, $P_{ij} := \langle v_i, \dots, v_j \rangle$ é um caminho mais curto de v_i a v_j .

Vamos identificar $V = [n] = \{1, 2, \dots, n\}$.

Para $k \in [n]$, seja P um caminho mais curto de s a t cujos vértices internos estão todos em $[k]$.

Propriedades

P : caminho mais curto de s a t

Subestrutura ótima:

Subcaminhos de P são caminhos mais curtos.

Lema: Dados G e c , seja $P = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$ um caminho mais curto em G de v_1 a v_k . Para todo $1 \leq i \leq j \leq k$, $P_{ij} := \langle v_i, \dots, v_j \rangle$ é um caminho mais curto de v_i a v_j .

Vamos identificar $V = [n] = \{1, 2, \dots, n\}$.

Para $k \in [n]$, seja P um caminho mais curto de s a t cujos vértices internos estão todos em $[k]$.

Floyd-Warshall: Usa caminhos mínimos com vértices intermediários em $[k - 1]$ para obter caminhos mínimos com vértices intermediários em $[k]$.

Algoritmo de Floyd-Warshall

Usa caminhos mínimos
com vértices intermediários em $[k - 1]$ para obter
caminhos mínimos com vértices intermediários em $[k]$.

Algoritmo de Floyd-Warshall

Usa caminhos mínimos
com vértices intermediários em $[k - 1]$ para obter
caminhos mínimos com vértices intermediários em $[k]$.

Seja P um caminho mínimo de i a j em G
com vértices intermediários em $[k]$.

Algoritmo de Floyd-Warshall

Usa caminhos mínimos
com vértices intermediários em $[k - 1]$ para obter
caminhos mínimos com vértices intermediários em $[k]$.

Seja P um caminho mínimo de i a j em G
com vértices intermediários em $[k]$.

Se P não usa k como vértice intermediário,
então P é um caminho mínimo de i a j em G
com vértices intermediários em $[k - 1]$.

Algoritmo de Floyd-Warshall

Usa caminhos mínimos
com vértices intermediários em $[k - 1]$ para obter
caminhos mínimos com vértices intermediários em $[k]$.

Seja P um caminho mínimo de i a j em G
com vértices intermediários em $[k]$.

Se P não usa k como vértice intermediário,
então P é um caminho mínimo de i a j em G
com vértices intermediários em $[k - 1]$.

senão $P = P' \cdot P''$ onde

P' é um caminho mínimo de i a k em G
com vértices intermediários em $[k - 1]$ e

P'' é um caminho mínimo de k a j em G
com vértices intermediários em $[k - 1]$.

Recorrência

$D^k[i, j]$: comprimento de um caminho mínimo de i a j em G
com vértices intermediários em $[k]$.

Recorrência

$D^k[i,j]$: comprimento de um caminho mínimo de i a j em G com vértices intermediários em $[k]$.

$$D^k[i,j] = \begin{cases} c_{ij} & \text{se } k = 0 \\ \min\{D^{k-1}[i,j], D^{k-1}[i,k] + D^{k-1}[k,j]\} & \text{se } k \geq 1 \end{cases}$$

Recorrência

$D^k[i,j]$: comprimento de um caminho mínimo de i a j em G com vértices intermediários em $[k]$.

$$D^k[i,j] = \begin{cases} c_{ij} & \text{se } k = 0 \\ \min\{D^{k-1}[i,j], D^{k-1}[i,k] + D^{k-1}[k,j]\} & \text{se } k \geq 1 \end{cases}$$

A matrix D^n tem a resposta ao **Problema 2**.

Recorrência

$D^k[i,j]$: comprimento de um caminho mínimo de i a j em G com vértices intermediários em $[k]$.

$$D^k[i,j] = \begin{cases} c_{ij} & \text{se } k = 0 \\ \min\{D^{k-1}[i,j], D^{k-1}[i,k] + D^{k-1}[k,j]\} & \text{se } k \geq 1 \end{cases}$$

A matrix D^n tem a resposta ao **Problema 2**.

Algoritmo de Floyd-Warshall: calcula D^n pela recorrência.

Algoritmo de Floyd-Warshall

$D^k[i,j]$: comprimento de um caminho mínimo de i a j em G com vértices intermediários em $[k-1]$.

FLOYD-WARSHALL- (G, c)

1 $n \leftarrow |V(G)|$

2 $D^0 \leftarrow c$

3 **para** $k \leftarrow 1$ até n **faça**

4 **para** $i \leftarrow 1$ até n **faça**

5 **para** $j \leftarrow 1$ até n **faça**

6 $D^k[i,j] = \min\{D^{k-1}[i,j], D^{k-1}[i,k] + D^{k-1}[k,j]\}$

7 **devolva** D^n

Algoritmo de Floyd-Warshall

$D^k[i,j]$: comprimento de um caminho mínimo de i a j em G com vértices intermediários em $[k-1]$.

FLOYD-WARSHALL- (G, c)

```
1   $n \leftarrow |V(G)|$ 
2   $D^0 \leftarrow c$ 
3  para  $k \leftarrow 1$  até  $n$  faça
4      para  $i \leftarrow 1$  até  $n$  faça
5          para  $j \leftarrow 1$  até  $n$  faça
6               $D^k[i,j] = \min\{D^{k-1}[i,j], D^{k-1}[i,k] + D^{k-1}[k,j]\}$ 
7  devolva  $D^n$ 
```

Consumo de tempo: $\Theta(n^3)$

Algoritmo de Floyd-Warshall

$D^k[i, j]$: comprimento de um caminho mínimo de i a j em G com vértices intermediários em $[k - 1]$.

FLOYD-WARSHALL- (G, c)

```
1   $n \leftarrow |V(G)|$ 
2   $D^0 \leftarrow c$ 
3  para  $k \leftarrow 1$  até  $n$  faça
4      para  $i \leftarrow 1$  até  $n$  faça
5          para  $j \leftarrow 1$  até  $n$  faça
6               $D^k[i, j] = \min\{D^{k-1}[i, j], D^{k-1}[i, k] + D^{k-1}[k, j]\}$ 
7  devolva  $D^n$ 
```

Consumo de tempo: $\Theta(n^3)$

Dijkstra: $O(nm \lg n)$

$O(n(m + n \lg n))$ com Fibonacci heap.

Algoritmo de Floyd-Warshall

$D^k[i,j]$: comprimento de um caminho mínimo de i a j em G com vértices intermediários em $[k-1]$.

FLOYD-WARSHALL- (G, c)

```
1   $n \leftarrow |V(G)|$ 
2   $D^0 \leftarrow c$ 
3  para  $k \leftarrow 1$  até  $n$  faça
4      para  $i \leftarrow 1$  até  $n$  faça
5          para  $j \leftarrow 1$  até  $n$  faça
6               $D^k[i,j] = \min\{D^{k-1}[i,j], D^{k-1}[i,k] + D^{k-1}[k,j]\}$ 
7  devolva  $D^n$ 
```

E os caminhos mais curtos?

Algoritmo de Floyd-Warshall

$D^k[i, j]$: comprimento de um caminho mínimo de i a j em G com vértices intermediários em $[k - 1]$.

FLOYD-WARSHALL- (G, c)

```
1   $n \leftarrow |V(G)|$ 
2   $D^0 \leftarrow c$ 
3  para  $k \leftarrow 1$  até  $n$  faça
4      para  $i \leftarrow 1$  até  $n$  faça
5          para  $j \leftarrow 1$  até  $n$  faça
6               $D^k[i, j] = \min\{D^{k-1}[i, j], D^{k-1}[i, k] + D^{k-1}[k, j]\}$ 
7  devolva  $D^n$ 
```

E os caminhos mais curtos?

Guarde informação durante o processo acima para obter um caminho mais curto entre quaisquer dois vértices de G .

Simulação

$$D^0 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & \infty & -4 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & \infty & \infty \\ 2 & \infty & -5 & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Simulação

$$D^0 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & \infty & -4 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & \infty & \infty \\ 2 & \infty & -5 & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D^1 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & \infty & -4 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & \infty & \infty \\ 2 & 5 & -5 & 0 & -2 \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Simulação

$$D^1 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & \infty & -4 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & \infty & \infty \\ 2 & 5 & -5 & 0 & -2 \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Simulação

$$D^1 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & \infty & -4 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & \infty & \infty \\ 2 & 5 & -5 & 0 & -2 \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D^2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & 4 & -4 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & 5 & 11 \\ 2 & 5 & -5 & 0 & -2 \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Simulação

$$D^2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & 4 & -4 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & 5 & 11 \\ 2 & 5 & -5 & 0 & -2 \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Simulação

$$D^2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & 4 & -4 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & 5 & 11 \\ 2 & 5 & -5 & 0 & -2 \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D^3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & 4 & -4 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & 5 & 11 \\ 2 & -1 & -5 & 0 & -2 \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Simulação

$$D^3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & 4 & -4 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & 5 & 11 \\ 2 & -1 & -5 & 0 & -2 \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Simulação

$$D^3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & 4 & -4 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & 5 & 11 \\ 2 & -1 & -5 & 0 & -2 \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D^4 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 & 4 & -4 \\ 3 & 0 & -4 & 1 & -1 \\ 7 & 4 & 0 & 5 & 3 \\ 2 & -1 & -5 & 0 & -2 \\ 8 & 5 & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Simulação

$$D^4 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 & 4 & -4 \\ 3 & 0 & -4 & 1 & -1 \\ 7 & 4 & 0 & 5 & 3 \\ 2 & -1 & -5 & 0 & -2 \\ 8 & 5 & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Simulação

$$D^4 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 & 4 & -4 \\ 3 & 0 & -4 & 1 & -1 \\ 7 & 4 & 0 & 5 & 3 \\ 2 & -1 & -5 & 0 & -2 \\ 8 & 5 & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D^5 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 & 2 & -4 \\ 3 & 0 & -4 & 1 & -1 \\ 7 & 4 & 0 & 5 & 3 \\ 2 & -1 & -5 & 0 & -2 \\ 8 & 5 & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Simulação

Distâncias:

$$D^5 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 & 2 & -4 \\ 3 & 0 & -4 & 1 & -1 \\ 7 & 4 & 0 & 5 & 3 \\ 2 & -1 & -5 & 0 & -2 \\ 8 & 5 & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Como obter os caminhos?

Simulação

Distâncias:

$$D^5 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 & 2 & -4 \\ 3 & 0 & -4 & 1 & -1 \\ 7 & 4 & 0 & 5 & 3 \\ 2 & -1 & -5 & 0 & -2 \\ 8 & 5 & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Como obter os caminhos?

Exercício!