

Tópicos de Análise de Algoritmos

Análise amortizada

Notas de aula de um curso do Robert Tarjan.

"Amortized Analysis Explained"

por Rebecca Fiebrink, Princeton University

Splay trees

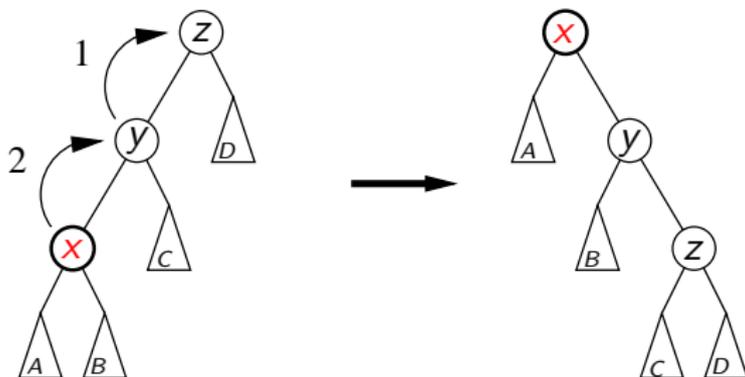
ABB: árvore de busca binária

Operação **SPLAY**(x, S), onde S é uma splay tree:
quando x é acessado, move-se x para a raiz por rotações.
Para a análise, olhamos duas rotações de cada vez.

Splay trees

ABB: árvore de busca binária

Operação **SPLAY**(x, S), onde S é uma splay tree:
quando x é acessado, move-se x para a raiz por rotações.
Para a análise, olhamos duas rotações de cada vez.

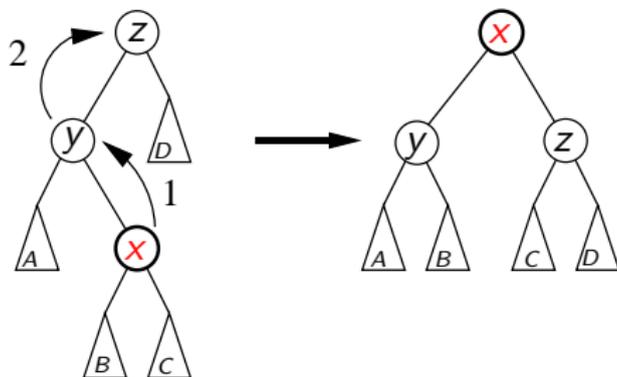


Acima, o rr splay step.

Splay trees

ABB: árvore de busca binária

Operação **SPLAY**(x, S), onde S é uma splay tree:
quando x é acessado, move-se x para a raiz por rotações.
Para a análise, olhamos duas rotações de cada vez.

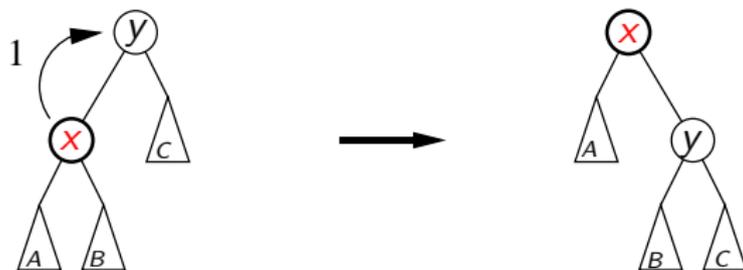


Acima, o **lr splay step**.

Splay trees

ABB: árvore de busca binária

Operação **SPLAY**(x, S), onde S é uma splay tree:
quando x é acessado, move-se x para a raiz por rotações.
Para a análise, olhamos duas rotações de cada vez.
Eventualmente no final uma rotação simples é necessária.

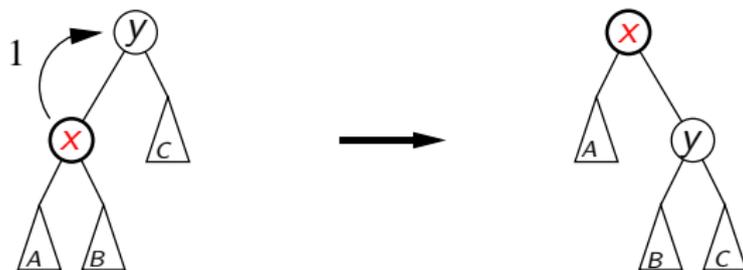


Acima, o **r splay step**.

Splay trees

ABB: árvore de busca binária

Operação **SPLAY**(x, S), onde S é uma splay tree:
quando x é acessado, move-se x para a raiz por rotações.
Para a análise, olhamos duas rotações de cada vez.
Eventualmente no final uma rotação simples é necessária.



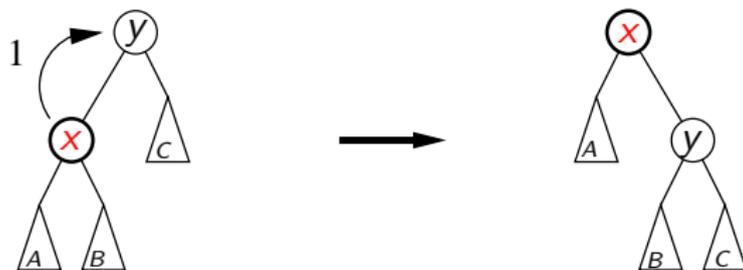
Acima, o **r splay step**.

Além destes, o **l splay**, o **rl splay** e o **ll splay step**.

Splay trees

ABB: árvore de busca binária

Operação **SPLAY**(x, S), onde S é uma splay tree:
quando x é acessado, move-se x para a raiz por rotações.
Para a análise, olhamos duas rotações de cada vez.
Eventualmente no final uma rotação simples é necessária.



Acima, o **r splay step**.

Além destes, o **l splay**, o **rl splay** e o **ll splay step**.

Splay steps são realizados até que x seja raiz.

Splay trees

ABB: árvore de busca binária

Operação **SPLAY**(x, S), onde S é uma splay tree:
quando x é acessado, move-se x para a raiz por rotações.

Splay trees

ABB: árvore de busca binária

Operação **SPLAY**(x, S), onde S é uma splay tree:
quando x é acessado, move-se x para a raiz por rotações.

Custo de pior caso do **SPLAY**: $\Theta(n)$,
onde n é o número de elementos na splay tree.

Splay trees

ABB: árvore de busca binária

Operação **SPLAY**(x, S), onde S é uma splay tree:
quando x é acessado, move-se x para a raiz por rotações.

Custo de pior caso do **SPLAY**: $\Theta(n)$,
onde n é o número de elementos na splay tree.

Queremos mostrar que uma splay tree tem
comportamento mais parecido com o de uma ABBB.

Splay trees

ABB: árvore de busca binária

Operação $\text{SPLAY}(x, S)$, onde S é uma splay tree:
quando x é acessado, move-se x para a raiz por rotações.

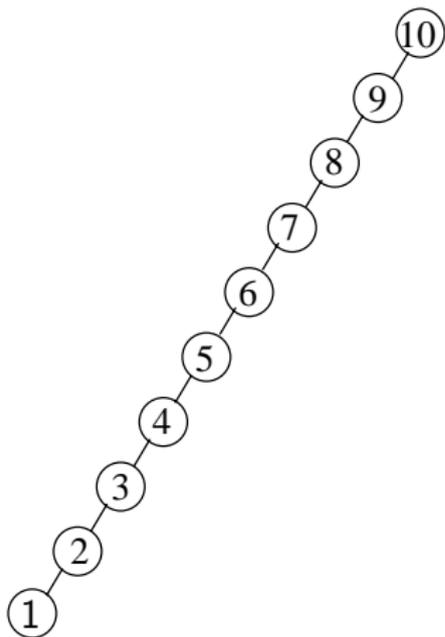
Custo de pior caso do SPLAY : $\Theta(n)$,
onde n é o número de elementos na splay tree.

Queremos mostrar que uma splay tree tem
comportamento mais parecido com o de uma ABBB.

(ABBB: ABB balanceada)

Splay trees: pior caso

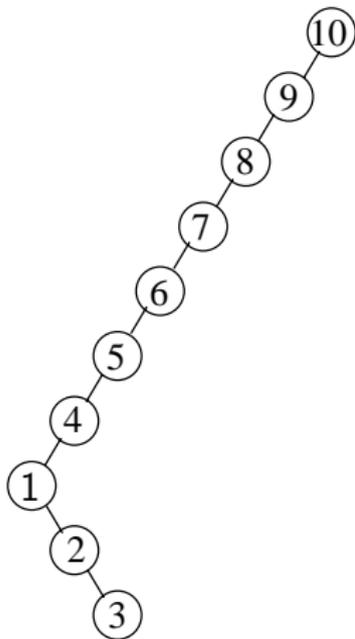
SPLAY(1, 5)



Splay trees: pior caso

$SPLAY(1, 5)$

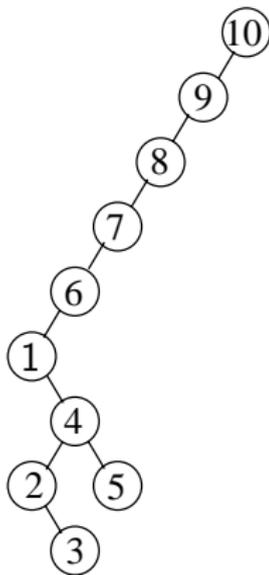
primeiro splay step



Splay trees: pior caso

$\text{SPLAY}(1, 5)$

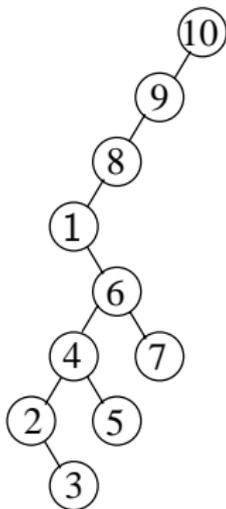
segundo splay step



Splay trees: pior caso

$\text{SPLAY}(1, 5)$

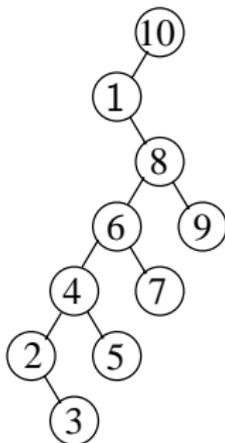
terceiro splay step



Splay trees: pior caso

$SPLAY(1, 5)$

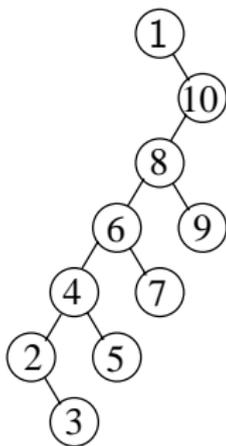
quarto splay step



Splay trees: pior caso

$SPLAY(1, S)$

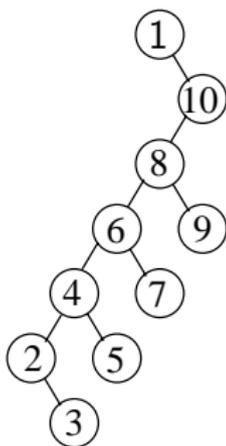
quinto splay step



Splay trees: pior caso

SPLAY(1, 5)

quinto splay step



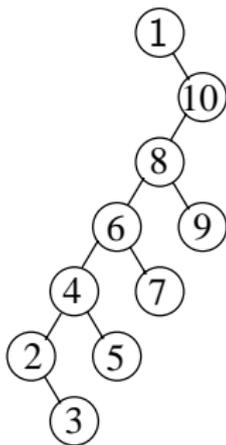
Total de rotações: 9

Em geral, é $\Theta(n)$, onde n é o número de nós.

Agora, o maior custo de um **SPLAY** nesta árvore é 6.

Splay trees: mais um exemplo

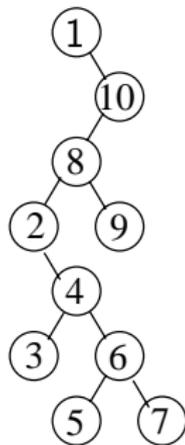
$\text{SPLAY}(2, 5)$



Splay trees: mais um exemplo

$SPLAY(2, 5)$

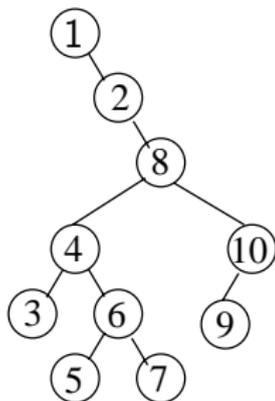
primeiro splay step



Splay trees: mais um exemplo

$\text{SPLAY}(2, 5)$

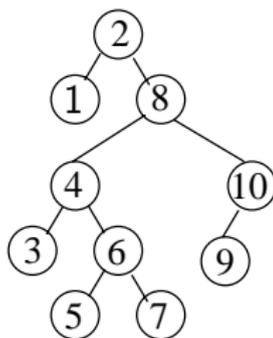
segundo splay step



Splay trees: mais um exemplo

$SPLAY(2, 5)$

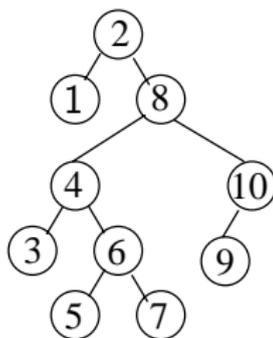
terceiro splay step



Splay trees: mais um exemplo

SPLAY(2, 5)

terceiro splay step



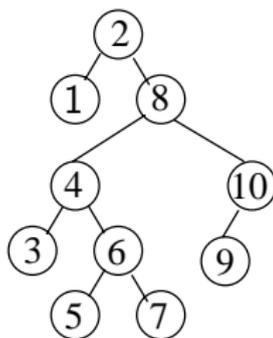
Total de rotações: 5

Árvore bem mais balanceada após estes dois **SPLAY**s.

Splay trees: mais um exemplo

SPLAY(2, 5)

terceiro splay step



Total de rotações: 5

Árvore bem mais balanceada após estes dois **SPLAY**s.

Custo: número de rotações.

Splay trees

S: splay tree

Splay trees

S : splay tree

$S_i(x)$: subárvore de S enraizada em x no instante i

$$s_i(x) = |S_i(x)|$$

Splay trees

S : splay tree

$S_i(x)$: subárvore de S enraizada em x no instante i

$$s_i(x) = |S_i(x)|$$

Tome $r_i(x) = \lg s_i(x)$.

$r_i(x)$ indica o **potencial local** no nó x .

Splay trees

S : splay tree

$S_i(x)$: subárvore de S enraizada em x no instante i

$$s_i(x) = |S_i(x)|$$

Tome $r_i(x) = \lg s_i(x)$.

$r_i(x)$ indica o **potencial local** no nó x .

Seja $\Phi_i = \sum_x r_i(x)$.

Splay trees

S : splay tree

$S_i(x)$: subárvore de S enraizada em x no instante i

$$s_i(x) = |S_i(x)|$$

Tome $r_i(x) = \lg s_i(x)$.

$r_i(x)$ indica o **potencial local** no nó x .

Seja $\Phi_i = \sum_x r_i(x)$.

Mostraremos que o custo amortizado por **SPLAY** é $O(\lg n)$.

Splay trees

S : splay tree

$S_i(x)$: subárvore de S enraizada em x no instante i

$$s_i(x) = |S_i(x)|$$

Tome $r_i(x) = \lg s_i(x)$.

$r_i(x)$ indica o **potencial local** no nó x .

Seja $\Phi_i = \sum_x r_i(x)$.

Mostraremos que o custo amortizado por **SPLAY** é $O(\lg n)$.

Análise amortizada dos splay steps.

Splay trees

S : splay tree

$S_i(x)$: subárvore de S enraizada em x no instante i

$$s_i(x) = |S_i(x)|$$

Tome $r_i(x) = \lg s_i(x)$.

$r_i(x)$ indica o **potencial local** no nó x .

Seja $\Phi_i = \sum_x r_i(x)$.

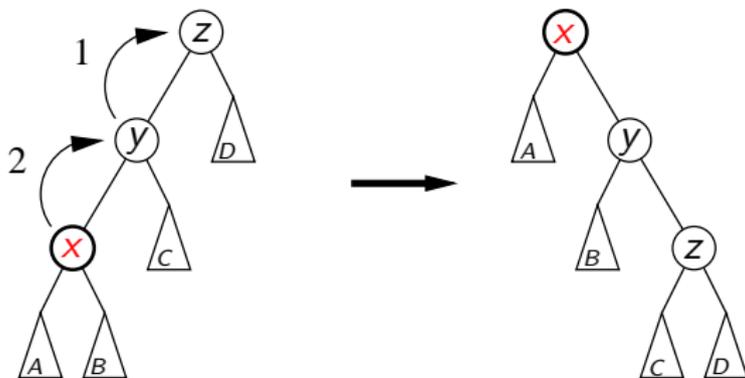
Mostraremos que o custo amortizado por **SPLAY** é $O(\lg n)$.

Análise amortizada dos splay steps.

x participa de todos os splay steps de **SPLAY**(x, S).

Análise amortizada dos splay steps

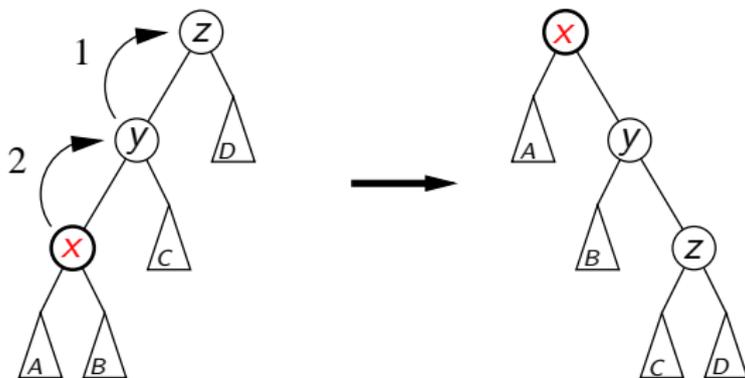
Caso do *rr splay step*.



Custo real: 2

Análise amortizada dos splay steps

Caso do **rr splay step**.



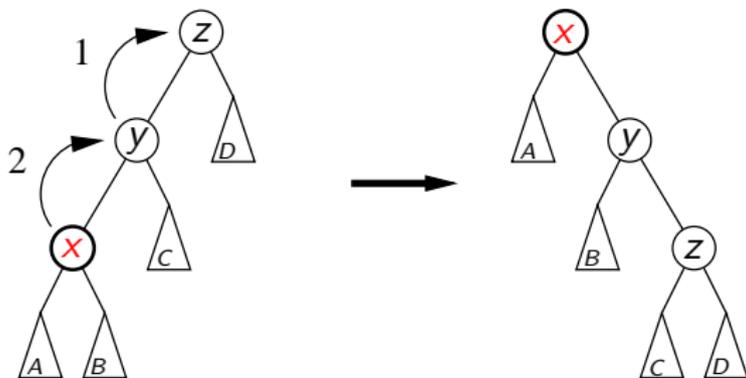
Custo real: 2

Alteração no potencial:

$$\Phi_i - \Phi_{i-1} = \sum_w r_i(w) - \sum_w r_{i-1}(w) = \sum_w (r_i(w) - r_{i-1}(w))$$

Análise amortizada dos splay steps

Caso do **rr splay step**.



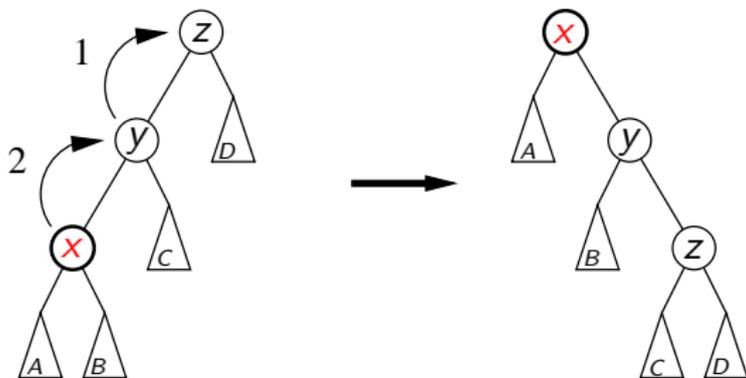
Custo real: 2

Alteração no potencial:

$$\begin{aligned}\Phi_i - \Phi_{i-1} &= \sum_w r_i(w) - \sum_w r_{i-1}(w) = \sum_w (r_i(w) - r_{i-1}(w)) \\ &= (r_i(x) - r_{i-1}(x)) + (r_i(y) - r_{i-1}(y)) + (r_i(z) - r_{i-1}(z))\end{aligned}$$

Análise amortizada dos splay steps

Caso do *rr splay step*.



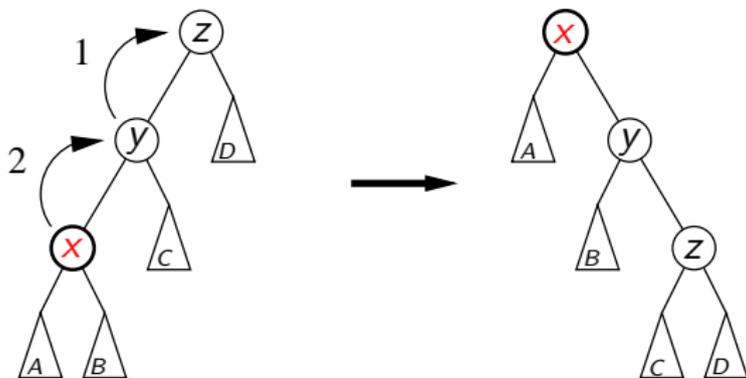
Custo real: 2

Alteração no potencial:

$$\begin{aligned}\Phi_i - \Phi_{i-1} &= \sum_w r_i(w) - \sum_w r_{i-1}(w) = \sum_w (r_i(w) - r_{i-1}(w)) \\ &= (r_i(x) - r_{i-1}(x)) + (r_i(y) - r_{i-1}(y)) + (r_i(z) - r_{i-1}(z)) \\ &= (r_i(y) + r_i(z)) - (r_{i-1}(x) + r_{i-1}(y))\end{aligned}$$

Análise amortizada dos splay steps

Caso do **rr splay step**.



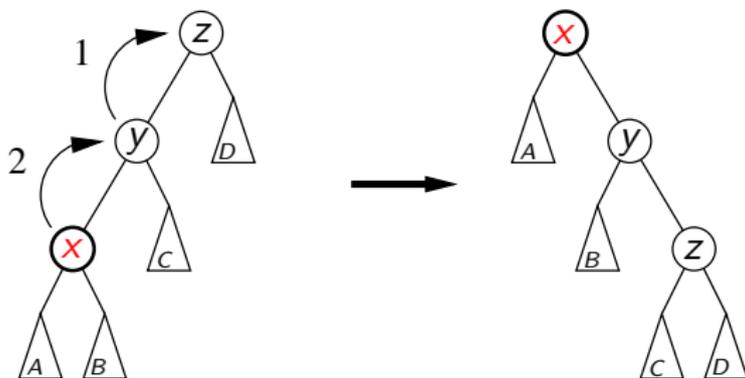
Custo real: 2

Alteração no potencial:

$$\begin{aligned}\Phi_i - \Phi_{i-1} &= \sum_w r_i(w) - \sum_w r_{i-1}(w) = \sum_w (r_i(w) - r_{i-1}(w)) \\ &= (r_i(x) - r_{i-1}(x)) + (r_i(y) - r_{i-1}(y)) + (r_i(z) - r_{i-1}(z)) \\ &= (r_i(y) + r_i(z)) - (r_{i-1}(x) + r_{i-1}(y)) \\ &\leq r_i(y) + r_i(z) - 2r_{i-1}(x)\end{aligned}$$

Análise amortizada dos splay steps

Caso do **rr splay step**.

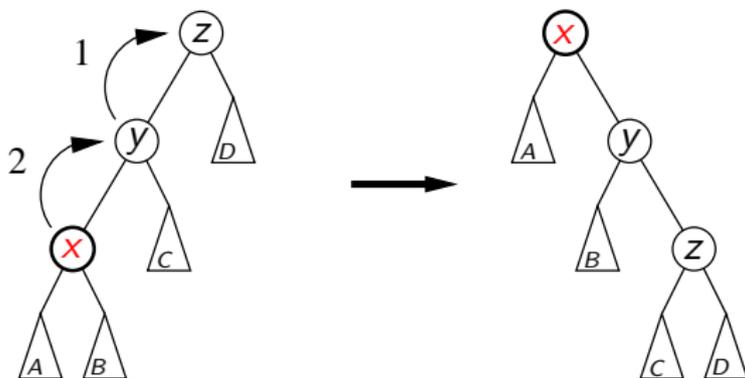


Custo real: 2

Alteração no potencial: $\Phi_i - \Phi_{i-1} \leq r_i(y) + r_i(z) - 2r_{i-1}(x)$

Análise amortizada dos splay steps

Caso do **rr splay step**.



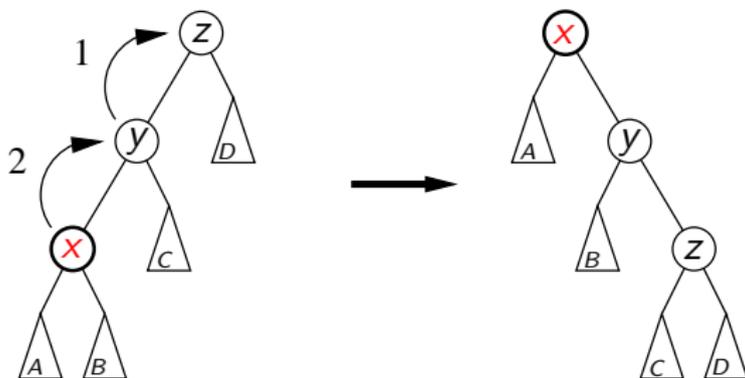
Custo real: 2

Alteração no potencial: $\Phi_i - \Phi_{i-1} \leq r_i(y) + r_i(z) - 2r_{i-1}(x)$

Custo amortizado: $\hat{c}_i \leq 2 + r_i(y) + r_i(z) - 2r_{i-1}(x)$

Análise amortizada dos splay steps

Caso do **rr splay step**.



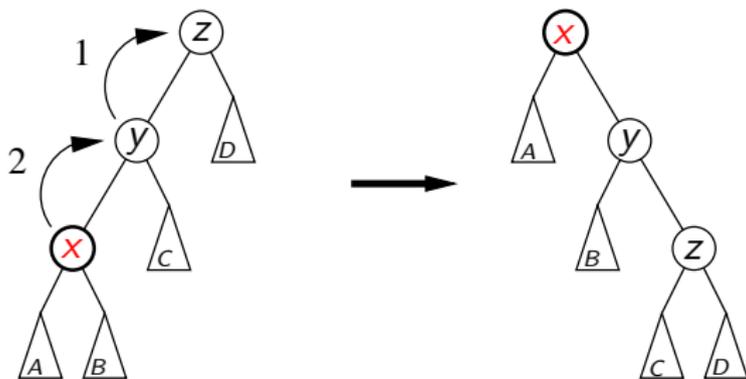
Custo real: 2

Alteração no potencial: $\Phi_i - \Phi_{i-1} \leq r_i(y) + r_i(z) - 2r_{i-1}(x)$

Custo amortizado: $\hat{c}_i \leq 2 + r_i(y) + r_i(z) - 2r_{i-1}(x)$

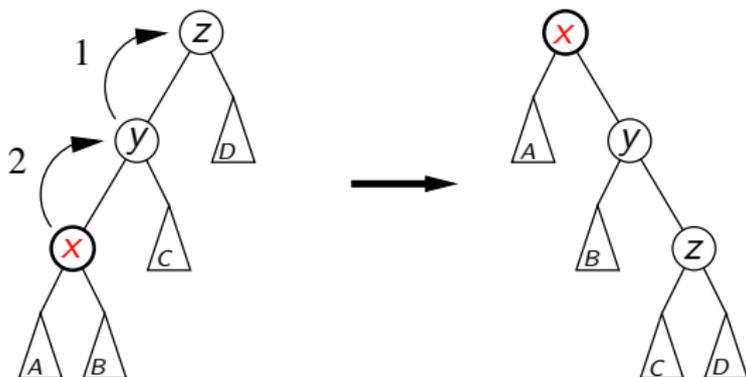
Queremos uma delimitação que dependa apenas de x .

Caso do rr splay step



Temos que $\frac{\log a + \log b}{2} \leq \log\left(\frac{a+b}{2}\right)$. Logo

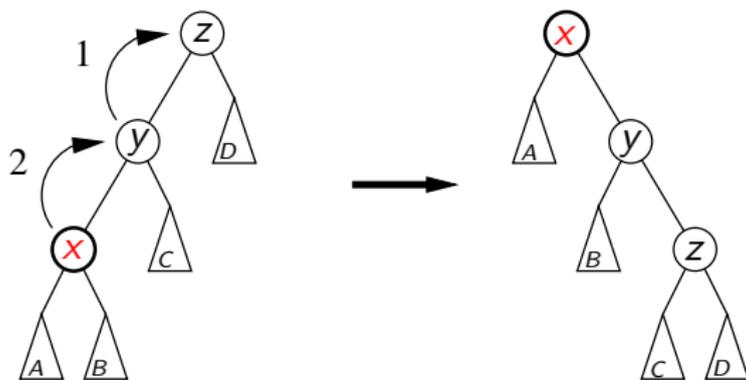
Caso do rr splay step



Temos que $\frac{\log a + \log b}{2} \leq \log\left(\frac{a+b}{2}\right)$. Logo

$$\begin{aligned}r_{i-1}(x) + r_i(z) &= \lg s_{i-1}(x) + \lg s_i(z) \\ &\leq 2 \lg\left(\frac{s_{i-1}(x) + s_i(z)}{2}\right) \\ &< 2 \lg\left(\frac{s_i(x)}{2}\right).\end{aligned}$$

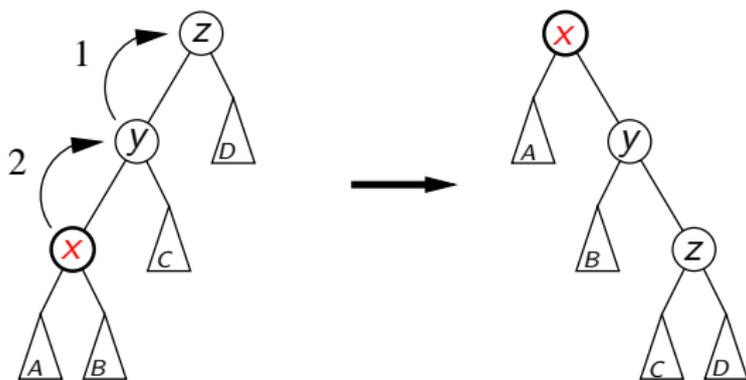
Caso do rr splay step



Temos que $\frac{\log a + \log b}{2} \leq \log\left(\frac{a+b}{2}\right)$. Logo

$$r_{i-1}(x) + r_i(z) < 2 \lg s_i(x) - 2 = 2 r_i(x) - 2.$$

Caso do rr splay step



Temos que $\frac{\log a + \log b}{2} \leq \log\left(\frac{a+b}{2}\right)$. Logo

$$r_{i-1}(x) + r_i(z) < 2 \lg s_i(x) - 2 = 2r_i(x) - 2.$$

Então

$$\begin{aligned}\hat{c}_i &\leq 2 + r_i(y) + r_i(z) - 2r_{i-1}(x) \\ &< 2 + r_i(x) + (2r_i(x) - r_{i-1}(x) - 2) - 2r_{i-1}(x) \\ &= 3(r_i(x) - r_{i-1}(x)).\end{aligned}$$

Análise amortizada dos splay steps

Analogamente podemos mostrar que

$$\hat{c}_i < 3(r_i(x) - r_{i-1}(x))$$

para rl splay steps, lr splay steps, e ll splay steps.

Análise amortizada dos splay steps

Analogamente podemos mostrar que

$$\hat{c}_i < 3(r_i(x) - r_{i-1}(x))$$

para rl splay steps, lr splay steps, e ll splay steps.

Para l splay steps e r splay steps, vale que

$$\hat{c}_i \leq 3(r_i(x) - r_{i-1}(x)) + 1.$$

Análise amortizada dos splay steps

Analogamente podemos mostrar que

$$\hat{c}_i < 3(r_i(x) - r_{i-1}(x))$$

para rl splay steps, lr splay steps, e ll splay steps.

Para l splay steps e r splay steps, vale que

$$\hat{c}_i \leq 3(r_i(x) - r_{i-1}(x)) + 1.$$

Se m é o número de splay steps e n o número de nós,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \hat{c}_i &\leq 3 \sum_{i=1}^m (r_i(x) - r_{i-1}(x)) + 1 \\ &= 3(r_m(x) - r_0(x)) + 1 \\ &\leq 3 \lg n + 1. \end{aligned}$$

Análise amortizada dos splay steps

Lembre-se que $\Phi_i = \sum_x r_i(x)$.

Ou seja, $\Phi_i \geq 0$ para todo i .

Análise amortizada dos splay steps

Lembre-se que $\Phi_i = \sum_x r_i(x)$.

Ou seja, $\Phi_i \geq 0$ para todo i .

Então vale que o custo do **SPLAY**(x, S) é

$$\sum_{i=1}^m c_i = \sum_{i=1}^m \hat{c}_i - \Phi_m + \Phi_0 \leq 3 \lg n + 1 - \Phi_m + \Phi_0.$$

Análise amortizada dos splay steps

Lembre-se que $\Phi_i = \sum_x r_i(x)$.

Ou seja, $\Phi_i \geq 0$ para todo i .

Então vale que o custo do **SPLAY**(x, S) é

$$\sum_{i=1}^m c_i = \sum_{i=1}^m \hat{c}_i - \Phi_m + \Phi_0 \leq 3 \lg n + 1 - \Phi_m + \Phi_0.$$

É possível mostrar algo semelhante para inserções em splay trees.

Análise amortizada dos splay steps

Lembre-se que $\Phi_i = \sum_x r_i(x)$.

Ou seja, $\Phi_i \geq 0$ para todo i .

Então vale que o custo do **SPLAY**(x, S) é

$$\sum_{i=1}^m c_i = \sum_{i=1}^m \hat{c}_i - \Phi_m + \Phi_0 \leq 3 \lg n + 1 - \Phi_m + \Phi_0.$$

É possível mostrar algo semelhante para inserções em splay trees.

E disso é possível concluir que o custo amortizado por operação em uma splay tree é $O(\lg n)$.

Inserções em splay trees

A inserção em splay trees é igual à inserção em ABB, seguida de uma chamada a **SPLAY** no elemento inserido.

Seja y_1 o pai de x após a inserção, e y_i o pai de y_{i-1} para $i = 1, \dots, k$, onde y_k é a raiz da árvore.

Inserções em splay trees

A inserção em splay trees é igual à inserção em ABB, seguida de uma chamada a **SPLAY** no elemento inserido.

Seja y_1 o pai de x após a inserção, e y_i o pai de y_{i-1} para $i = 1, \dots, k$, onde y_k é a raiz da árvore.

Considere a **variação do potencial** causado pela inserção.

r : potencial local antes da inserção

r' : potencial local depois da inserção

Inserções em splay trees

A inserção em splay trees é igual à inserção em ABB, seguida de uma chamada a **SPLAY** no elemento inserido.

Seja y_1 o pai de x após a inserção, e y_i o pai de y_{i-1} para $i = 1, \dots, k$, onde y_k é a raiz da árvore.

Considere a **variação do potencial** causado pela inserção.

r : potencial local antes da inserção

r' : potencial local depois da inserção

$$\begin{aligned}\Delta\Phi &= \sum_{j=1}^k (r'(y_j) - r(y_j)) \\ &= \sum_{j=1}^k (\lg(s(y_j) + 1) - \lg(s(y_j)))\end{aligned}$$

Inserções em splay trees

A inserção em splay trees é igual à inserção em ABB, seguida de uma chamada a **SPLAY** no elemento inserido.

Seja y_1 o pai de x após a inserção, e y_i o pai de y_{i-1} para $i = 1, \dots, k$, onde y_k é a raiz da árvore.

Considere a **variação do potencial** causado pela inserção.

r : potencial local antes da inserção

r' : potencial local depois da inserção

$$\begin{aligned}\Delta\Phi &= \sum_{j=1}^k (r'(y_j) - r(y_j)) = \sum_{j=1}^k (\lg(s(y_j) + 1) - \lg(s(y_j))) \\ &= \sum_{j=1}^k \lg \frac{s(y_j) + 1}{s(y_j)}\end{aligned}$$

Inserções em splay trees

A inserção em splay trees é igual à inserção em ABB, seguida de uma chamada a **SPLAY** no elemento inserido.

Seja y_1 o pai de x após a inserção, e y_i o pai de y_{i-1} para $i = 1, \dots, k$, onde y_k é a raiz da árvore.

Considere a **variação do potencial** causado pela inserção.

r : potencial local antes da inserção

r' : potencial local depois da inserção

$$\begin{aligned}\Delta\Phi &= \sum_{j=1}^k (r'(y_j) - r(y_j)) = \sum_{j=1}^k (\lg(s(y_j) + 1) - \lg(s(y_j))) \\ &= \sum_{j=1}^k \lg \frac{s(y_j) + 1}{s(y_j)} = \lg \left(\prod_{j=1}^k \frac{s(y_j) + 1}{s(y_j)} \right)\end{aligned}$$

Inserções em splay trees

Seja y_1 o pai de x após a inserção, e y_i o pai de y_{i-1} para $i = 1, \dots, k$, onde y_k é a raiz da árvore.

Considere a **variação do potencial** causado pela inserção.

r : potencial local antes da inserção

r' : potencial local depois da inserção

Inserções em splay trees

Seja y_1 o pai de x após a inserção, e y_i o pai de y_{i-1} para $i = 1, \dots, k$, onde y_k é a raiz da árvore.

Considere a **variação do potencial** causado pela inserção.

r : potencial local antes da inserção

r' : potencial local depois da inserção

$$\begin{aligned}\Delta\Phi &= \sum_{j=1}^k (r'(y_j) - r(y_j)) = \sum_{j=1}^k (\lg(s(y_j) + 1) - \lg(s(y_j))) \\ &= \sum_{j=1}^k \lg \frac{s(y_j) + 1}{s(y_j)} = \lg \left(\prod_{j=1}^k \frac{s(y_j) + 1}{s(y_j)} \right)\end{aligned}$$

Inserções em splay trees

Seja y_1 o pai de x após a inserção, e y_i o pai de y_{i-1} para $i = 1, \dots, k$, onde y_k é a raiz da árvore.

Considere a **variação do potencial** causado pela inserção.

r : potencial local antes da inserção

r' : potencial local depois da inserção

$$\begin{aligned}\Delta\Phi &= \sum_{j=1}^k (r'(y_j) - r(y_j)) = \sum_{j=1}^k (\lg(s(y_j) + 1) - \lg(s(y_j))) \\ &= \sum_{j=1}^k \lg \frac{s(y_j) + 1}{s(y_j)} = \lg \left(\prod_{j=1}^k \frac{s(y_j) + 1}{s(y_j)} \right) \\ &\leq \lg \left(\frac{s(y_2)}{s(y_1)} \cdot \frac{s(y_3)}{s(y_2)} \cdots \frac{s(y_k)}{s(y_{k-1})} \cdot \frac{s(y_k) + 1}{s(y_k)} \right) \quad (\text{pois } s(y_j) + 1 \leq s(y_{j+1}))\end{aligned}$$

Inserções em splay trees

Seja y_1 o pai de x após a inserção, e y_i o pai de y_{i-1} para $i = 1, \dots, k$, onde y_k é a raiz da árvore.

Considere a **variação do potencial** causado pela inserção.

r : potencial local antes da inserção

r' : potencial local depois da inserção

$$\begin{aligned}\Delta\Phi &= \sum_{j=1}^k \lg \frac{s(y_j) + 1}{s(y_j)} = \lg \left(\prod_{j=1}^k \frac{s(y_j) + 1}{s(y_j)} \right) \\ &\leq \lg \left(\frac{s(y_2)}{s(y_1)} \cdot \frac{s(y_3)}{s(y_2)} \cdots \frac{s(y_k)}{s(y_{k-1})} \cdot \frac{s(y_k) + 1}{s(y_k)} \right) \quad (\text{pois } s(y_j) + 1 \leq s(y_{j+1})) \\ &= \lg \left(\frac{s(y_k) + 1}{s(y_1)} \right)\end{aligned}$$

Inserções em splay trees

Seja y_1 o pai de x após a inserção, e y_i o pai de y_{i-1} para $i = 1, \dots, k$, onde y_k é a raiz da árvore.

Considere a **variação do potencial** causado pela inserção.

r : potencial local antes da inserção

r' : potencial local depois da inserção

$$\begin{aligned}\Delta\Phi &= \sum_{j=1}^k \lg \frac{s(y_j) + 1}{s(y_j)} = \lg \left(\prod_{j=1}^k \frac{s(y_j) + 1}{s(y_j)} \right) \\ &= \lg \left(\frac{s(y_2)}{s(y_1)} \cdot \frac{s(y_3)}{s(y_2)} \cdots \frac{s(y_k)}{s(y_{k-1})} \cdot \frac{s(y_k) + 1}{s(y_k)} \right) \quad (\text{pois } s(y_j) + 1 \leq s(y_{j+1})) \\ &= \lg \left(\frac{s(y_k) + 1}{s(y_1)} \right) \leq \lg(n + 1).\end{aligned}$$

Inserções em splay trees

Seja y_1 o pai de x após a inserção, e y_i o pai de y_{i-1} para $i = 1, \dots, k$, onde y_k é a raiz da árvore.

Considere a **variação do potencial** causado pela inserção.

r : potencial local antes da inserção

r' : potencial local depois da inserção

$$\begin{aligned}\Delta\Phi &= \sum_{j=1}^k \lg \frac{s(y_j) + 1}{s(y_j)} = \lg \left(\prod_{j=1}^k \frac{s(y_j) + 1}{s(y_j)} \right) \\ &= \lg \left(\frac{s(y_2)}{s(y_1)} \cdot \frac{s(y_3)}{s(y_2)} \cdots \frac{s(y_k)}{s(y_{k-1})} \cdot \frac{s(y_k) + 1}{s(y_k)} \right) \quad (\text{pois } s(y_j) + 1 \leq s(y_{j+1})) \\ &= \lg \left(\frac{s(y_k) + 1}{s(y_1)} \right) \leq \lg(n + 1).\end{aligned}$$

Então $\hat{c} \leq 0 + \lg n + 1 = \lg n + 1$. (inserção não faz rotações)

Concluindo a análise

Lembre-se que $\Phi_i \geq 0$ para todo i e agora $\Phi_0 = 0$.
(Começamos da árvore vazia.)

Concluindo a análise

Lembre-se que $\Phi_i \geq 0$ para todo i e agora $\Phi_0 = 0$.
(Começamos da árvore vazia.)

Então o custo total de m operações é

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^m c_i &= \sum_{i=1}^m \hat{c}_i - \Phi_m + \Phi_0 \\ &\leq \sum_{i=1}^m (3 \lg n_i + 1) - \Phi_m + \Phi_0 \\ &\leq 3m \lg m + m - 0 \\ &\leq 4m \lg m.\end{aligned}$$

Concluindo a análise

Lembre-se que $\Phi_i \geq 0$ para todo i e agora $\Phi_0 = 0$.
(Começamos da árvore vazia.)

Então o custo total de m operações é

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^m c_i &= \sum_{i=1}^m \hat{c}_i - \Phi_m + \Phi_0 \\ &\leq \sum_{i=1}^m (3 \lg n_i + 1) - \Phi_m + \Phi_0 \\ &\leq 3m \lg m + m - 0 \\ &\leq 4m \lg m.\end{aligned}$$

Portanto o custo amortizado por operação é $O(\lg m)$.