

Multiplicação de inteiros gigantesco

KT cap 5.5

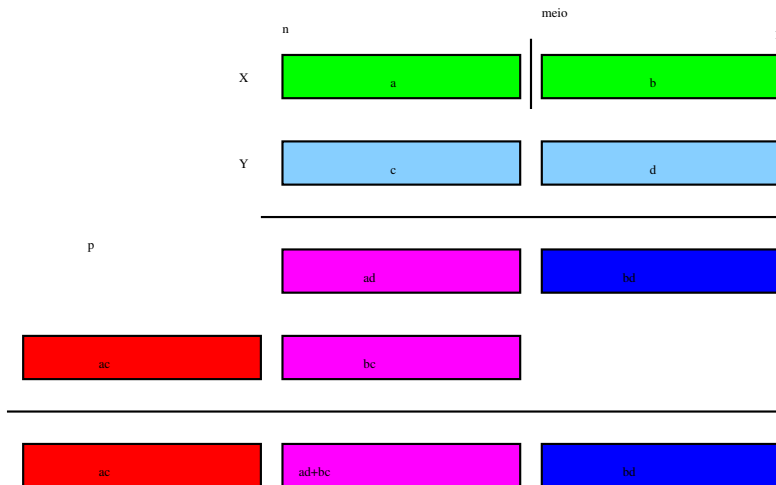
Algoritmo do ensino fundamental

The diagram illustrates the elementary school multiplication algorithm for the product of 123456789 and 987654321. The numbers are aligned to the right, with the multiplier 987654321 on top and the multiplicand 123456789 below it. A horizontal line separates the two numbers. The multiplication process is shown by a series of partial products, each shifted one position to the left relative to the previous one. The partial products are: 123456789 (multiplied by 1), 1234567890 (multiplied by 2), 12345678900 (multiplied by 3), 123456789000 (multiplied by 4), 1234567890000 (multiplied by 5), 12345678900000 (multiplied by 6), 123456789000000 (multiplied by 7), 1234567890000000 (multiplied by 8), and 12345678900000000 (multiplied by 9). The final result is the sum of all these partial products, which is 12345678901234567890.

```
      987654321
    × 123456789
    -----
      123456789
     2469135780
    37038461700
   493827461000
  6172892760000
 74075109000000
 864212905000000
 9876747200000000
123456789000000000
-----
12345678901234567890
```

O algoritmo do ensino fundamental é $\Theta(n^2)$.

Divisão e conquista



$$X \cdot Y = A \cdot C \times 10^n + (A \cdot D + B \cdot C) \times 10^{\lceil n/2 \rceil} + B \cdot D$$

Exemplo

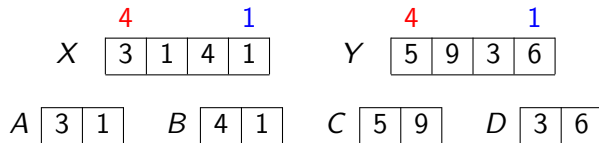
X

	4		1	
3	1	4	1	

Y

	4		1	
5	9	3	6	

Exemplo



Exemplo

$$\begin{array}{c}
 \text{X} \quad \begin{array}{c} \text{4} \qquad \qquad \text{1} \\ \boxed{3} \boxed{1} \boxed{4} \boxed{1} \end{array} \qquad \text{Y} \quad \begin{array}{c} \text{4} \qquad \qquad \text{1} \\ \boxed{5} \boxed{9} \boxed{3} \boxed{6} \end{array} \\
 \\
 \text{A} \quad \boxed{3} \boxed{1} \qquad \text{B} \quad \boxed{4} \boxed{1} \qquad \text{C} \quad \boxed{5} \boxed{9} \qquad \text{D} \quad \boxed{3} \boxed{6}
 \end{array}$$

$$X \cdot Y = A \cdot C \times 10^4 + (A \cdot D + B \cdot C) \times 10^2 + B \cdot D$$

$$A \cdot C = 1829 \qquad (A \cdot D + B \cdot C) = 1116 + 2419 = 3535$$

$$B \cdot D = 1476$$

$$\begin{array}{r}
 A \cdot C \qquad \qquad \qquad 1 \ 8 \ 2 \ 9 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \\
 (A \cdot D + B \cdot C) \qquad \qquad \qquad 3 \ 5 \ 3 \ 5 \ 0 \ 0 \\
 B \cdot D \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad 1 \ 4 \ 7 \ 6 \\
 \hline
 X \cdot Y = \qquad \qquad \qquad 1 \ 8 \ 6 \ 4 \ 4 \ 9 \ 7 \ 6
 \end{array}$$

Algoritmo de Multi-DC

Algoritmo recebe inteiros $X[1..n]$ e $Y[1..n]$ e devolve $X \cdot Y$.

MULT (X, Y, n)

```
1  se  $n = 1$  devolva  $X \cdot Y$ 
2   $q \leftarrow \lceil n/2 \rceil$ 
3   $A \leftarrow X[q + 1..n]$      $B \leftarrow X[1..q]$ 
4   $C \leftarrow Y[q + 1..n]$      $D \leftarrow Y[1..q]$ 
5   $E \leftarrow \text{MULT}(A, C, \lfloor n/2 \rfloor)$ 
6   $F \leftarrow \text{MULT}(B, D, \lceil n/2 \rceil)$ 
7   $G \leftarrow \text{MULT}(A, D, \lceil n/2 \rceil)$ 
8   $H \leftarrow \text{MULT}(B, C, \lceil n/2 \rceil)$ 
9   $R \leftarrow E \times 10^n + (G + H) \times 10^{\lceil n/2 \rceil} + F$ 
10 devolva  $R$ 
```

$T(n)$ = consumo de tempo do algoritmo
para multiplicar dois inteiros com n algarismos.

Consumo de tempo

linha	todas as execuções da linha	
1	=	$\Theta(1)$
2	=	$\Theta(1)$
3	=	$\Theta(n)$
4	=	$\Theta(n)$
5	=	$T(\lfloor n/2 \rfloor)$
6	=	$T(\lceil n/2 \rceil)$
7	=	$T(\lceil n/2 \rceil)$
8	=	$T(\lceil n/2 \rceil)$
9	=	$\Theta(n)$
10	=	$\Theta(1)$
total	=	$T(\lfloor n/2 \rfloor) + 3 T(\lceil n/2 \rceil) + \Theta(n)$

Consumo de tempo

Sabemos que

$$T(1) = \Theta(1)$$

$$T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + 3 T(\lceil n/2 \rceil) + \Theta(n) \quad \text{para } n = 2, 3, 4, \dots$$

está na **mesma classe** Θ que a solução de

$$T'(n) = 4T'(n/2) + n$$

n	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512
$T'(n)$	1	6	28	120	496	2016	8128	32640	130816	523776

Conclusões

$$T'(n) \text{ é } \Theta(n^2).$$

$$T(n) \text{ é } \Theta(n^2).$$

O consumo de tempo do algoritmo **MULT** é $\Theta(n^2)$.

Tanto trabalho por nada ...
Será?!?

Pensar pequeno

Olhar para números com 2 algarismos ($n=2$).

Suponha $X = a b$ e $Y = c d$.

Se cada multiplicação custa R\$ 1,00 e
cada soma custa R\$ 0,01, quanto custa $X \cdot Y$?

Pensar pequeno

Olhar para números com 2 algarismos ($n=2$).

Suponha $X = a b$ e $Y = c d$.

Se cada multiplicação custa R\$ 1,00 e
cada soma custa R\$ 0,01, quanto custa $X \cdot Y$?

Eis $X \cdot Y$ por R\$ 4,03:

X	a	b
Y	c	d
	ad	bd
	ac	bc
$X \cdot Y$	ac	$ad + bc$
		bd

$$X \cdot Y = ac \times 10^2 + (ad + bc) \times 10^1 + bd$$

Pensar pequeno

Olhar para números com 2 algarismos ($n=2$).

Suponha $X = a b$ e $Y = c d$.

Se cada multiplicação custa R\$ 1,00 e
cada soma custa R\$ 0,01, quanto custa $X \cdot Y$?

Eis $X \cdot Y$ por R\$ 4,03:

$$\begin{array}{r} X \qquad \qquad a \qquad b \\ Y \qquad \qquad c \qquad d \\ \hline \qquad \qquad \qquad ad \qquad bd \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \\ \hline X \cdot Y \quad ac \quad ad + bc \quad bd \end{array}$$

$$X \cdot Y = ac \times 10^2 + (ad + bc) \times 10^1 + bd$$

Solução mais barata?

Pensar pequeno

Olhar para números com 2 algarismos ($n=2$).

Suponha $X = a b$ e $Y = c d$.

Se cada multiplicação custa R\$ 1,00 e
cada soma custa R\$ 0,01, quanto custa $X \cdot Y$?

Eis $X \cdot Y$ por R\$ 4,03:

$$\begin{array}{r} X \qquad \qquad a \qquad b \\ Y \qquad \qquad c \qquad d \\ \hline \qquad \qquad \qquad ad \qquad bd \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \\ \hline X \cdot Y \quad ac \quad ad + bc \quad bd \end{array}$$

$$X \cdot Y = ac \times 10^2 + (ad + bc) \times 10^1 + bd$$

Solução mais barata? Gauss faz por R\$ 3,06!

$X \cdot Y$ por apenas R\$ 3,06

X		a	b
Y		c	d
		ad	bd
		ac	bc
$X \cdot Y$		ac	$ad + bc$
			bd

$X \cdot Y$ por apenas R\$ 3,06

X	a	b	
Y	c	d	
	ad	bd	
	ac	bc	
$X \cdot Y$	ac	$ad + bc$	bd

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd \Rightarrow$$
$$ad + bc = (a + b)(c + d) - ac - bd$$

$$g = (a + b)(c + d) \quad e = ac \quad f = bd \quad h = g - e - f$$

$$X \cdot Y \text{ (por R\$ 3,06)} = e \times 10^2 + h \times 10^1 + f$$

Exemplo

$$\begin{array}{llll} X = & 2133 & Y = & 2312 \\ \textcolor{red}{a}c = & ? & \textcolor{blue}{b}d = & ? \end{array} \quad X \cdot Y = ? \quad (a + b)(c + d) = ?$$

Exemplo

$$\begin{array}{llll} X = & 2133 & Y = & 2312 \\ \textcolor{red}{a}c = & ? & \textcolor{blue}{b}d = & ? \end{array} \quad X \cdot Y = ? \quad (a+b)(c+d) = ?$$

$$\begin{array}{llll} X = & 21 & Y = & 23 \\ \textcolor{red}{a}c = & ? & \textcolor{blue}{b}d = & ? \end{array} \quad X \cdot Y = ? \quad (a+b)(c+d) = ?$$

Exemplo

$$\begin{array}{llll} X = & 2133 & Y = & 2312 \\ \textcolor{red}{ac} = & ? & \textcolor{blue}{bd} = & ? \end{array} \quad X \cdot Y = ? \quad (a+b)(c+d) = ?$$

$$\begin{array}{llll} X = & 21 & Y = & 23 \\ \textcolor{red}{ac} = & ? & \textcolor{blue}{bd} = & ? \end{array} \quad X \cdot Y = ? \quad (a+b)(c+d) = ?$$

$$X = 2 \quad Y = 2 \quad X \cdot Y = 4$$

Exemplo

$$\begin{array}{llll} X = & 2133 & Y = & 2312 \\ \textcolor{red}{a}c = & ? & \textcolor{blue}{b}d = & ? \end{array} \quad X \cdot Y = ? \quad (a+b)(c+d) = ?$$

$$\begin{array}{llll} X = & 21 & Y = & 23 \\ \textcolor{red}{a}c = & 4 & \textcolor{blue}{b}d = & ? \end{array} \quad X \cdot Y = ? \quad (a+b)(c+d) = ?$$

Exemplo

$$\begin{array}{lll} X = & 2133 & Y = 2312 \\ \textcolor{red}{a}c = & ? & \textcolor{blue}{b}d = ? \end{array} \quad X \cdot Y = ? \quad (a+b)(c+d) = ?$$

$$\begin{array}{lll} X = & 21 & Y = 23 \\ \textcolor{red}{a}c = & 4 & \textcolor{blue}{b}d = ? \end{array} \quad X \cdot Y = ? \quad (a+b)(c+d) = ?$$

$$X = 1 \quad Y = 3 \quad X \cdot Y = 3$$

Exemplo

$$\begin{array}{llll} X = & 2133 & Y = & 2312 \\ \textcolor{red}{a}c = & ? & \textcolor{blue}{b}d = & ? \end{array} \quad X \cdot Y = ? \quad (a+b)(c+d) = ?$$

$$\begin{array}{llll} X = & 21 & Y = & 23 \\ \textcolor{red}{a}c = & 4 & \textcolor{blue}{b}d = & 3 \end{array} \quad X \cdot Y = ? \quad (a+b)(c+d) = ?$$

Exemplo

$$\begin{array}{lll} X = 2133 & Y = 2312 & X \cdot Y = ? \\ \textcolor{red}{a}c = ? & \textcolor{blue}{b}d = ? & (a + b)(c + d) = ? \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} X = 21 & Y = 23 & X \cdot Y = ? \\ \textcolor{red}{a}c = 4 & \textcolor{blue}{b}d = 3 & (a + b)(c + d) = ? \end{array}$$

$$X = 3 \quad Y = 5 \quad X \cdot Y = 15$$

Exemplo

$$\begin{array}{lll} X = 2133 & Y = 2312 & X \cdot Y = ? \\ \textcolor{red}{ac} = ? & \textcolor{blue}{bd} = ? & (a + b)(c + d) = ? \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} X = 21 & Y = 23 & X \cdot Y = 483 \\ \textcolor{red}{ac} = 4 & \textcolor{blue}{bd} = 3 & (a + b)(c + d) = 15 \end{array}$$

Exemplo

$$\begin{array}{llll} X = & 2133 & Y = & 2312 \\ \textcolor{red}{a}c = & 483 & \textcolor{blue}{b}d = & ? \end{array} \quad \begin{array}{ll} X \cdot Y = & ? \\ (a + b)(c + d) = & ? \end{array}$$

Exemplo

$$\begin{array}{llll} X = & 2133 & Y = & 2312 & X \cdot Y = & ? \\ ac = & 483 & bd = & ? & (a+b)(c+d) = & ? \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} X = & 33 & Y = & 12 & X \cdot Y = & ? \\ ac = & ? & bd = & ? & (a+b)(c+d) = & ? \end{array}$$

Exemplo

$$\begin{array}{llll} X = & 2133 & Y = & 2312 & X \cdot Y = & ? \\ \textcolor{red}{ac} = & 483 & \textcolor{blue}{bd} = & ? & (a + b)(c + d) = & ? \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} X = & 33 & Y = & 12 & X \cdot Y = & 396 \\ \textcolor{red}{ac} = & 3 & \textcolor{blue}{bd} = & 6 & (a + b)(c + d) = & 18 \end{array}$$

Exemplo

$$\begin{array}{llll} X = & 2133 & Y = & 2312 & X \cdot Y = & ? \\ \textcolor{red}{ac} = & 483 & \textcolor{blue}{bd} = & 396 & (a + b)(c + d) = & ? \end{array}$$

Exemplo

$$\begin{array}{llll} X = & 2133 & Y = & 2312 & X \cdot Y = & ? \\ \textcolor{red}{ac} = & 483 & \textcolor{blue}{bd} = & 396 & (a + b)(c + d) = & ? \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} X = & 54 & Y = & 35 & X \cdot Y = & ? \\ \textcolor{red}{ac} = & ? & \textcolor{blue}{bd} = & ? & (a + b)(c + d) = & ? \end{array}$$

Exemplo

$$\begin{array}{llll} X = & 2133 & Y = & 2312 & X \cdot Y = & ? \\ ac = & 483 & bd = & 396 & (a+b)(c+d) = & ? \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} X = & 54 & Y = & 35 & X \cdot Y = & 1890 \\ ac = & 15 & bd = & 20 & (a+b)(c+d) = & 72 \end{array}$$

Exemplo

$$\begin{array}{llll} X = & 2133 & Y = & 2312 \\ \textcolor{red}{a}c = & 483 & \textcolor{blue}{b}d = & 396 \end{array} \quad X \cdot Y = ? \quad (a+b)(c+d) = 1890$$

Exemplo

$$\begin{array}{llll} X = & 2133 & Y = & 2312 \\ \textcolor{red}{a}c = & 483 & \textcolor{blue}{b}d = & 396 \end{array} \quad X \cdot Y = 4931496 \quad (a+b)(c+d) = 1890$$

Algoritmo Multi

Algoritmo recebe inteiros $X[1..n]$ e $Y[1..n]$
e devolve $X \cdot Y$ (Karatsuba e Ofman).

KARATSUBA (X, Y, n)

```
1  se  $n \leq 3$  devolva  $X \cdot Y$ 
2   $q \leftarrow \lceil n/2 \rceil$ 
3   $A \leftarrow X[q+1..n]$      $B \leftarrow X[1..q]$ 
4   $C \leftarrow Y[q+1..n]$      $D \leftarrow Y[1..q]$ 
5   $E \leftarrow \text{KARATSUBA}(A, C, \lfloor n/2 \rfloor)$ 
6   $F \leftarrow \text{KARATSUBA}(B, D, \lceil n/2 \rceil)$ 
7   $G \leftarrow \text{KARATSUBA}(A+B, C+D, \lceil n/2 \rceil + 1)$ 
8   $H \leftarrow G - F - E$ 
9   $R \leftarrow E \times 10^n + H \times 10^{\lceil n/2 \rceil} + F$ 
10 devolva  $R$ 
```

$T(n)$ = consumo de tempo do algoritmo
para multiplicar dois inteiros com n algarismos.

Consumo de tempo

linha	todas as execuções da linha
1	$= \Theta(1)$
2	$= \Theta(1)$
3	$= \Theta(n)$
4	$= \Theta(n)$
5	$= T(\lfloor n/2 \rfloor)$
6	$= T(\lceil n/2 \rceil)$
7	$= T(\lceil n/2 \rceil + 1)$
8	$= \Theta(n)$
9	$= \Theta(n)$
10	$= \Theta(n)$
total	$= T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lceil n/2 \rceil + 1) + \Theta(n)$

Consumo de tempo

Sabemos que

$$T(n) = \Theta(1) \quad \text{para } n = 1, 2, 3$$

$$T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lceil n/2 \rceil + 1) + \Theta(n) \quad n \geq 4$$

está na mesma classe Θ que a solução de

$$T'(n) = 3T'(n/2) + n$$

n	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512
$T'(n)$	1	5	19	65	211	665	2059	6305	19171	58025

Conclusões

$$T'(n) \text{ é } \Theta(n^{\lg 3}).$$

$$\text{Logo } T(n) \text{ é } \Theta(n^{\lg 3}).$$

O consumo de tempo do algoritmo **KARATSUBA** é $\Theta(n^{\lg 3})$
($1,584 < \lg 3 < 1,585$).

Mais conclusões

Consumo de tempo de
algoritmos para multiplicação de inteiros:

Jardim de infância

$$\Theta(n 10^n)$$

Ensino fundamental

$$\Theta(n^2)$$

Karatsuba e Ofman '60

$$O(n^{1.585})$$

Toom e Cook '63

$$O(n^{1.465})$$

(divisão e conquista; generaliza o acima)

Schönhage e Strassen '71

$$O(n \lg n \lg \lg n)$$

(FFT em anéis de tamanho específico)

Fürer '07

$$O(n \lg n 2^{O(\log^* n)})$$

Harvey e van der Hoeven '20

$$O(n \log n)$$

(Gaussian resampling, multidimensional DFT,
Nussbaumer's fast polynomial transforms)

Ambiente experimental

A **plataforma utilizada** nos experimentos é um PC rodando Linux Debian ?? com um processador Pentium II de 233 MHz e 128MB de memória RAM .

Os **códigos estão compilados** com o gcc versão 2.7.2.1 e opção de compilação -O2.

As implementações comparadas neste experimento são as do algoritmo do ensino fundamental e do algoritmo **KARATSUBA**.

O programa foi escrito por Carl Burch:

<http://www-2.cs.cmu.edu/~cburch/251/karat/>.

Resultados experimentais

n	Ensino Fund.	KARATSUBA
4	0.005662	0.005815
8	0.010141	0.010600
16	0.020406	0.023643
32	0.051744	0.060335
64	0.155788	0.165563
128	0.532198	0.470810
256	1.941748	1.369863
512	7.352941	4.032258

Tempos em 10^3 segundos.

Multiplicação de matrizes

Problema: Dadas duas matrizes $X[1..n, 1..n]$ e $Y[1..n, 1..n]$, calcular o **produto** $X \cdot Y$.

O algoritmo tradicional de multiplicação de matrizes consome tempo $\Theta(n^3)$.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}$$

$$r = ae + bg$$

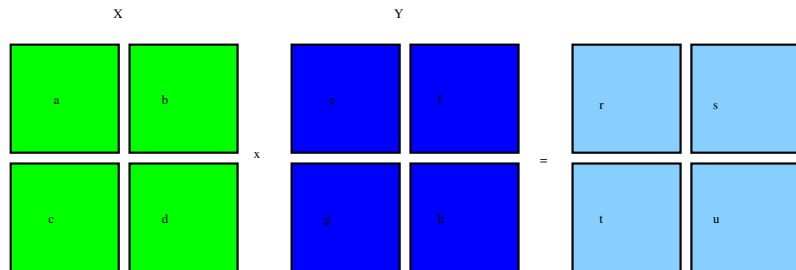
$$s = af + bh$$

$$t = ce + dg$$

$$u = cf + dh \tag{1}$$

Solução custa R\$ 8,04

Divisão e conquista



$$R = AE + BG$$

$$S = AF + BH$$

$$T = CE + DG$$

$$U = CF + DH$$

Algoritmo de Multi-Mat

Algoritmo recebe inteiros $X[1..n]$ e $Y[1..n]$ e devolve $X \cdot Y$.

MULTI-M (X, Y, n)

- 1 se $n = 1$ devolva $X \cdot Y$
- 2 $(A, B, C, D) \leftarrow \text{PARTICIONE}(X, n)$
- 3 $(E, F, G, H) \leftarrow \text{PARTICIONE}(Y, n)$
- 4 $R \leftarrow \text{MULTI-M}(A, E, n/2) + \text{MULTI-M}(B, G, n/2)$
- 5 $S \leftarrow \text{MULTI-M}(A, F, n/2) + \text{MULTI-M}(B, H, n/2)$
- 6 $T \leftarrow \text{MULTI-M}(C, E, n/2) + \text{MULTI-M}(D, G, n/2)$
- 7 $U \leftarrow \text{MULTI-M}(C, F, n/2) + \text{MULTI-M}(D, H, n/2)$
- 8 $P \leftarrow \text{CONSTRÓI-MAT}(R, S, T, U)$
- 9 devolva P

$T(n)$ = consumo de tempo do algoritmo
para multiplicar duas matrizes de n linhas e n colunas.

Consumo de tempo

linha	todas as execuções da linha
1	$= \Theta(1)$
2	$= \Theta(n^2)$
3	$= \Theta(n^2)$
4	$= T(n/2) + T(n/2)$
5	$= T(n/2) + T(n/2)$
6	$= T(n/2) + T(n/2)$
7	$= T(n/2) + T(n/2)$
8	$= \Theta(n^2)$
9	$= \Theta(n^2)$
total	$= 8 T(n/2) + \Theta(n^2)$

Consumo de tempo

As dicas no nosso estudo de recorrências sugere que a solução da recorrência

$$\begin{aligned}T(1) &= \Theta(1) \\T(n) &= 8 T(n/2) + \Theta(n^2) \quad \text{para } n = 2, 3, 4, \dots\end{aligned}$$

está na mesma classe Θ que a solução de

$$T'(n) = 8T'(n/2) + n^2$$

n	1	2	4	8	16	32	64	128	256
$T'(n)$	1	12	112	960	7936	64512	520192	4177920	33488896

Conclusões

$$T'(n) \text{ é } \Theta(n^3).$$

$$\text{Logo } T(n) \text{ é } \Theta(n^3).$$

O consumo de tempo do algoritmo **MULTI-M** é $\Theta(n^3)$.

Strassen: $X \cdot Y$ por apenas R\$ 7,18

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}$$

Strassen: $X \cdot Y$ por apenas R\$ 7,18

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}$$

$$p_1 = a(f - h) = af - ah$$

$$p_2 = (a + b)h = ah + bh$$

$$p_3 = (c + d)e = ce + de$$

$$p_4 = d(g - e) = dg - de$$

$$p_5 = (a + d)(e + h) = ae + ah + de + dh$$

$$p_6 = (b - d)(g + h) = bg + bh - dg - dh$$

$$p_7 = (a - c)(e + f) = ae + af - ce - cf$$

Strassen: $X \cdot Y$ por apenas R\$ 7,18

$$p_1 = a(f - h) = af - ah$$

$$p_2 = (a + b)h = ah + bh$$

$$p_3 = (c + d)e = ce + de$$

$$p_4 = d(g - e) = dg - de$$

$$p_5 = (a + d)(e + h) = ae + ah + de + dh$$

$$p_6 = (b - d)(g + h) = bg + bh - dg - dh$$

$$p_7 = (a - c)(e + f) = ae + af - ce - cf$$

$$r = p_5 + p_4 - p_2 + p_6 = ae + bg$$

$$s = p_1 + p_2 = af + bh$$

$$t = p_3 + p_4 = ce + dg$$

$$u = p_5 + p_1 - p_3 - p_7 = cf + dh$$

Algoritmo de Strassen

STRASSEN (X, Y, n)

- 1 se $n = 1$ devolva $X \cdot Y$
- 2 $(A, B, C, D) \leftarrow \text{PARTICIONE}(X, n)$
- 3 $(E, F, G, H) \leftarrow \text{PARTICIONE}(Y, n)$
- 4 $P_1 \leftarrow \text{STRASSEN}(A, F - H, n/2)$
- 5 $P_2 \leftarrow \text{STRASSEN}(A + B, H, n/2)$
- 6 $P_3 \leftarrow \text{STRASSEN}(C + D, E, n/2)$
- 7 $P_4 \leftarrow \text{STRASSEN}(D, G - E, n/2)$
- 8 $P_5 \leftarrow \text{STRASSEN}(A + D, E + H, n/2)$
- 9 $P_6 \leftarrow \text{STRASSEN}(B - D, G + H, n/2)$
- 10 $P_7 \leftarrow \text{STRASSEN}(A - C, E + F, n/2)$
- 11 $R \leftarrow P_5 + P_4 - P_2 + P_6$
- 12 $S \leftarrow P_1 + P_2$
- 13 $T \leftarrow P_3 + P_4$
- 14 $U \leftarrow P_5 + P_1 - P_3 - P_7$
- 15 devolva $P \leftarrow \text{CONSTRÓI-MAT}(R, S, T, U)$

Consumo de tempo

linha	todas as execuções da linha
1	$= \Theta(1)$
2-3	$= \Theta(n^2)$
4-10	$= 7, T(n/2) + \Theta(n^2)$
11-14	$= \Theta(n^2)$
15	$= \Theta(n^2)$
total	$= 7 T(n/2) + \Theta(n^2)$

Consumo de tempo

As dicas no nosso estudo de recorrências sugere que a solução da recorrência

$$\begin{aligned}T(1) &= \Theta(1) \\T(n) &= 7 T(n/2) + \Theta(n^2) \quad \text{para } n = 2, 3, 4, \dots\end{aligned}$$

está na **mesma classe Θ** que a solução de

$$T'(n) = 7T'(n/2) + n^2$$

n	1	2	4	8	16	32	64	128	256
$T'(n)$	1	11	93	715	5261	37851	269053	1899755	13363821

Conclusões

$$T'(n) \text{ é } \Theta(n^{\lg 7}).$$

$$\text{Logo } T(n) \text{ é } \Theta(n^{\lg 7}).$$

O consumo de tempo do algoritmo **STRASSEN** é $\Theta(n^{\lg 7})$
($2,80 < \lg 7 < 2,81$).

Mais conclusões

Consumo de tempo de algoritmos para multiplicação de matrizes:

Ensino fundamental	$\Theta(n^3)$
Strassen (1969)	$O(n^{2.807})$
$\vdots$	$\vdots$
Coppersmith e Winograd (1987)	$O(n^{2.3755})$
Stothers (2010)	$O(n^{2.3736})$
Williams (2013)	$O(n^{2.3728642})$
Le Gall (2014)	$O(n^{2.3728639})$
Alman e Williams (2020)	$O(n^{2.3728596})$
Duan, Wu e Zhou (2023)	$O(n^{2.371866})$
Williams, Xu, Xu e Zhou (2024)	$O(n^{2.371552})$