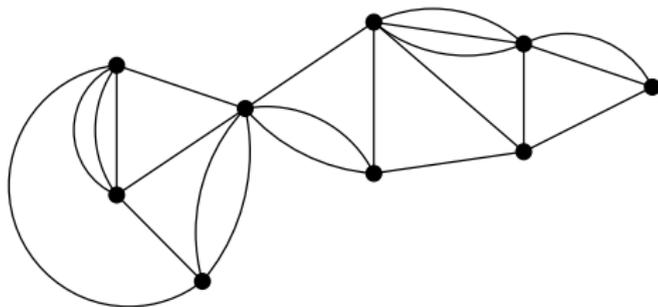


# Corte mínimo em grafos

KT Secs 13.2

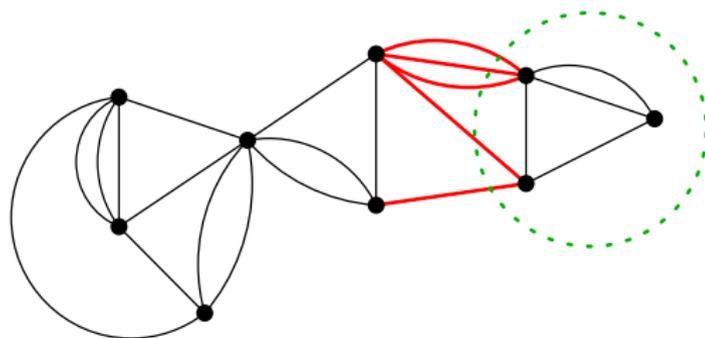
## Cortes em grafos

$G$ : grafo (não orientado) sem laços,  
possivelmente com arestas paralelas.



## Cortes em grafos

$G$ : grafo (não orientado) sem laços,  
possivelmente com arestas paralelas.



Conjunto de arestas  $C$  é um corte se existe um conjunto  $S \subseteq V_G$  não vazio tal que

$$C = \{e \in E_G : e \text{ tem uma ponta em } S \text{ e outra fora de } S\}.$$

Ou seja,  $C = \delta_G(S) = \delta_G(V_G \setminus S)$ .

## Corte mínimo

$G$ : grafo sem laços, possivelmente com arestas paralelas.

$C \subseteq E_G$  é um **corte** se existe  $S \subseteq V_G$  não vazio tal que

$$C = \{e \in E_G : e \text{ tem uma ponta em } S \text{ e outra fora de } S\}$$

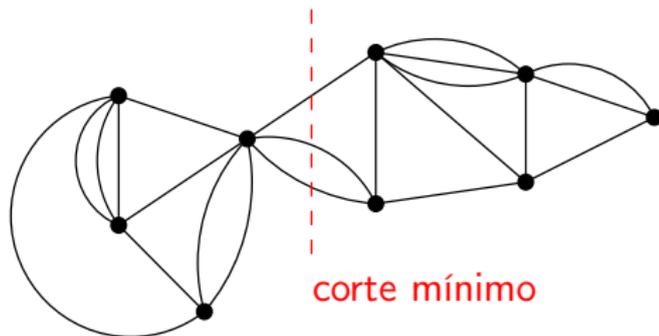
## Corte mínimo

$G$ : grafo sem laços, possivelmente com arestas paralelas.

$C \subseteq E_G$  é um **corte** se existe  $S \subseteq V_G$  não vazio tal que

$$C = \{e \in E_G : e \text{ tem uma ponta em } S \text{ e outra fora de } S\}$$

**Problema:** Dado  $G$ , encontrar um corte  $C$  com  $|C|$  mínimo.



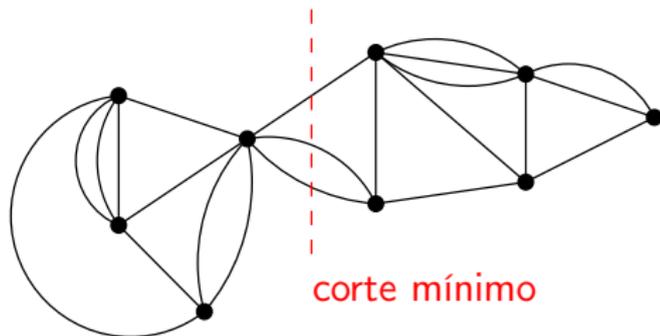
## Corte mínimo

$G$ : grafo sem laços, possivelmente com arestas paralelas.

$C \subseteq E_G$  é um **corte** se existe  $S \subseteq V_G$  não vazio tal que

$$C = \{e \in E_G : e \text{ tem uma ponta em } S \text{ e outra fora de } S\}$$

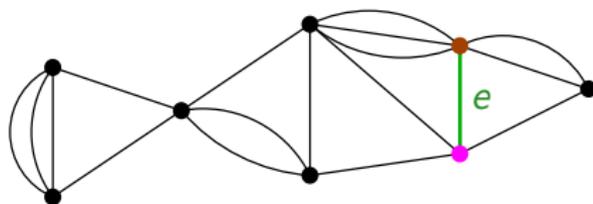
**Problema:** Dado  $G$ , encontrar um corte  $C$  com  $|C|$  mínimo.



**Esta aula:** algoritmo aleatorizado que devolve um corte mínimo com alta probabilidade.

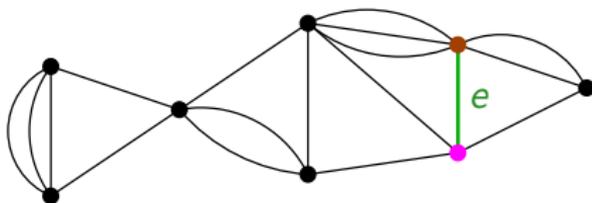
## Contração de arestas

Dado um grafo  $G$  e uma aresta  $e = uv$ ,  
a **contração**  $G|e$  é o grafo  $(V', E')$  onde...

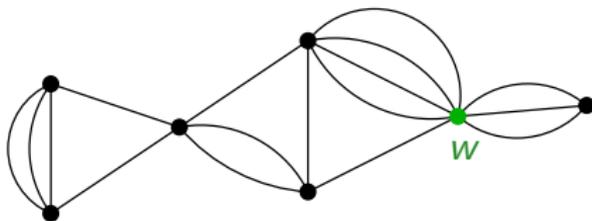


## Contração de arestas

Dado um grafo  $G$  e uma aresta  $e = uv$ ,  
a **contração**  $G|e$  é o grafo  $(V', E')$  onde...

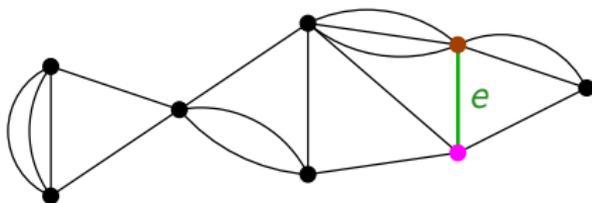


$V' = V \setminus \{u, v\} \cup \{w\}$  e  $E' = E_G \setminus \{f : \text{pontas}(f) = \{u, v\}\}$   
e cada aresta  $f$  em  $E'$  tem as mesmas pontas que  $f$  em  $E_G$  exceto por  
 $u$  e  $v$ , que são substituídos por  $w$ .

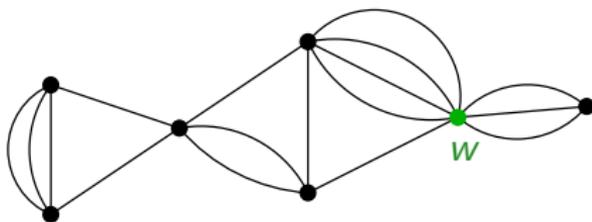


## Contração de arestas

Dado um grafo  $G$  e uma aresta  $e = uv$ , a **contração**  $G|e$  é o grafo  $(V', E')$  onde...



$V' = V \setminus \{u, v\} \cup \{w\}$  e  $E' = E_G \setminus \{f : \text{pontas}(f) = \{u, v\}\}$   
e cada aresta  $f$  em  $E'$  tem as mesmas pontas que  $f$  em  $E_G$  exceto por  $u$  e  $v$ , que são substituídos por  $w$ .



**Proposição:** Se  $C$  é corte de  $G|e$ , então  $C$  é corte de  $G$ .

# Algoritmo de Karger

**Problema:** Dado  $G$ , encontrar um corte  $C$  com  $|C|$  mínimo.

# Algoritmo de Karger

**Problema:** Dado  $G$ , encontrar um corte  $C$  com  $|C|$  mínimo.

**KARGER** ( $G$ )

- 1 enquanto  $|V_G| > 2$  faça
- 2      $e \leftarrow \text{RANDOM-E}(E_G)$
- 3      $G \leftarrow G|e$
- 4 devolva  $E_G$

# Algoritmo de Karger

**Problema:** Dado  $G$ , encontrar um corte  $C$  com  $|C|$  mínimo.

**KARGER** ( $G$ )

- 1 enquanto  $|V_G| > 2$  faça
- 2      $e \leftarrow \text{RANDOM-E}(E_G)$
- 3      $G \leftarrow G|e$
- 4 devolva  $E_G$

Pela proposição, o algoritmo devolve de fato um corte de  $G$ .

# Algoritmo de Karger

**Problema:** Dado  $G$ , encontrar um corte  $C$  com  $|C|$  mínimo.

**KARGER** ( $G$ )

- 1 enquanto  $|V_G| > 2$  faça
- 2      $e \leftarrow \text{RANDOM-E}(E_G)$
- 3      $G \leftarrow G|e$
- 4 devolva  $E_G$

Pela proposição, o algoritmo devolve de fato um corte de  $G$ .

Claramente ele consome tempo polinomial.

(O número de iteração é  $|V_G| - 2$ .)

# Análise do algoritmo

Seja  $C_K$  o corte devolvido por **KARGER** ( $G$ ).

Vamos mostrar que

$$\Pr\{C_K \text{ não é um corte mínimo}\} < q(n) < 1,$$

onde  $n = |V_G|$ .

# Análise do algoritmo

Seja  $C_K$  o corte devolvido por **KARGER** ( $G$ ).

Vamos mostrar que

$$\Pr\{C_K \text{ não é um corte mínimo}\} < q(n) < 1,$$

onde  $n = |V_G|$ .

Executa-se o algoritmo  $r$  vezes  
e devolve-se o menor corte produzido.

A chance do corte devolvido não ser mínimo será  $< q(n)^r$ .

# Análise do algoritmo

Seja  $C$  um corte mínimo de  $G$ .

# Análise do algoritmo

Seja  $C$  um corte mínimo de  $G$ .

O corte  $C$  não é a resposta do algoritmo sse alguma aresta de  $C$  foi contraída.

# Análise do algoritmo

Seja  $C$  um corte mínimo de  $G$ .

O corte  $C$  não é a resposta do algoritmo sse alguma aresta de  $C$  foi contraída.

Seja  $E_i$  o evento:

uma aresta de  $C$  não é sorteada na iteração  $i$ .

# Análise do algoritmo

Seja  $C$  um corte mínimo de  $G$ .

O corte  $C$  não é a resposta do algoritmo sse alguma aresta de  $C$  foi contraída.

Seja  $E_i$  o evento:

uma aresta de  $C$  não é sorteada na iteração  $i$ .

Vamos delimitar **inferiormente**  $\Pr\{E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_{n-2}\}$ .

# Análise do algoritmo

Seja  $C$  um corte mínimo de  $G$ .

O corte  $C$  não é a resposta do algoritmo sse alguma aresta de  $C$  foi contraída.

Seja  $E_i$  o evento:

uma aresta de  $C$  não é sorteada na iteração  $i$ .

Vamos delimitar **inferiormente**  $\Pr\{E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_{n-2}\}$ .

Tal probabilidade é igual a

$$\Pr\{E_1\} \cdot \Pr\{E_2|E_1\} \cdot \dots \cdot \Pr\{E_{n-2}|E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_{n-3}\}.$$

# Análise do algoritmo

Seja  $C$  um corte mínimo de  $G$ .

O corte  $C$  não é a resposta do algoritmo sse alguma aresta de  $C$  foi contraída.

Seja  $E_i$  o evento:

uma aresta de  $C$  não é sorteada na iteração  $i$ .

Vamos delimitar inferiormente  $\Pr\{E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_{n-2}\}$ .

Tal probabilidade é igual a

$$\Pr\{E_1\} \cdot \Pr\{E_2|E_1\} \cdot \dots \cdot \Pr\{E_{n-2}|E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_{n-3}\}.$$

Para começar, como delimitar  $\Pr\{E_1\}$ ?

# Análise do algoritmo

$C$ : um corte mínimo de  $G$  e  $k = |C|$ .

$E_i$ : uma aresta de  $C$  não é sorteada na iteração  $i$ .

Como delimitar  $\Pr\{E_1\}$ ?

# Análise do algoritmo

$C$ : um corte mínimo de  $G$  e  $k = |C|$ .

$E_i$ : uma aresta de  $C$  não é sorteada na iteração  $i$ .

Como delimitar  $\Pr\{E_1\}$ ?

Como  $C$  é mínimo,  $\delta_G(v) \geq k$  para todo vértice  $v$ .

Logo  $|E_G| \geq kn/2$ .

# Análise do algoritmo

$C$ : um corte mínimo de  $G$  e  $k = |C|$ .

$E_i$ : uma aresta de  $C$  não é sorteada na iteração  $i$ .

Como delimitar  $\Pr\{E_1\}$ ?

Como  $C$  é mínimo,  $\delta_G(v) \geq k$  para todo vértice  $v$ .

Logo  $|E_G| \geq kn/2$ .

Portanto  $\Pr\{\bar{E}_1\} \leq \frac{k}{\frac{kn}{2}} = \frac{2}{n}$ .

# Análise do algoritmo

$C$ : um corte mínimo de  $G$  e  $k = |C|$ .

$E_i$ : uma aresta de  $C$  não é sorteada na iteração  $i$ .

Como delimitar  $\Pr\{E_1\}$ ?

Como  $C$  é mínimo,  $\delta_G(v) \geq k$  para todo vértice  $v$ .

Logo  $|E_G| \geq kn/2$ .

Portanto  $\Pr\{\bar{E}_1\} \leq \frac{k}{\frac{kn}{2}} = \frac{2}{n}$ .

Ou seja,  $\Pr\{E_1\} \geq 1 - \frac{2}{n}$ .

# Análise do algoritmo

$C$ : um corte mínimo de  $G$  e  $k = |C|$ .

$E_i$ : uma aresta de  $C$  não é sorteada na iteração  $i$ .

Como delimitar  $\Pr\{E_1\}$ ?

Como  $C$  é mínimo,  $\delta_G(v) \geq k$  para todo vértice  $v$ .

Logo  $|E_G| \geq kn/2$ .

Portanto  $\Pr\{\bar{E}_1\} \leq \frac{k}{\frac{kn}{2}} = \frac{2}{n}$ .

Ou seja,  $\Pr\{E_1\} \geq 1 - \frac{2}{n}$ .

Como delimitar  $\Pr\{E_{i+1} | E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_i\}$ ?

## Análise do algoritmo

$C$ : um corte mínimo de  $G$  e  $k = |C|$ .

$E_i$ : uma aresta de  $C$  não é sorteada na iteração  $i$ .

Vimos que  $\Pr\{E_1\} \geq 1 - \frac{2}{n}$ .

Como delimitar  $\Pr\{E_{i+1} | E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_i\}$ ?

## Análise do algoritmo

$C$ : um corte mínimo de  $G$  e  $k = |C|$ .

$E_i$ : uma aresta de  $C$  não é sorteada na iteração  $i$ .

Vimos que  $\Pr\{E_1\} \geq 1 - \frac{2}{n}$ .

Como delimitar  $\Pr\{E_{i+1} | E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_i\}$ ?

No começo da iteração  $i + 1$ , temos que  $|E_G| \geq k(n - i)/2$ .

# Análise do algoritmo

$C$ : um corte mínimo de  $G$  e  $k = |C|$ .

$E_i$ : uma aresta de  $C$  não é sorteada na iteração  $i$ .

Vimos que  $\Pr\{E_1\} \geq 1 - \frac{2}{n}$ .

Como delimitar  $\Pr\{E_{i+1} | E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_i\}$ ?

No começo da iteração  $i + 1$ , temos que  $|E_G| \geq k(n - i)/2$ .

Logo  $\Pr\{\bar{E}_{i+1} | E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_i\} \leq \frac{k}{\frac{k(n-i)}{2}} = \frac{2}{n-i}$ .

## Análise do algoritmo

$C$ : um corte mínimo de  $G$  e  $k = |C|$ .

$E_i$ : uma aresta de  $C$  não é sorteada na iteração  $i$ .

Vimos que  $\Pr\{E_1\} \geq 1 - \frac{2}{n}$ .

Como delimitar  $\Pr\{E_{i+1} | E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_i\}$ ?

No começo da iteração  $i + 1$ , temos que  $|E_G| \geq k(n - i)/2$ .

Logo  $\Pr\{\bar{E}_{i+1} | E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_i\} \leq \frac{k}{\frac{k(n-i)}{2}} = \frac{2}{n-i}$ .

Ou seja,  $\Pr\{E_{i+1} | E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_i\} \geq 1 - \frac{2}{n-i}$ .

## Análise do algoritmo

Seja  $C_K$  o corte devolvido por **KARGER** ( $G$ ).

$C$ : um corte mínimo de  $G$ .

Queremos delimitar **inferiormente**  $\Pr\{C_K = C\}$ .

## Análise do algoritmo

Seja  $C_K$  o corte devolvido por **KARGER** ( $G$ ).

$C$ : um corte mínimo de  $G$ .

Queremos delimitar inferiormente  $\Pr\{C_K = C\}$ .

Ou seja, delimitar  $\Pr\{E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_{n-2}\}$ .

Já sabemos que  $\Pr\{E_{i+1} | E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_i\} \geq 1 - \frac{2}{n-i}$ .

## Análise do algoritmo

Seja  $C_K$  o corte devolvido por **KARGER** ( $G$ ).

$C$ : um corte mínimo de  $G$ .

Queremos delimitar inferiormente  $\Pr\{C_K = C\}$ .

Ou seja, delimitar  $\Pr\{E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_{n-2}\}$ .

Já sabemos que  $\Pr\{E_{i+1} | E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_i\} \geq 1 - \frac{2}{n-i}$ .

Então

$$\Pr\{C_K = C\} \geq \prod_{i=0}^{n-3} \left(1 - \frac{2}{n-i}\right)$$

## Análise do algoritmo

Seja  $C_K$  o corte devolvido por **KARGER** ( $G$ ).

$C$ : um corte mínimo de  $G$ .

Queremos delimitar inferiormente  $\Pr\{C_K = C\}$ .

Ou seja, delimitar  $\Pr\{E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_{n-2}\}$ .

Já sabemos que  $\Pr\{E_{i+1} | E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_i\} \geq 1 - \frac{2}{n-i}$ .

Então

$$\begin{aligned}\Pr\{C_K = C\} &\geq \prod_{i=0}^{n-3} \left(1 - \frac{2}{n-i}\right) \\ &= \left(1 - \frac{2}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n-1}\right) \left(1 - \frac{2}{n-2}\right) \dots \left(1 - \frac{2}{4}\right) \left(1 - \frac{2}{3}\right)\end{aligned}$$

## Análise do algoritmo

Seja  $C_K$  o corte devolvido por **KARGER** ( $G$ ).

$C$ : um corte mínimo de  $G$ .

Queremos delimitar inferiormente  $\Pr\{C_K = C\}$ .

Ou seja, delimitar  $\Pr\{E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_{n-2}\}$ .

Já sabemos que  $\Pr\{E_{i+1} | E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_i\} \geq 1 - \frac{2}{n-i}$ .

Então

$$\begin{aligned}\Pr\{C_K = C\} &\geq \prod_{i=0}^{n-3} \left(1 - \frac{2}{n-i}\right) \\ &= \left(1 - \frac{2}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n-1}\right) \left(1 - \frac{2}{n-2}\right) \dots \left(1 - \frac{2}{4}\right) \left(1 - \frac{2}{3}\right) \\ &= \frac{n-2}{n} \cdot \frac{n-3}{n-1} \cdot \frac{n-4}{n-2} \dots \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3}\end{aligned}$$

## Análise do algoritmo

Seja  $C_K$  o corte devolvido por **KARGER** ( $G$ ).

$C$ : um corte mínimo de  $G$ .

Queremos delimitar **inferiormente**  $\Pr\{C_K = C\}$ .

Ou seja, delimitar  $\Pr\{E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_{n-2}\}$ .

Já sabemos que  $\Pr\{E_{i+1} | E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_i\} \geq 1 - \frac{2}{n-i}$ .

Então

$$\begin{aligned}\Pr\{C_K = C\} &\geq \prod_{i=0}^{n-3} \left(1 - \frac{2}{n-i}\right) \\ &= \left(1 - \frac{2}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n-1}\right) \left(1 - \frac{2}{n-2}\right) \dots \left(1 - \frac{2}{4}\right) \left(1 - \frac{2}{3}\right) \\ &= \frac{n-2}{n} \cdot \frac{n-3}{n-1} \cdot \frac{n-4}{n-2} \dots \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{n(n-1)}.\end{aligned}$$

## Conclusão

$$\text{Logo } \Pr\{C_k \neq C\} \leq 1 - \frac{2}{n(n-1)} = q(n)$$

## Conclusão

Logo  $\Pr\{C_K \neq C\} \leq 1 - \frac{2}{n(n-1)} = q(n)$   
e  $\Pr\{C_K \text{ não é um corte mínimo}\}$

## Conclusão

Logo  $\Pr\{C_K \neq C\} \leq 1 - \frac{2}{n(n-1)} = q(n)$   
e  $\Pr\{C_K \text{ não é um corte mínimo}\} \leq q(n)$ .

## Conclusão

Logo  $\Pr\{C_K \neq C\} \leq 1 - \frac{2}{n(n-1)} = q(n)$

e  $\Pr\{C_K \text{ não é um corte mínimo}\} \leq q(n)$ .

Se executarmos o algoritmo  $r = c \frac{n(n-1)}{2} \ln n$  vezes, então

## Conclusão

$$\text{Logo } \Pr\{C_K \neq C\} \leq 1 - \frac{2}{n(n-1)} = q(n)$$

$$\text{e } \Pr\{C_K \text{ não é um corte mínimo}\} \leq q(n).$$

Se executarmos o algoritmo  $r = c \frac{n(n-1)}{2} \ln n$  vezes, então

$$\begin{aligned} \Pr\{C_K^* \text{ não é um corte mínimo}\} &\leq q(n)^r \\ &= \left(1 - \frac{2}{n(n-1)}\right)^{c \frac{n(n-1)}{2} \ln n} \\ &< \left(\frac{1}{e}\right)^{c \ln n} = \frac{1}{n^c}. \end{aligned}$$

## Conclusão

$$\text{Logo } \Pr\{C_K \neq C\} \leq 1 - \frac{2}{n(n-1)} = q(n)$$
$$\text{e } \Pr\{C_K \text{ não é um corte mínimo}\} \leq q(n).$$

Se executarmos o algoritmo  $r = c \frac{n(n-1)}{2} \ln n$  vezes, então

$$\begin{aligned} \Pr\{C_K^* \text{ não é um corte mínimo}\} &\leq q(n)^r \\ &= \left(1 - \frac{2}{n(n-1)}\right)^{c \frac{n(n-1)}{2} \ln n} \\ &< \left(\frac{1}{e}\right)^{c \ln n} = \frac{1}{n^c}. \end{aligned}$$

Erra com probabilidade exponencialmente pequena.

## Conclusão

Logo  $\Pr\{C_K \neq C\} \leq 1 - \frac{2}{n(n-1)} = q(n)$   
e  $\Pr\{C_K \text{ não é um corte mínimo}\} \leq q(n)$ .

Se executarmos o algoritmo  $r = c \frac{n(n-1)}{2} \ln n$  vezes, então

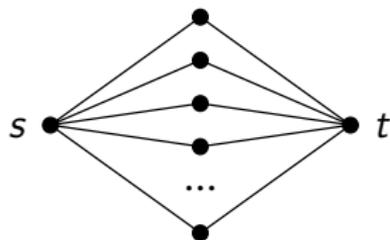
$$\begin{aligned}\Pr\{C_K^* \text{ não é um corte mínimo}\} &\leq q(n)^r \\ &= \left(1 - \frac{2}{n(n-1)}\right)^{c \frac{n(n-1)}{2} \ln n} \\ &< \left(\frac{1}{e}\right)^{c \ln n} = \frac{1}{n^c}.\end{aligned}$$

Erra com probabilidade exponencialmente pequena.

Como  $r$  é polinomial em  $n$  e em  $c$ , o algoritmo é polinomial.

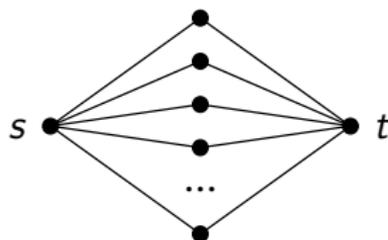
## Uma pergunta...

Quantos  $st$ -cortes mínimos diferentes podem existir em  $G$ ?



## Uma pergunta...

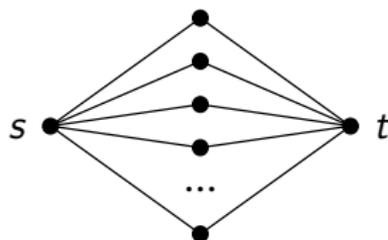
Quantos  $st$ -cortes mínimos diferentes podem existir em  $G$ ?



Um número exponencial em  $n$ ...

## Uma pergunta...

Quantos  $st$ -cortes mínimos diferentes podem existir em  $G$ ?

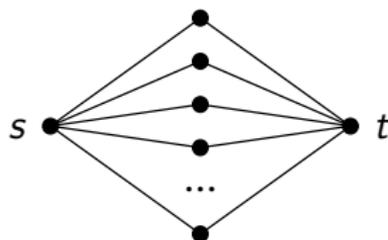


Um número exponencial em  $n$ ...

Quantos cortes mínimos diferentes podem existir?

## Uma pergunta...

Quantos  $st$ -cortes mínimos diferentes podem existir em  $G$ ?



Um número exponencial em  $n$ ...

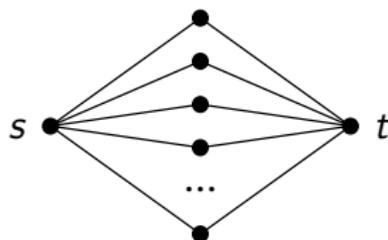
Quantos cortes mínimos diferentes podem existir?

Como  $\Pr\{C_K = C\} \geq \frac{2}{n(n-1)} = 1/\binom{n}{2}$ ,

há no máximo  $\binom{n}{2}$  cortes mínimos em  $G$ .

## Uma pergunta...

Quantos  $st$ -cortes mínimos diferentes podem existir em  $G$ ?



Um número exponencial em  $n$ ...

Quantos cortes mínimos diferentes podem existir?

Como  $\Pr\{C_K = C\} \geq \frac{2}{n(n-1)} = 1/\binom{n}{2}$ ,

há no máximo  $\binom{n}{2}$  cortes mínimos em  $G$ .

Se  $G$  for por exemplo um circuito com  $n$  vértices...