

Tópicos de Análise de Algoritmos

Análise amortizada

Cap 17 do CLRS

Análise amortizada

Serve para analisar uma sequência de operações ou iterações onde o pior caso individual não reflete o pior caso da sequência.

Análise amortizada

Serve para analisar uma sequência de operações ou iterações onde o pior caso individual não reflete o pior caso da sequência.

Em outras palavras, serve para melhorar análises de pior caso que baseiem-se diretamente no pior caso de uma operação/iteração e que deem uma delimitação frouxa para o tempo de pior caso da sequência.

Análise amortizada

Serve para analisar uma sequência de operações ou iterações onde o pior caso individual não reflete o pior caso da sequência.

Em outras palavras, serve para melhorar análises de pior caso que baseiem-se diretamente no pior caso de uma operação/iteração e que deem uma delimitação frouxa para o tempo de pior caso da sequência.

Métodos:

- ▶ agregado
- ▶ por créditos
- ▶ potencial

Odômetro binário

Considere um **contador binário**, inicialmente zerado, representado em um vetor $A[0..n-1]$, onde cada $A[i]$ vale 0 ou 1.

Operação: incrementa.

Odômetro binário

Considere um **contador binário**, inicialmente zerado, representado em um vetor $A[0..n-1]$, onde cada $A[i]$ vale 0 ou 1.

Operação: incrementa.

Incrementa (A, n)

```
1    $i \leftarrow 0$ 
2   enquanto  $i < n$  e  $A[i] = 1$  faça
3        $A[i] \leftarrow 0$ 
4        $i \leftarrow i + 1$ 
5   se  $i < n$ 
6       então  $A[i] \leftarrow 1$ 
```

Odômetro binário

Considere um **contador binário**, inicialmente zerado, representado em um vetor $A[0..n-1]$, onde cada $A[i]$ vale 0 ou 1.

Operação: incrementa.

Incrementa (A, n)

```
1    $i \leftarrow 0$ 
2   enquanto  $i < n$  e  $A[i] = 1$  faça
3        $A[i] \leftarrow 0$ 
4        $i \leftarrow i + 1$ 
5   se  $i < n$ 
6       então  $A[i] \leftarrow 1$ 
```

Consumo de tempo no pior caso: $\Theta(n)$

Odômetro binário

Considere um **contador binário**, inicialmente zerado, representado em um vetor $A[0..n-1]$, onde cada $A[i]$ vale 0 ou 1.

Operação: Incrementa.

Consumo de tempo no pior caso: $\Theta(n)$.

O odômetro dá uma **volta completa** a cada 2^n execuções do **Incrementa**.

Odômetro binário

Considere um **contador binário**, inicialmente zerado, representado em um vetor $A[0..n-1]$, onde cada $A[i]$ vale 0 ou 1.

Operação: Incrementa.

Consumo de tempo no pior caso: $\Theta(n)$.

O odômetro dá uma **volta completa** a cada 2^n execuções do **Incrementa**.

Quanto tempo leva para o odômetro dar uma volta completa?

Odômetro binário

Considere um **contador binário**, inicialmente zerado, representado em um vetor $A[0..n-1]$, onde cada $A[i]$ vale 0 ou 1.

Operação: Incrementa.

Consumo de tempo no pior caso: $\Theta(n)$.

O odômetro dá uma **volta completa** a cada 2^n execuções do **Incrementa**.

Quanto tempo leva para o odômetro dar uma volta completa?

Leva $O(n2^n)$.

Será que é $\Theta(n2^n)$?

Odômetro binário

i	3	2	1	0
0	0	0	0	0
1	0	0	0	1
2	0	0	1	0
3	0	0	1	1
4	0	1	0	0
5	0	1	0	1
6	0	1	1	0
7	0	1	1	1
8	1	0	0	0
9	1	0	0	1
10	1	0	1	0
11	1	0	1	1
12	1	1	0	0
13	1	1	0	1
14	1	1	1	0
15	1	1	1	1
16	0	0	0	0

Odômetro binário

i	3	2	1	0
0	0	0	0	0
1	0	0	0	1
2	0	0	1	0
3	0	0	1	1
4	0	1	0	0
5	0	1	0	1
6	0	1	1	0
7	0	1	1	1
8	1	0	0	0
9	1	0	0	1
10	1	0	1	0
11	1	0	1	1
12	1	1	0	0
13	1	1	0	1
14	1	1	1	0
15	1	1	1	1
16	0	0	0	0

Método agregado

Custo da volta completa é proporcional
ao número de vezes que os bits são alterados.

Método agregado

Custo da volta completa é proporcional
ao número de vezes que os bits são alterados.

bit 0 muda 2^n vezes

bit 1 muda 2^{n-1} vezes

bit 2 muda 2^{n-2} vezes

...

bit $n - 2$ muda 4 vezes

bit $n - 1$ muda 2 vezes

Método agregado

Custo da volta completa é proporcional ao número de vezes que os bits são alterados.

bit 0 muda 2^n vezes

bit 1 muda 2^{n-1} vezes

bit 2 muda 2^{n-2} vezes

...

bit $n - 2$ muda 4 vezes

bit $n - 1$ muda 2 vezes

Total de alterações de bits: $\sum_{i=1}^n 2^i < 2 \cdot 2^n$.

Método agregado

Custo da volta completa é proporcional ao número de vezes que os bits são alterados.

bit 0 muda 2^n vezes

bit 1 muda 2^{n-1} vezes

bit 2 muda 2^{n-2} vezes

...

bit $n - 2$ muda 4 vezes

bit $n - 1$ muda 2 vezes

Total de alterações de bits: $\sum_{i=1}^n 2^i < 2 \cdot 2^n$.

Custo da volta completa: $\Theta(2^n)$.

Custo amortizado por Incrementa: $\Theta(1)$.

Análise por créditos

Atribuimos um número fixo de créditos por operação
Incrementa de modo a pagar por toda alteração de bit.

Análise por créditos

Atribuimos um número fixo de créditos por operação **Incrementa** de modo a pagar por toda alteração de bit.

Objetivo: atribuir o **menor número possível de créditos** que seja ainda suficiente para pagar por todas as alterações.

Análise por créditos

Atribuimos um número fixo de créditos por operação
Incrementa de modo a pagar por toda alteração de bit.

Objetivo: atribuir o **menor número possível de créditos**
que seja ainda suficiente para pagar por todas as alterações.

Relembre...

Incrementa (A, n)

```
1   $i \leftarrow 0$ 
2  enquanto  $i < n$  e  $A[i] = 1$  faça
3       $A[i] \leftarrow 0$ 
5       $i \leftarrow i + 1$ 
6  se  $i < n$ 
7      então  $A[i] \leftarrow 1$ 
```

Análise por créditos

Atribuimos **2 créditos** por **Incrementa**.

Incrementa (A, n)

```
1   $i \leftarrow 0$ 
2  enquanto  $i < n$  e  $A[i] = 1$  faça
3       $A[i] \leftarrow 0$ 
4       $i \leftarrow i + 1$ 
5  se  $i < n$ 
6      então  $A[i] \leftarrow 1$ 
```

Um é usado para pagar pela alteração da linha 6.

Análise por créditos

Atribuimos **2 créditos** por **Incrementa**.

Incrementa (A, n)

```
1   $i \leftarrow 0$   
2  enquanto  $i < n$  e  $A[i] = 1$  faça  
3       $A[i] \leftarrow 0$   
4       $i \leftarrow i + 1$   
5  se  $i < n$   
6      então  $A[i] \leftarrow 1$ 
```

Um é usado para pagar pela alteração da linha 6.

O outro fica armazenado sobre o bit alterado na linha 6.

Análise por créditos

Atribuimos 2 créditos por `Incrementa`.

`Incrementa` (A, n)

```
1    $i \leftarrow 0$ 
2   enquanto  $i < n$  e  $A[i] = 1$  faça
3        $A[i] \leftarrow 0$ 
4        $i \leftarrow i + 1$ 
5   se  $i < n$ 
6       então  $A[i] \leftarrow 1$ 
```

Um é usado para pagar pela alteração da linha 6.

O outro fica armazenado sobre o bit alterado na linha 6.

Há um crédito armazenado sobre cada bit que vale 1.

Alterações da linha 3 são pagas por créditos armazenados por chamadas anteriores do `Incrementa`.

Análise por créditos

Atribuimos 2 créditos por Incrementa.

Incrementa (A, n)

```
1    $i \leftarrow 0$ 
2   enquanto  $i < n$  e  $A[i] = 1$  faça
3        $A[i] \leftarrow 0$ 
4        $i \leftarrow i + 1$ 
5   se  $i < n$ 
6       então  $A[i] \leftarrow 1$ 
```

Um é usado para pagar pela alteração da linha 6.

O outro fica armazenado sobre o bit alterado na linha 6.

O número de créditos armazenados em cada instante é o número de bits que valem 1, logo é sempre não negativo.

Custo amortizado por Incrementa: 2

Método do potencial

Seja $\phi(A)$ o número de bits que valem 1 em $A[0..n-1]$.

Método do potencial

Seja $\phi(A)$ o número de bits que valem 1 em $A[0..n-1]$.

Seja A_i o estado do contador A após o i -ésimo **Incrementa**.

Note que $\phi(A_0) = 0$ e $\phi(A_i) \geq 0$.

Método do potencial

Seja $\phi(A)$ o número de bits que valem 1 em $A[0..n-1]$.

Seja A_i o estado do contador A após o i -ésimo Incrementa.

Note que $\phi(A_0) = 0$ e $\phi(A_i) \geq 0$.

Seja c_i o número de bits alterados no i -ésimo Incrementa.

Note que $c_i \leq 1 + t_i$

onde t_i é o número de bits 1 consecutivos no final do contador A_{i-1} .

Método do potencial

Seja $\phi(A)$ o número de bits que valem 1 em $A[0..n-1]$.

Seja A_i o estado do contador A após o i -ésimo **Incrementa**.

Note que $\phi(A_0) = 0$ e $\phi(A_i) \geq 0$.

Seja c_i o número de bits alterados no i -ésimo **Incrementa**.

Note que $c_i \leq 1 + t_i$

onde t_i é o número de bits 1 consecutivos no final do contador A_{i-1} .

Note que $\phi(A_i) - \phi(A_{i-1}) \leq 1 - t_i$.

Método do potencial

Seja $\phi(A)$ o número de bits que valem 1 em $A[0..n-1]$.

Seja A_i o estado do contador A após o i -ésimo Incrementa.

Note que $\phi(A_0) = 0$ e $\phi(A_i) \geq 0$.

Seja c_i o número de bits alterados no i -ésimo Incrementa.

Note que $c_i \leq 1 + t_i$

onde t_i é o número de bits 1 consecutivos no final do contador A_{i-1} .

Note que $\phi(A_i) - \phi(A_{i-1}) \leq 1 - t_i$.

Seja $\hat{c}_i = c_i + \phi(A_i) - \phi(A_{i-1}) \leq (1 + t_i) + (1 - t_i) = 2$.

Método do potencial

Seja $\phi(A)$ o número de bits que valem 1 em $A[0..n-1]$.

Seja A_i o estado do contador A após o i -ésimo **Incrementa**.

Temos que $\phi(A_0) = 0$ e $\phi(A_i) \geq 0$.

Seja c_i o número de bits alterados no i -ésimo **Incrementa** e t_i é o número de bits 1 consecutivos no final do contador A .

Temos que $c_i \leq 1 + t_i$.

Seja $\hat{c}_i = c_i + \phi(A_i) - \phi(A_{i-1}) \leq (1 + t_i) + (1 - t_i) = 2$.

Método do potencial

Seja $\phi(A)$ o número de bits que valem 1 em $A[0..n-1]$.

Seja A_i o estado do contador A após o i -ésimo **Incrementa**.

Temos que $\phi(A_0) = 0$ e $\phi(A_i) \geq 0$.

Seja c_i o número de bits alterados no i -ésimo **Incrementa** e t_i é o número de bits 1 consecutivos no final do contador A .

Temos que $c_i \leq 1 + t_i$.

Seja $\hat{c}_i = c_i + \phi(A_i) - \phi(A_{i-1}) \leq (1 + t_i) + (1 - t_i) = 2$.

Então o custo da volta completa é

$$c = \sum_{i=1}^{2^n} c_i$$

Método do potencial

Seja $\phi(A)$ o número de bits que valem 1 em $A[0..n-1]$.

Seja A_i o estado do contador A após o i -ésimo **Incrementa**.

Temos que $\phi(A_0) = 0$ e $\phi(A_i) \geq 0$.

Seja c_i o número de bits alterados no i -ésimo **Incrementa** e t_i é o número de bits 1 consecutivos no final do contador A .

Temos que $c_i \leq 1 + t_i$.

Seja $\hat{c}_i = c_i + \phi(A_i) - \phi(A_{i-1}) \leq (1 + t_i) + (1 - t_i) = 2$.

Então o custo da volta completa é

$$c = \sum_{i=1}^{2^n} c_i = \sum_{i=1}^{2^n} \hat{c}_i + \phi(A_0) - \phi(A_{2^n})$$

Método do potencial

Seja $\phi(A)$ o número de bits que valem 1 em $A[0..n-1]$.

Seja A_i o estado do contador A após o i -ésimo **Incrementa**.

Temos que $\phi(A_0) = 0$ e $\phi(A_i) \geq 0$.

Seja c_i o número de bits alterados no i -ésimo **Incrementa** e t_i é o número de bits 1 consecutivos no final do contador A .

Temos que $c_i \leq 1 + t_i$.

Seja $\hat{c}_i = c_i + \phi(A_i) - \phi(A_{i-1}) \leq (1 + t_i) + (1 - t_i) = 2$.

Então o custo da volta completa é

$$c = \sum_{i=1}^{2^n} c_i = \sum_{i=1}^{2^n} \hat{c}_i + \phi(A_0) - \phi(A_{2^n}) \leq \sum_{i=1}^{2^n} \hat{c}_i \leq 2 \cdot 2^n.$$

Método do potencial

Seja $\phi(A)$ o número de bits que valem 1 em $A[0..n-1]$.

Seja A_i o estado do contador A após o i -ésimo **Incrementa**.

Temos que $\phi(A_0) = 0$ e $\phi(A_i) \geq 0$.

Seja c_i o número de bits alterados no i -ésimo **Incrementa** e t_i é o número de bits 1 consecutivos no final do contador A .

Temos que $c_i \leq 1 + t_i$.

Seja $\hat{c}_i = c_i + \phi(A_i) - \phi(A_{i-1}) \leq (1 + t_i) + (1 - t_i) = 2$.

Então o custo da volta completa é

$$c = \sum_{i=1}^{2^n} c_i = \sum_{i=1}^{2^n} \hat{c}_i + \phi(A_0) - \phi(A_{2^n}) \leq \sum_{i=1}^{2^n} \hat{c}_i \leq 2 \cdot 2^n.$$

Custo amortizado por **Incrementa**: 2

▷ (valor do \hat{c}_i)

Outro exemplo: pilha

Operações básicas: empilha, desempilha.

Outro exemplo: pilha

Operações básicas: empilha, desempilha.

OP: operação única de acesso

Outro exemplo: pilha

Operações básicas: empilha, desempilha.

OP: operação única de acesso

OP (n)

- 1 ▷ exige que a pilha tenha $\geq n$ elementos
- 2 desempilhe n itens da pilha
- 3 empilhe um item na pilha

Outro exemplo: pilha

Operações básicas: empilha, desempilha.

OP: operação única de acesso

OP (n)

- 1 ▷ exige que a pilha tenha $\geq n$ elementos
- 2 desempilhe n itens da pilha
- 3 empilhe um item na pilha

Consumo de tempo de OP(n) é $\Theta(n)$.

Outro exemplo: pilha

Operações básicas: empilha, desempilha.

OP: operação única de acesso

OP (n)

- 1 ▷ exige que a pilha tenha $\geq n$ elementos
- 2 desempilhe n itens da pilha
- 3 empilhe um item na pilha

Consumo de tempo de OP(n) é $\Theta(n)$.

Sequência de m operações OP.

Consumo de tempo de uma operação no pior caso: $\Theta(m)$.

Outro exemplo: pilha

Operações básicas: empilha, desempilha.

OP: operação única de acesso

OP (n)

- 1 ▷ exige que a pilha tenha $\geq n$ elementos
- 2 desempilhe n itens da pilha
- 3 empilhe um item na pilha

Consumo de tempo de OP(n) é $\Theta(n)$.

Sequência de m operações OP.

Consumo de tempo de uma operação no pior caso: $\Theta(m)$.

Qual o consumo total das m operações no pior caso?

Outro exemplo: pilha

Consumo de tempo de uma operação no pior caso: $\Theta(m)$.

Qual o consumo das m operações no pior caso? $\Theta(m^2)$?

Outro exemplo: pilha

Consumo de tempo de uma operação no pior caso: $\Theta(m)$.

Qual o consumo das m operações no pior caso? $\Theta(m^2)$?

Em aula...

- ▶ análise por créditos

Quantos créditos damos para cada chamada de OP?

Outro exemplo: pilha

Consumo de tempo de uma operação no pior caso: $\Theta(m)$.

Qual o consumo das m operações no pior caso? $\Theta(m^2)$?

Em aula...

- ▶ análise por créditos
Quantos créditos damos para cada chamada de OP?
- ▶ análise por função potencial
Qual seria uma boa função potencial neste caso?

Tabelas dinâmicas

Vetor que sofre inserções. Cada inserção custa 1.

Tabelas dinâmicas

Vetor que sofre inserções. Cada inserção custa 1.

Inicialmente o vetor tem 0 posições.

Tabelas dinâmicas

Vetor que sofre inserções. Cada inserção custa 1.

Inicialmente o vetor tem 0 posições.

Na primeira inserção, um vetor com uma posição é alocado, e o item em questão é inserido.

Tabelas dinâmicas

Vetor que sofre inserções. Cada inserção custa 1.

Inicialmente o vetor tem 0 posições.

Na primeira inserção, um vetor com uma posição é alocado, e o item em questão é inserido.

A cada inserção em que o vetor está cheio, antes da inserção propriamente dita, um vetor do dobro do tamanho é alocado, o vetor anterior é copiado para o novo vetor e depois é desalocado.

Tabelas dinâmicas

Vetor que sofre inserções. Cada inserção custa 1.

Inicialmente o vetor tem 0 posições.

Na primeira inserção, um vetor com uma posição é alocado, e o item em questão é inserido.

A cada inserção em que o vetor está cheio, antes da inserção propriamente dita, um vetor do dobro do tamanho é alocado, o vetor anterior é copiado para o novo vetor e depois é desalocado.

O custo no pior caso de uma inserção é alto, pois pode haver uma **realocação**.

Tabelas dinâmicas

Para $i = 0, 1, 2, \dots, n - 1$,

$$c_i = \begin{cases} 1 & \text{se } i \text{ não é potência de } 2 \\ i + 1 & \text{se } i \text{ é potência de } 2 \end{cases}$$

Tabelas dinâmicas

Para $i = 0, 1, 2, \dots, n - 1$,

$$c_i = \begin{cases} 1 & \text{se } i \text{ não é potência de } 2 \\ i + 1 & \text{se } i \text{ é potência de } 2 \end{cases}$$

Método agregado:

$$\sum_{i=0}^{n-1} c_i = n + (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^k)$$

onde $k = \lfloor \lg n \rfloor$.

Tabelas dinâmicas

Para $i = 0, 1, 2, \dots, n - 1$,

$$c_i = \begin{cases} 1 & \text{se } i \text{ não é potência de } 2 \\ i + 1 & \text{se } i \text{ é potência de } 2 \end{cases}$$

Método agregado:

$$\sum_{i=0}^{n-1} c_i = n + (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^k)$$

onde $k = \lfloor \lg n \rfloor$.

Logo $\sum_{i=0}^{n-1} c_i = n + 2^{k+1} - 1 \leq n + 2n - 1 < 3n$.

Tabelas dinâmicas

Para $i = 0, 1, 2, \dots, n - 1$,

$$c_i = \begin{cases} 1 & \text{se } i \text{ não é potência de } 2 \\ i + 1 & \text{se } i \text{ é potência de } 2 \end{cases}$$

Método agregado:

$$\sum_{i=0}^{n-1} c_i = n + (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^k)$$

onde $k = \lfloor \lg n \rfloor$.

Logo $\sum_{i=0}^{n-1} c_i = n + 2^{k+1} - 1 \leq n + 2n - 1 < 3n$.

Custo amortizado por inserção: 3

Análise por créditos

Chame de **velho** um item que já estava no vetor no momento da última realocação do vetor, e de **novos** os itens inseridos após a última realocação.

Análise por créditos

Chame de **velho** um item que já estava no vetor no momento da última realocação do vetor, e de **novos** os itens inseridos após a última realocação.

Atribuímos **3 créditos por inserção**:

um é usado para pagar pela inserção do item, os outros dois são armazenados sobre o item.

Análise por créditos

Chame de **velho** um item que já estava no vetor no momento da última realocação do vetor, e de **novos** os itens inseridos após a última realocação.

Atribuímos **3 créditos por inserção**:

um é usado para pagar pela inserção do item, os outros dois são armazenados sobre o item.

Ao ocorrer uma **realocação**, há 2 créditos sobre cada item novo no vetor,

Análise por créditos

Chame de **velho** um item que já estava no vetor no momento da última realocação do vetor, e de **novos** os itens inseridos após a última realocação.

Atribuímos **3 créditos por inserção**:

um é usado para pagar pela inserção do item, os outros dois são armazenados sobre o item.

Ao ocorrer uma **realocação**, há 2 créditos sobre cada item novo no vetor, e isso é suficiente para pagar pela cópia de todos os itens do vetor para o novo vetor

Análise por créditos

Chame de **velho** um item que já estava no vetor no momento da última realocação do vetor, e de **novos** os itens inseridos após a última realocação.

Atribuímos **3 créditos por inserção**:

- um é usado para pagar pela inserção do item,
- os outros dois são armazenados sobre o item.

Ao ocorrer uma **realocação**,

há 2 créditos sobre cada item novo no vetor, e isso é suficiente para pagar pela cópia de todos os itens do vetor para o novo vetor pois, quando o vetor está cheio, há um item novo para cada item velho.

Análise por créditos

Chame de **velho** um item que já estava no vetor no momento da última realocação do vetor, e de **novos** os itens inseridos após a última realocação.

Atribuímos **3 créditos por inserção**:

um é usado para pagar pela inserção do item, os outros dois são armazenados sobre o item.

Ao ocorrer uma **realocação**,

há 2 créditos sobre cada item novo no vetor, e isso é suficiente para pagar pela cópia de todos os itens do vetor para o novo vetor pois, quando o vetor está cheio, há um item novo para cada item velho.

Em outras palavras, o segundo crédito paga a cópia do item na primeira realocação que acontecer após a sua inserção, e o terceiro crédito paga a cópia de um item velho nesta mesma realocação.

Análise por créditos

Chame de **velho** um item que já estava no vetor no momento da última realocação do vetor, e de **novos** os itens inseridos após a última realocação.

Atribuímos **3 créditos por inserção**:

- um é usado para pagar pela inserção do item,
- os outros dois são armazenados sobre o item.

Ao ocorrer uma **realocação**, há 2 créditos sobre cada item novo no vetor, e isso é suficiente para pagar pela cópia de todos os itens do vetor para o novo vetor pois, quando o vetor está cheio, há um item novo para cada item velho.

Que função potencial você usaria neste caso?