Análise amortizada

Sec 17.4 Tabelas dinâmicas do CLRS

Parte das notas de aula de um curso do Robert Tarjan.

"*Amortized Analysis Explained*"

por Rebecca Fiebrink, Princeton University

Tabelas dinâmicas

Vetor que sofre inserções. Cada inserção custa 1.

Inicialmente o vetor tem 0 posições.

Na primeira inserção, um vetor com uma posição é alocado, e o item em questão é inserido.

A cada inserção em que o vetor está cheio, antes da inserção propriamente dita, um vetor do dobro do tamanho é alocado, o vetor anterior é copiado para o novo vetor e depois é desalocado.

O custo no pior caso de uma inserção é alto, pois pode haver uma realocação.

Tabelas dinâmicas

Para $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$,

$$c_i = \begin{cases} 1 & \text{se } i \text{ não é potência de } 2 \\ i+1 & \text{se } i \text{ é potência de } 2 \end{cases}$$

Tabelas dinâmicas

Para $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$,

$$c_i = \begin{cases} 1 & \text{se } i \text{ não é potência de } 2 \\ i+1 & \text{se } i \text{ é potência de } 2 \end{cases}$$

Chame de velho um item que já estava no vetor
no momento da última realocação do vetor,
e de novos os itens inseridos após a última realocação.

Tabelas dinâmicas

Para $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$,

$$c_i = \begin{cases} 1 & \text{se } i \text{ não é potência de 2} \\ i+1 & \text{se } i \text{ é potência de 2} \end{cases}$$

Chame de velho um item que já estava no vetor
no momento da última realocação do vetor,
e de novos os itens inseridos após a última realocação.

Método potencial:

Que função potencial você usaria neste caso?

Tabelas dinâmicas

Para $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$,

$$c_i = \begin{cases} 1 & \text{se } i \text{ não é potência de 2} \\ i+1 & \text{se } i \text{ é potência de 2} \end{cases}$$

Chame de velho um item que já estava no vetor
no momento da última realocação do vetor,
e de novos os itens inseridos após a última realocação.

Método potencial:

Que função potencial você usaria neste caso?

Tome $\Phi(T)$ como duas vezes o número de elementos novos em T.

Tabelas dinâmicas

Para $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$,

$$c_i = \begin{cases} 1 & \text{se } i \text{ não é potência de 2} \\ i+1 & \text{se } i \text{ é potência de 2} \end{cases}$$

Chame de velho um item que já estava no vetor
no momento da última realocação do vetor,
e de novos os itens inseridos após a última realocação.

Método potencial:

Que função potencial você usaria neste caso?

Tome $\Phi(T)$ como duas vezes o número de elementos novos em T.

Note que $\Phi(T_0) = 0$ e $\Phi(T_i) \geq 0$.

Tabelas dinâmicas

Para $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$,

$$c_i = \begin{cases} 1 & \text{se } i \text{ não é potência de 2} \\ i+1 & \text{se } i \text{ é potência de 2} \end{cases}$$

Chame de velho um item que já estava no vetor
no momento da última realocação do vetor,
e de novos os itens inseridos após a última realocação.

Método potencial:

Tome $\Phi(T) = 2\,\mathrm{num}(T) - \mathrm{size}(T)$,
onde $\mathrm{num}(T)$ é o número de elementos em T e
$\mathrm{size}(T)$ é o tamanho de T.

Tabelas dinâmicas

Para $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$,

$$c_i = \begin{cases} 1 & \text{se } i \text{ não é potência de 2} \\ i+1 & \text{se } i \text{ é potência de 2} \end{cases}$$

Chame de velho um item que já estava no vetor
no momento da última realocação do vetor,
e de novos os itens inseridos após a última realocação.

Método potencial:

Tome $\Phi(T) = 2\,\mathrm{num}(T) - \mathrm{size}(T)$,
onde $\mathrm{num}(T)$ é o número de elementos em T e
$\mathrm{size}(T)$ é o tamanho de T.

Vamos calcular $\hat{c}_i = c_i + \Phi(T_i) - \Phi(T_{i-1})$.

Tabelas dinâmicas: método potencial

Para $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$,

$$c_i = \begin{cases} 1 & \text{se } i \text{ não é potência de 2} \\ i+1 & \text{se } i \text{ é potência de 2} \end{cases}$$

Tome $\Phi(T) = 2\,\mathrm{num}(T) - \mathrm{size}(T)$,
onde $\mathrm{num}(T)$ é o número de elementos em T e
$\mathrm{size}(T)$ é o tamanho de T.

Vamos calcular $\hat{c}_i = c_i + \Phi(T_i) - \Phi(T_{i-1})$.

Dois casos:

- i não é potência de 2.

Tabelas dinâmicas: método potencial

Para $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$,

$$c_i = \begin{cases} 1 & \text{se } i \text{ não é potência de 2} \\ i+1 & \text{se } i \text{ é potência de 2} \end{cases}$$

Tome $\Phi(T) = 2\,\mathrm{num}(T) - \mathrm{size}(T)$,
onde $\mathrm{num}(T)$ é o número de elementos em T e
$\mathrm{size}(T)$ é o tamanho de T.

Vamos calcular $\hat{c}_i = c_i + \Phi(T_i) - \Phi(T_{i-1})$.

Dois casos:

- i não é potência de 2.
  $\mathrm{num}(T_i) = \mathrm{num}(T_{i-1}) + 1$ e $\mathrm{size}(T_i) = \mathrm{size}(T_{i-1})$.

Tabelas dinâmicas: método potencial

Para $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$,

$$c_i = \begin{cases} 1 & \text{se } i \text{ não é potência de 2} \\ i+1 & \text{se } i \text{ é potência de 2} \end{cases}$$

Tome $\Phi(T) = 2\,\mathrm{num}(T) - \mathrm{size}(T)$,
onde $\mathrm{num}(T)$ é o número de elementos em T e
$\mathrm{size}(T)$ é o tamanho de T.

Vamos calcular $\hat{c}_i = c_i + \Phi(T_i) - \Phi(T_{i-1})$.

Dois casos:

- i não é potência de 2.
  $\mathrm{num}(T_i) = \mathrm{num}(T_{i-1}) + 1 \quad \text{e} \quad \mathrm{size}(T_i) = \mathrm{size}(T_{i-1})$.

$$\begin{aligned} \hat{c}_i &= c_i + \Phi(T_i) - \Phi(T_{i-1}) \\ &= 1 + (2\,\mathrm{num}(T_i) - \mathrm{size}(T_i)) - (2\,\mathrm{num}(T_{i-1}) - \mathrm{size}(T_{i-1})) \\ &= 1 + 2 + 0 \;=\; 3. \end{aligned}$$

Tabelas dinâmicas: método potencial

Para $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$,

$$c_i = \begin{cases} 1 & \text{se } i \text{ não é potência de 2} \\ i+1 & \text{se } i \text{ é potência de 2} \end{cases}$$

Tome $\Phi(T) = 2\,\mathrm{num}(T) - \mathrm{size}(T)$,
onde $\mathrm{num}(T)$ é o número de elementos em T e
$\mathrm{size}(T)$ é o tamanho de T.

Dois casos:

- i não é potência de 2: $\hat{c}_i = 3$.
- i é potência de 2.

Tabelas dinâmicas: método potencial

Para $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$,

$$c_i = \begin{cases} 1 & \text{se } i \text{ não é potência de } 2 \\ i+1 & \text{se } i \text{ é potência de } 2 \end{cases}$$

Tome $\Phi(T) = 2\,\mathrm{num}(T) - \mathrm{size}(T)$,
onde $\mathrm{num}(T)$ é o número de elementos em T e
$\mathrm{size}(T)$ é o tamanho de T.

Dois casos:

- i não é potência de 2: $\hat{c}_i = 3$.
- i é potência de 2.
  $\mathrm{num}(T_i) = \mathrm{num}(T_{i-1}) + 1 = 2^i + 1$ e
  $\mathrm{size}(T_i) = 2\,\mathrm{size}(T_{i-1}) = 2\,\mathrm{num}(T_{i-1})$.

Tabelas dinâmicas: método potencial

Para $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$,

$$c_i = \begin{cases} 1 & \text{se } i \text{ não é potência de 2} \\ i+1 & \text{se } i \text{ é potência de 2} \end{cases}$$

Tome $\Phi(T) = 2\,\mathrm{num}(T) - \mathrm{size}(T)$,
onde $\mathrm{num}(T)$ é o número de elementos em T e
$\mathrm{size}(T)$ é o tamanho de T.

Dois casos:

- i não é potência de 2: $\hat{c}_i = 3$.
- i é potência de 2.
  $\mathrm{num}(T_i) = \mathrm{num}(T_{i-1}) + 1 = 2^i + 1$ e
  $\mathrm{size}(T_i) = 2\,\mathrm{size}(T_{i-1}) = 2\,\mathrm{num}(T_{i-1})$.

$$\begin{aligned} \hat{c}_i &= c_i + \Phi(T_i) - \Phi(T_{i-1}) \\ &= c_i + (2\,\mathrm{num}(T_i) - \mathrm{size}(T_i)) - (2\,\mathrm{num}(T_{i-1}) - \mathrm{size}(T_{i-1})) \\ &= \mathrm{num}(T_i) + 2 - \mathrm{num}(T_{i-1}) \;=\; 3. \end{aligned}$$

Tabelas dinâmicas: método potencial

Para $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$,

$$c_i = \begin{cases} 1 & \text{se } i \text{ não é potência de 2} \\ i+1 & \text{se } i \text{ é potência de 2} \end{cases}$$

Tome $\Phi(T) = 2\,\mathrm{num}(T) - \mathrm{size}(T)$,
onde $\mathrm{num}(T)$ é o número de elementos em T e
$\mathrm{size}(T)$ é o tamanho de T.

Dois casos:

- i não é potência de 2: $\hat{c}_i = 3$.
- i é potência de 2: $\hat{c}_i = 3$.

Conclusão: custo amortizado por inserção é 3.

Move to front

Considere uma lista ligada.

Custo do acesso ao i-ésimo elemento: i.

Move to front

Considere uma lista ligada.

Custo do acesso ao i-ésimo elemento: i.

Custo de trocar dois elementos consecutivos de lugar:
constante, descontado o tempo de acessar um deles.

Move to front

Considere uma lista ligada.

Custo do acesso ao i-ésimo elemento: i.

Custo de trocar dois elementos consecutivos de lugar:
constante, descontado o tempo de acessar um deles.

Heurística MTF:
ao acessar o elemento x, mova-o para o ínicio da lista.

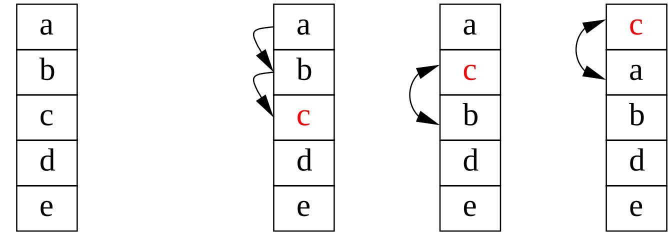
Move to front

Considere uma lista ligada.

Custo do acesso ao i-ésimo elemento: i.

Custo de trocar dois elementos consecutivos de lugar:
constante, descontado o tempo de acessar um deles.

Heurística MTF:
ao acessar o elemento x, mova-o para o ínicio da lista.



Move to front

Considere uma lista ligada.

Custo do acesso ao i-ésimo elemento: i.

Custo de trocar dois elementos consecutivos de lugar:
constante, descontado o tempo de acessar um deles.

Heurística MTF:
ao acessar o elemento x, mova-o para o ínicio da lista.

Com MTF, custo do acesso ao i-ésimo elemento: $2i - 1$.

Move to front

Considere uma lista ligada.

Custo do acesso ao i-ésimo elemento: i.

Custo de trocar dois elementos consecutivos de lugar:
constante, descontado o tempo de acessar um deles.

Heurística MTF:
ao acessar o elemento x, mova-o para o ínicio da lista.

Com MTF, custo do acesso ao i-ésimo elemento: $2i - 1$.

Considere uma sequência de acessos à lista.

Qual é o custo de MTF se comparado
com um algoritmo ótimo de acesso?

Move to front

Lista ligada e sequência de acessos a ela.

Heurística MTF:
ao acessar o elemento x, mova-o para o ínicio da lista.

Acesso ao i-ésimo elemento custa $2i - 1$.

Qual é o custo de MTF se comparado
com um algoritmo ótimo de acesso?

Move to front

Lista ligada e sequência de acessos a ela.

Heurística MTF:
ao acessar o elemento x, mova-o para o ínicio da lista.

Acesso ao i-ésimo elemento custa $2i - 1$.

Qual é o custo de MTF se comparado
com um algoritmo ótimo de acesso?

A: algoritmo arbitrário de acesso à lista.

Análise amortizada:

$$\text{custo do MTF} \leq 4 \text{ vezes o custo de } A.$$

Operações sobre a lista

Acesso e troca com anterior.

Função potencial Φ: 2 vezes o número de inversões da lista de MTF em relação à lista de A.

Operações sobre a lista

Acesso e troca com anterior.

Função potencial Φ: 2 vezes o número de inversões da lista de MTF em relação à lista de A.

Seja x o elemento acessado.

Operações sobre a lista

Acesso e troca com anterior.

Função potencial Φ: 2 vezes o número de inversões da lista de MTF em relação à lista de A.

Seja x o elemento acessado.

Seja k a posição de x na lista de MTF.

Seja i a posição de x na lista de A.

Operações sobre a lista

Acesso e troca com anterior.

Função potencial Φ: 2 vezes o número de inversões da lista de MTF em relação à lista de A.

Seja x o elemento acessado.

Seja k a posição de x na lista de MTF.

Seja i a posição de x na lista de A.

Suponha que A não troca ninguém de lugar.

Custo pelo acesso a x por MTF: $2k - 1$.

Custo pelo acesso a x por A: i.

Custo amortizado do acesso

Função potencial Φ: 2 vezes o número de inversões da lista de MTF em relação à lista de A.

k: posição de x na lista de MTF.
i: posição de x na lista de A.

Custo amortizado do acesso

Função potencial Φ: 2 vezes o número de inversões
da lista de MTF em relação à lista de A.

k: posição de x na lista de MTF.
i: posição de x na lista de A.

Em MTF, depois do acesso,
pares com x e cada um dos $k-1$ elementos trocaram de posição.

Custo amortizado do acesso

Função potencial Φ: 2 vezes o número de inversões da lista de MTF em relação à lista de A.

k: posição de x na lista de MTF.
i: posição de x na lista de A.

Em MTF, depois do acesso,
pares com x e cada um dos $k-1$ elementos trocaram de posição.

Existem $i-1$ elementos na lista de A na frente de x.

Custo amortizado do acesso

Função potencial Φ: 2 vezes o número de inversões da lista de MTF em relação à lista de A.

k: posição de x na lista de MTF.
i: posição de x na lista de A.

Em MTF, depois do acesso,
pares com x e cada um dos $k-1$ elementos trocaram de posição.

Existem $i-1$ elementos na lista de A na frente de x.

$\leq \min\{k-1, i-1\}$ inversões a mais depois do acesso

Custo amortizado do acesso

Função potencial Φ: 2 vezes o número de inversões da lista de MTF em relação à lista de A.

k: posição de x na lista de MTF.
i: posição de x na lista de A.

Em MTF, depois do acesso,
pares com x e cada um dos $k-1$ elementos trocaram de posição.

Existem $i-1$ elementos na lista de A na frente de x.

$\leq \min\{k-1, i-1\}$ inversões a mais depois do acesso

$\geq (k-1) - \min\{k-1, i-1\}$ inversões a menos

Custo amortizado do acesso

Função potencial Φ: 2 vezes o número de inversões da lista de MTF em relação à lista de A.

k: posição de x na lista de MTF.
i: posição de x na lista de A.

Em MTF, depois do acesso, pares com x e cada um dos $k-1$ elementos trocaram de posição.

Existem $i-1$ elementos na lista de A na frente de x.

$\leq \min\{k-1, i-1\}$ inversões a mais depois do acesso

$\geq (k-1) - \min\{k-1, i-1\}$ inversões a menos

Então $\Delta\Phi \leq 2(2\min\{k-1, i-1\} - (k-1))$.

Custo amortizado do acesso

Função potencial Φ: 2 vezes o número de inversões da lista de MTF em relação à lista de A.

$\Delta\Phi \leq 4 \min\{k-1, i-1\} - 2(k-1)$.

Custo amortizado do acesso

Função potencial Φ: 2 vezes o número de inversões da lista de MTF em relação à lista de A.

$\Delta\Phi \leq 4\min\{k-1, i-1\} - 2(k-1)$.

Custo amortizado:

$$
\begin{aligned}
\hat{c} &= c + \Delta\Phi \\
&\leq 2k - 1 + 4\min\{k-1, i-1\} - 2(k-1) \\
&\leq 1 + 4\min\{k-1, i-1\} \\
&\leq 4i.
\end{aligned}
$$

Custo amortizado do acesso

Função potencial Φ: 2 vezes o número de inversões da lista de MTF em relação à lista de A.

$\Delta\Phi \leq 4\min\{k-1, i-1\} - 2(k-1)$.

Custo amortizado:

$$
\begin{aligned}
\hat{c} &= c + \Delta\Phi \\
&\leq 2k - 1 + 4\min\{k-1, i-1\} - 2(k-1) \\
&\leq 1 + 4\min\{k-1, i-1\} \\
&\leq 4i.
\end{aligned}
$$

Logo o custo amortizado por acesso de A é no máximo 4.

Custo amortizado

Função potencial Φ: 2 vezes o número de inversões da lista de MTF em relação à lista de A.

O custo amortizado por acesso é no máximo 4 em relação ao custo de A... se A não fizer trocas...

Custo amortizado

Função potencial Φ: 2 vezes o número de inversões da lista de MTF em relação à lista de A.

O custo amortizado por acesso é no máximo 4 em relação ao custo de A... se A não fizer trocas...

E se A fizer trocas também?

Custo amortizado

Função potencial Φ: 2 vezes o número de inversões da lista de MTF em relação à lista de A.

O custo amortizado por acesso é no máximo 4 em relação ao custo de A... se A não fizer trocas...

E se A fizer trocas também?

Com uma troca, o custo de A sobe de 1.

Custo amortizado

Função potencial Φ: 2 vezes o número de inversões da lista de MTF em relação à lista de A.

O custo amortizado por acesso é no máximo 4 em relação ao custo de A... se A não fizer trocas...

E se A fizer trocas também?

Com uma troca, o custo de A sobe de 1.

E o potencial, como se altera? Sobe ou desce de 2.

Custo amortizado

Função potencial Φ: 2 vezes o número de inversões da lista de MTF em relação à lista de A.

O custo amortizado por acesso é no máximo 4 em relação ao custo de A... se A não fizer trocas...

E se A fizer trocas também?

Com uma troca, o custo de A sobe de 1.

E o potencial, como se altera? Sobe ou desce de 2.

Ou seja, o custo de A é $i + t$,
onde t é o número de trocas de A após o acesso de x,
e $\Delta\Phi \leq 4\min\{k-1, i-1\} - 2(k-1) + 2t$.

Custo amortizado

Função potencial Φ: 2 vezes o número de inversões da lista de MTF em relação à lista de A.

O custo amortizado por acesso é no máximo 4 em relação ao custo de A... se A não fizer trocas...

E se A fizer trocas também?

Com uma troca, o custo de A sobe de 1.

E o potencial, como se altera? Sobe ou desce de 2.

Ou seja, o custo de A é $i + t$,
onde t é o número de trocas de A após o acesso de x,
e $\Delta\Phi \leq 4\min\{k-1, i-1\} - 2(k-1) + 2t$.

Custo amortizado: $\hat{c} \leq 4i + 2t \leq 4(i + t)$.

Custo amortizado

Função potencial Φ: 2 vezes o número de inversões da lista de MTF em relação à lista de A.

O custo amortizado por acesso é no máximo 4 em relação ao custo de A... se A não fizer trocas...

E se A fizer trocas também?

Com uma troca, o custo de A sobe de 1.

E o potencial, como se altera? Sobe ou desce de 2.

Ou seja, o custo de A é $i + t$,
onde t é o número de trocas de A após o acesso de x,
e $\Delta\Phi \leq 4\min\{k-1, i-1\} - 2(k-1) + 2t$.

Custo amortizado: $\hat{c} \ \leq \ 4i + 2t \ \leq \ 4(i+t)$.

Custo amortizado por operação de A é no máximo 4.

Próximos capítulos

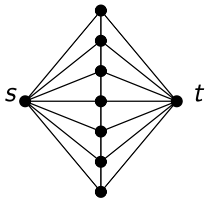
Próxima aula: splay trees

Aula seguinte: union-find

Agora: discussão do exercício 10 da lista 3.

Exercício 10 da lista 3

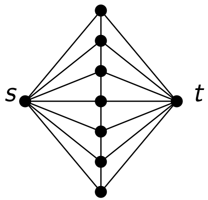
Considere o seguinte grafo G, com vértices s e t marcados.



Mostre que a probabilidade do algoritmo de Karger sugerido no exercício 12 do KT dar uma resposta correta, ou seja, um s-t corte mínimo, é exponencialmente pequena no número n de vértices de G.

Exercício 10 da lista 3

Considere o seguinte grafo G, com vértices s e t marcados.



Mostre que a probabilidade do algoritmo de Karger sugerido no exercício 12 do KT dar uma resposta correta, ou seja, um s-t corte mínimo, é exponencialmente pequena no número n de vértices de G.

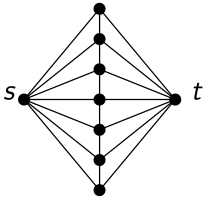
Algoritmo de Karger sugerido no exercício 12 do KT:

Remova de G qualquer aresta entre s e t.
Escolha aleatoriamente, com probabilidade uniforme, uma aresta de G.
Contraia e repita até que restem apenas os vértices s e t.
Devolva E_G juntamente com todas as arestas entre s e t removidas.

Exercício 10 da lista 3

Algoritmo de Karger sugerido no exercício 12 do KT:

Remova de G qualquer aresta entre s e t.
Escolha aleatoriamente, com probabilidade uniforme, uma aresta de G.
Contraia e repita até que restem apenas os vértices s e t.
Devolva E_G juntamente com todas as arestas entre s e t removidas.

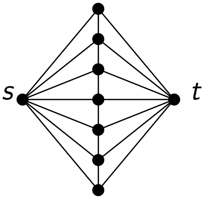


Há dois s-t cortes mínimos: $\delta(s)$ e $\delta(t)$.

Exercício 10 da lista 3

Algoritmo de Karger sugerido no exercício 12 do KT:

Remova de G qualquer aresta entre s e t.
Escolha aleatoriamente, com probabilidade uniforme, uma aresta de G.
Contraia e repita até que restem apenas os vértices s e t.
Devolva E_G juntamente com todas as arestas entre s e t removidas.



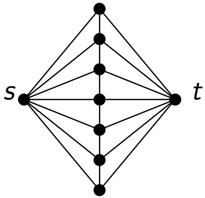
Há dois s-t cortes mínimos: $\delta(s)$ e $\delta(t)$.

Fixe um deles, digamos $C^* = \delta(s)$.

Exercício 10 da lista 3

Algoritmo de Karger sugerido no exercício 12 do KT:

Remova de G qualquer aresta entre s e t.
Escolha aleatoriamente, com probabilidade uniforme, uma aresta de G.
Contraia e repita até que restem apenas os vértices s e t.
Devolva E_G juntamente com todas as arestas entre s e t removidas.



Há dois s-t cortes mínimos: $\delta(s)$ e $\delta(t)$.

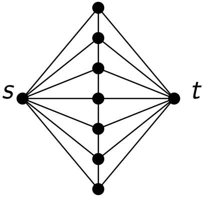
Fixe um deles, digamos $C^* = \delta(s)$.

Vamos delimitar $\Pr[C^*$ ser a resposta$]$.

Exercício 10 da lista 3

Algoritmo de Karger sugerido no exercício 12 do KT:

Remova de G qualquer aresta entre s e t.
Escolha aleatoriamente, com probabilidade uniforme, uma aresta de G.
Contraia e repita até que restem apenas os vértices s e t.
Devolva E_G juntamente com todas as arestas entre s e t removidas.



Há dois s-t cortes mínimos: $\delta(s)$ e $\delta(t)$.

Fixe um deles, digamos $C^* = \delta(s)$.

Vamos delimitar $\Pr[C^* \text{ ser a resposta}]$.

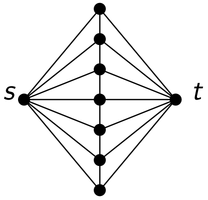
Suponha que fizemos i contrações e C^* ainda aparece em G.

Que cara teria o grafo G depois destas i contrações?

Exercício 10 da lista 3

Algoritmo de Karger sugerido no exercício 12 do KT:

Remova de G qualquer aresta entre s e t.
Escolha aleatoriamente, com probabilidade uniforme, uma aresta de G.
Contraia e repita até que restem apenas os vértices s e t.
Devolva E_G juntamente com todas as arestas entre s e t removidas.



Suponha que fizemos i contrações
e $C^* = \delta(s)$ ainda aparece em G.

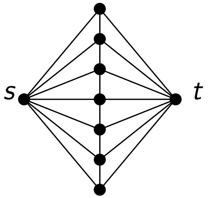
Restam $n - i$ vértices em G.

Chame de t o vértice resultante da
contração de qualquer aresta incidente a t.

Exercício 10 da lista 3

Algoritmo de Karger sugerido no exercício 12 do KT:

Remova de G qualquer aresta entre s e t.
Escolha aleatoriamente, com probabilidade uniforme, uma aresta de G.
Contraia e repita até que restem apenas os vértices s e t.
Devolva E_G juntamente com todas as arestas entre s e t removidas.



Suponha que fizemos i contrações
e $C^* = \delta(s)$ ainda aparece em G.

Restam $n - i$ vértices em G.

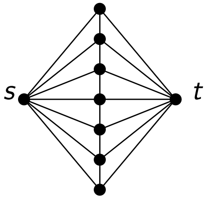
Chame de t o vértice resultante da
contração de qualquer aresta incidente a t.

Neste ponto, G teria $n - i - 2 + d$ arestas incidentes a s,

Exercício 10 da lista 3

Algoritmo de Karger sugerido no exercício 12 do KT:

Remova de G qualquer aresta entre s e t.
Escolha aleatoriamente, com probabilidade uniforme, uma aresta de G.
Contraia e repita até que restem apenas os vértices s e t.
Devolva E_G juntamente com todas as arestas entre s e t removidas.



Suponha que fizemos i contrações
e $C^* = \delta(s)$ ainda aparece em G.

Restam $n - i$ vértices em G.

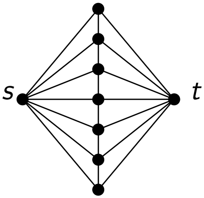
Chame de t o vértice resultante da
contração de qualquer aresta incidente a t.

Neste ponto, G teria $n - i - 2 + d$ arestas incidentes a s,
e mais menos de $3(n - i - 2 + d)$ arestas:

Exercício 10 da lista 3

Algoritmo de Karger sugerido no exercício 12 do KT:

Remova de G qualquer aresta entre s e t.
Escolha aleatoriamente, com probabilidade uniforme, uma aresta de G.
Contraia e repita até que restem apenas os vértices s e t.
Devolva E_G juntamente com todas as arestas entre s e t removidas.



Suponha que fizemos i contrações e $C^* = \delta(s)$ ainda aparece em G.

Restam $n - i$ vértices em G.

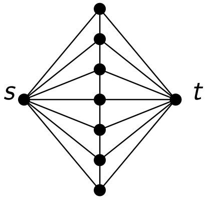
Chame de t o vértice resultante da contração de qualquer aresta incidente a t.

Neste ponto, G teria $n - i - 2 + d$ arestas incidentes a s,
e mais menos de $3(n - i - 2 + d)$ arestas:
$n - i - 2 + d$ arestas incidentes a t, correspondentes às de s,

Exercício 10 da lista 3

Algoritmo de Karger sugerido no exercício 12 do KT:

Remova de G qualquer aresta entre s e t.
Escolha aleatoriamente, com probabilidade uniforme, uma aresta de G.
Contraia e repita até que restem apenas os vértices s e t.
Devolva E_G juntamente com todas as arestas entre s e t removidas.



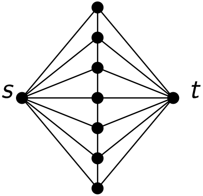
Suponha que fizemos i contrações
e $C^* = \delta(s)$ ainda aparece em G.

Restam $n - i$ vértices em G.

Chame de t o vértice resultante da
contração de qualquer aresta incidente a t.

Neste ponto, G teria $n - i - 2 + d$ arestas incidentes a s,
e mais menos de $3(n - i - 2 + d)$ arestas:
$n - i - 2 + d$ arestas incidentes a t, correspondentes às de s,
e um passeio com pelo menos $n - i - 3$ arestas, visitando os vértices
distintos de s e t, que eventualmente passa por t algumas vezes.

Exercício 10 da lista 3



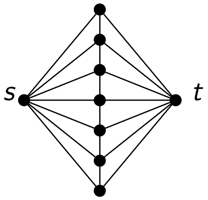
Suponha que fizemos i contrações
e $C^* = \delta(s)$ ainda aparece em G.

Restam $n - i$ vértices em G.

Chame de t o vértice resultante da
contração de qualquer aresta incidente a t.

Neste ponto, G teria $n - i - 2 + d$ arestas incidentes a s,
e mais menos de $3(n - i - 2 + d)$ arestas:
$n - i - 2 + d$ arestas incidentes a t, correspondentes às de s,
e um passeio com pelo menos $n - i - 3$ arestas, visitando os vértices
distintos de s e t, que eventualmente passa por t algumas vezes.

Exercício 10 da lista 3



Suponha que fizemos i contrações e $C^* = \delta(s)$ ainda aparece em G.

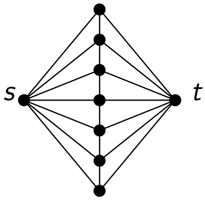
Restam $n - i$ vértices em G.

Chame de t o vértice resultante da contração de qualquer aresta incidente a t.

Neste ponto, G teria $n - i - 2 + d$ arestas incidentes a s,
e mais menos de $3(n - i - 2 + d)$ arestas:
$n - i - 2 + d$ arestas incidentes a t, correspondentes às de s,
e um passeio com pelo menos $n - i - 3$ arestas, visitando os vértices distintos de s e t, que eventualmente passa por t algumas vezes.

Cada passagem por t contribui com uma aresta extra,
para um total de no máximo $2(n - i - 3)$ arestas.

Exercício 10 da lista 3



Suponha que fizemos i contrações
e $C^* = \delta(s)$ ainda aparece em G.

Restam $n - i$ vértices em G.

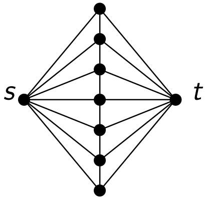
Chame de t o vértice resultante da
contração de qualquer aresta incidente a t.

Neste ponto, G teria $n - i - 2 + d$ arestas incidentes a s,
e mais menos de $3(n - i - 2 + d)$ arestas:
$n - i - 2 + d$ arestas incidentes a t, correspondentes às de s,
e um passeio com pelo menos $n - i - 3$ arestas, visitando os vértices
distintos de s e t, que eventualmente passa por t algumas vezes.

Cada passagem por t contribui com uma aresta extra,
para um total de no máximo $2(n - i - 3)$ arestas.

d: número de arestas múltiplas incidentes a s

Exercício 10 da lista 3



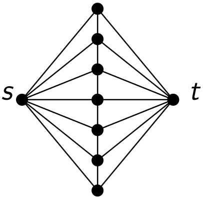
Suponha que fizemos i contrações e $C^* = \delta(s)$ ainda aparece em G.

Restam $n - i$ vértices em G.

Chame de t o vértice resultante da contração de qualquer aresta incidente a t.

Neste ponto, G teria menos de $4(n - i - 2 + d)$ arestas, sendo $n - i - 2 + d$ delas incidentes a s.

Exercício 10 da lista 3



Suponha que fizemos i contrações e $C^* = \delta(s)$ ainda aparece em G.

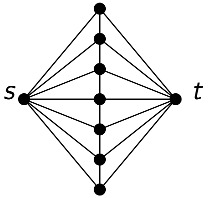
Restam $n - i$ vértices em G.

Chame de t o vértice resultante da contração de qualquer aresta incidente a t.

Neste ponto, G teria menos de $4(n - i - 2 + d)$ arestas, sendo $n - i - 2 + d$ delas incidentes a s.

Logo, a probabilidade de uma aresta fora de C^* ser escolhida a cada iteração é menos de $3/4$.

Exercício 10 da lista 3



Suponha que fizemos i contrações e $C^* = \delta(s)$ ainda aparece em G.

Restam $n - i$ vértices em G.

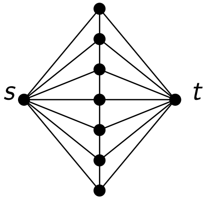
Chame de t o vértice resultante da contração de qualquer aresta incidente a t.

Neste ponto, G teria menos de $4(n - i - 2 + d)$ arestas, sendo $n - i - 2 + d$ delas incidentes a s.

Logo, a probabilidade de uma aresta fora de C^* ser escolhida a cada iteração é menos de $3/4$.

E a chance de C^* ser a saída do algoritmo é menos de $\left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}$.

Exercício 10 da lista 3



Suponha que fizemos i contrações e $C^* = \delta(s)$ ainda aparece em G.

Restam $n - i$ vértices em G.

Chame de t o vértice resultante da contração de qualquer aresta incidente a t.

Neste ponto, G teria menos de $4(n - i - 2 + d)$ arestas, sendo $n - i - 2 + d$ delas incidentes a s.

Logo, a probabilidade de uma aresta fora de C^* ser escolhida a cada iteração é menos de $3/4$.

E a chance de C^* ser a saída do algoritmo é menos de $\left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}$.

O mesmo vale para $\delta(t)$ e a chance do algoritmo dar uma resposta certa é então menos de $2\left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}$.