MAC 6711 - Tópicos de Análise de Algoritmos

Departamento de Ciência da Computação

Primeiro semestre de 2021

Lista 8

1. Decida se a seguinte afirmação é verdadeira ou falsa. Se for verdadeira, dê uma breve explicação. Se for falsa, dê um contra-exemplo.

   Verdadeiro ou falso? Em toda instância do Problema do Casamento Estável, existe um emparelhamento perfeito estável contendo um par (h, m) tal que m é a primeira da lista de preferências de h e h é o primeiro da lista de m.

2. Decida se a seguinte afirmação é verdadeira ou falsa. Se for verdadeira, dê uma breve explicação. Se for falsa, dê um contra-exemplo.

   Verdadeiro ou falso? Considere uma instância do Problema do Casamento Estável na qual existe um homem h e uma mulher m tal que m é a primeira da lista de preferências de h e h é o primeiro da lista de m. Então, em todo emparelhamento perfeito estável S para essa instância, $(h, m) \in S$.

3. O Problema do Casamento Estável, como discutido na aula, assume que todos os homens e mulheres têm uma lista totalmente ordenada de preferências. Nesse problema, vamos considerar a versão do problema em que homens e mulheres podem ser *indiferentes* em relação a algumas opções. Como antes, temos um conjunto H de n homens e um conjunto W de n mulheres. Suponha que cada homem e cada mulher ordena os membros do outro gênero, mas agora possivelmente deixando alguns membros empatados. Por exemplo, para um caso em que $n = 4$, uma mulher poderia dizer que o homem h_1 vem em primeiro na sua lista, em segundo vêm os homens h_2 e h_3 empatados, e em último vem o homem h_4. Diremos que m prefere h a h' se h está melhor posicionado na sua lista (não empatado).

   Com indiferenças nas listas, podem haver dois jeitos de definir estabilidade. E para cada jeito podemos nos perguntar se existe um emparelhamento perfeito estável.

   (a) Uma *instabilidade forte* num emparelhamento perfeito S consiste em um homem h e uma mulher m tais que cada um deles prefere ao outro do que seu parceiro atual em S. Será que sempre existe um emparelhamento perfeito sem instabilidades fortes? Ou dê um exemplo de um conjunto de homens e mulheres com suas listas de preferências para o qual todo emparelhamento perfeito tem uma instabilidade forte, ou dê um algoritmo que garantidamente encontre um emparelhamento perfeito sem instabilidades fortes.

   (b) Uma *instabilidade fraca* num emparelhamento perfeito S consiste em um homem h e uma mulher m tais que seus parceiros são m' e h', respectivamente, e uma das seguintes condições vale:

   - h prefere m a m', e m prefere h a h' ou é indiferente entre os dois (ou seja, os empatou na sua lista); ou
   - m prefere h a h', e h prefere m a m' ou é indiferente entre as duas (ou seja, as empatou na sua lista).

   Em palavras, o pareamento entre h e m ou é preferível para ambos, ou é preferível para um deles e indiferente para o outro. Será que sempre existe um emparelhamento perfeito sem instabilidades fracas? Ou dê um exemplo de um conjunto de homens e mulheres com suas listas de preferências para o qual todo emparelhamento perfeito tem uma instabilidade fraca, ou dê um algoritmo que garantidamente encontre um emparelhamento perfeito sem instabilidades fracas.

4. O *problema do empacotamento unidimensional* (*bin packing problem*) consiste no seguinte:

   > Dados um número inteiro positivo n e, para cada i em $\{1, \ldots, n\}$, um número racional c_i no intervalo fechado $[0, 1]$, encontrar uma partição $\mathcal{B}$ de $\{1, \ldots, n\}$ tal que $c(B) \leq 1$ para todo B em $\mathcal{B}$ e $|\mathcal{B}|$ seja mínimo.

   Mostre que o algoritmo abaixo é uma 2-aproximação para ele. Exiba uma instância (n, c) para a qual este algoritmo produz uma partição $\mathcal{B}$ tal que $|\mathcal{B}| = 2\,\mathrm{opt} - 1$, onde opt pode ter um valor arbitrariamente grande.

   EMPAC-NEXT-FIT (n, c)
   $k \leftarrow 1$
   $B_k \leftarrow \emptyset$
   PARA i DE 1 A n FAÇA
       SE $c_i \leq 1 - c(B_k)$
           ENTÃO $B_k \leftarrow B_k \cup \{i\}$
           SENÃO $k \leftarrow k + 1$
                   $B_k \leftarrow \{i\}$
   DEVOLVA $\{B_1, \ldots, B_k\}$

5. Considere a variante do TSP onde buscamos um caminho hamiltoniano de custo mínimo no grafo dado. Modifique o algoritmo de Christofides para que ele seja uma $\frac{3}{2}$-aproximação para esta variante do TSP. Mostre não apenas o algoritmo, mas também a análise da razão de aproximação.

6. Considere outras duas variantes do TSP. Na primeira, queremos um caminho hamiltoniano de custo mínimo dentre os que começam em um dado vértice s. Na segunda, queremos um caminho hamiltoniano de custo mínimo dentre os que começam em um dado vértice s e terminam em um dado vértice t. Modifique o algoritmo de Christofides para que ele seja um algoritmo de aproximação com razão menor que 2 para cada uma destas variantes.

7. Mostre que a 2-aproximação e o algoritmo de Christofides para o TSP métrico podem produzir péssimos resultados se aplicados a instâncias do TSP que não satisfazem a desigualdade triangular.