

Complexidade computacional

Classifica os problemas em relação
à dificuldade de resolvê-los algoritmicamente.

CLRS 34

Problemas completos em NP

Um problema Π em NP é NP-completo se cada problema em NP pode ser reduzido a Π .

Teorema de S. Cook e L.A. Levin:
Satisfatibilidade é NP-completo.

Π e Π' problemas de decisão.

Se $\Pi \leq_P \Pi'$ e Π é NP-completo, então Π' é NP-completo.

Existe um algoritmo polinomial para um problema NP-completo se e somente se $P = NP$.

Demonstração de NP-completude

Para demonstrar que um problema Π' é NP-completo podemos utilizar o Teorema de Cook e Levin.

Demonstração de NP-completude

Para demonstrar que um problema Π' é NP-completo podemos utilizar o Teorema de Cook e Levin.

Para isto devemos:

- ▶ Demonstrar que Π' está em NP.
- ▶ Escolher um problema Π sabidamente NP-completo.
- ▶ Demonstrar que $\Pi \leq_P \Pi'$.

3-Satisfatibilidade

Problema: Dada uma fórmula booleana ϕ nas variáveis $x_1, \dots, x_n$ em que cada cláusula **tem exatamente 3 literais**, existe uma atribuição

$$t : \{x_1, \dots, x_n\} \rightarrow \{\text{verdade}, \text{falso}\}$$

que torna ϕ verdadeira?

3-Satisfatibilidade

Problema: Dada uma fórmula booleana ϕ nas variáveis $x_1, \dots, x_n$ em que cada cláusula **tem exatamente 3 literais**, existe uma atribuição

$$t : \{x_1, \dots, x_n\} \rightarrow \{\text{verdade}, \text{falso}\}$$

que torna ϕ verdadeira?

Exemplo:

$$\phi = (x_1 \vee \neg x_1 \vee \neg x_2) \wedge (x_3 \vee x_2 \vee x_4) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4)$$

3-Satisfatibilidade

Problema: Dada uma fórmula booleana ϕ nas variáveis $x_1, \dots, x_n$ em que cada cláusula **tem exatamente 3 literais**, existe uma atribuição

$$t : \{x_1, \dots, x_n\} \rightarrow \{\text{verdade}, \text{falso}\}$$

que torna ϕ verdadeira?

Exemplo:

$$\phi = (x_1 \vee \neg x_1 \vee \neg x_2) \wedge (x_3 \vee x_2 \vee x_4) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4)$$

Vamos mostrar que **Satisfatibilidade** $\leq_P$ **3-Satisfatibilidade**.

Exemplo 4

Satisfatibilidade $\leq_P$ 3-Satisfatibilidade

Descreveremos um **algoritmo polinomial** T que recebe uma fórmula booleana ϕ e devolve uma fórmula booleana ϕ' com **exatamente 3 literais** por cláusula tal que

ϕ é satisfatível $\Leftrightarrow \phi'$ é satisfatível.

Exemplo 4

Satisfatibilidade $\leq_P$ 3-Satisfatibilidade

Descreveremos um **algoritmo polinomial** T que recebe uma fórmula booleana ϕ e devolve uma fórmula booleana ϕ' com **exatamente 3 literais** por cláusula tal que

$$\phi \text{ é satisfatível} \Leftrightarrow \phi' \text{ é satisfatível.}$$

A transformação consiste em substituir **cada cláusula** de ϕ por uma **coleção de cláusulas** com **exatamente 3 literais** cada, e **equivalente** a ϕ .

Exemplo 4 (cont.)

Seja $(l_1 \vee l_2 \vee \cdots \vee l_k)$ uma cláusula de ϕ .

Exemplo 4 (cont.)

Seja $(l_1 \vee l_2 \vee \dots \vee l_k)$ uma cláusula de ϕ .

Caso 1. $k = 1$

Troque (l_1) por

$$(l_1 \vee y_1 \vee y_2) (l_1 \vee \neg y_1 \vee y_2) (l_1 \vee y_1 \vee \neg y_2) (l_1 \vee \neg y_1 \vee \neg y_2)$$

onde y_1 e y_2 são **variáveis novas**.

Exemplo 4 (cont.)

Seja $(l_1 \vee l_2 \vee \dots \vee l_k)$ uma cláusula de ϕ .

Caso 1. $k = 1$

Troque (l_1) por

$$(l_1 \vee y_1 \vee y_2) (l_1 \vee \neg y_1 \vee y_2) (l_1 \vee y_1 \vee \neg y_2) (l_1 \vee \neg y_1 \vee \neg y_2)$$

onde y_1 e y_2 são **variáveis novas**.

Caso 2. $k = 2$

Troque $(l_1 \vee l_2)$ por $(l_1 \vee l_2 \vee y) (l_1 \vee l_2 \vee \neg y)$,
onde y é uma **variável nova**.

Exemplo 4 (cont.)

Seja $(l_1 \vee l_2 \vee \dots \vee l_k)$ uma cláusula de ϕ .

Caso 1. $k = 1$

Troque (l_1) por

$$(l_1 \vee y_1 \vee y_2) (l_1 \vee \neg y_1 \vee y_2) (l_1 \vee y_1 \vee \neg y_2) (l_1 \vee \neg y_1 \vee \neg y_2)$$

onde y_1 e y_2 são **variáveis novas**.

Caso 2. $k = 2$

Troque $(l_1 \vee l_2)$ por $(l_1 \vee l_2 \vee y) (l_1 \vee l_2 \vee \neg y)$,
onde y é uma **variável nova**.

Caso 3. $k = 3$

Mantenha $(l_1 \vee l_2 \vee l_3)$.

Exemplo 4 (cont.)

Caso 4. $k > 3$

Troque $(l_1 \vee l_2 \vee \dots \vee l_k)$ por

$(l_1 \vee l_2 \vee y_1)$

$(\neg y_1 \vee l_3 \vee y_2)(\neg y_2 \vee l_4 \vee y_3)(\neg y_3 \vee l_5 \vee y_4) \dots$

$(\neg y_{k-3} \vee l_{k-1} \vee l_k)$

onde $y_1, y_2, \dots, y_{k-3}$ são **variáveis novas**.

Exemplo 4 (cont.)

Caso 4. $k > 3$

Troque $(l_1 \vee l_2 \vee \dots \vee l_k)$ por

$(l_1 \vee l_2 \vee y_1)$

$(\neg y_1 \vee l_3 \vee y_2)(\neg y_2 \vee l_4 \vee y_3)(\neg y_3 \vee l_5 \vee y_4) \dots$

$(\neg y_{k-3} \vee l_{k-1} \vee l_k)$

onde $y_1, y_2, \dots, y_{k-3}$ são **variáveis novas**.

Verifique que ϕ é satisfatível $\Leftrightarrow$ nova fórmula é satisfatível.

Exemplo 4 (cont.)

Caso 4. $k > 3$

Troque $(l_1 \vee l_2 \vee \dots \vee l_k)$ por

$(l_1 \vee l_2 \vee y_1)$

$(\neg y_1 \vee l_3 \vee y_2) (\neg y_2 \vee l_4 \vee y_3) (\neg y_3 \vee l_5 \vee y_4) \dots$

$(\neg y_{k-3} \vee l_{k-1} \vee l_k)$

onde $y_1, y_2, \dots, y_{k-3}$ são **variáveis novas**.

Verifique que ϕ é satisfatível $\Leftrightarrow$ nova fórmula é satisfatível.

O tamanho da nova cláusula é $O(q)$,

onde q é o número de literais que ocorrem em ϕ
(contando-se as repetições).

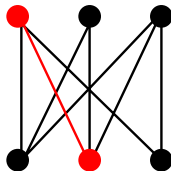
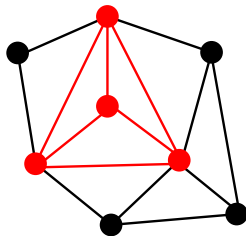
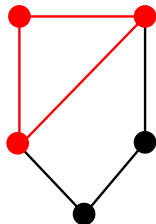
Clique

Problema: Dado um grafo G e um inteiro k ,
 G possui um clique com $\geq k$ vértices?

Clique

Problema: Dado um grafo G e um inteiro k , G possui um clique com $\geq k$ vértices?

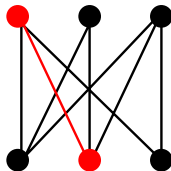
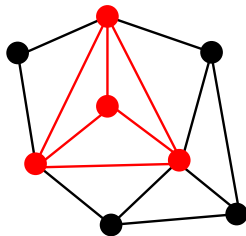
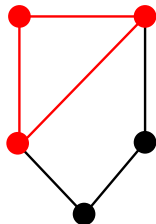
Exemplos:



Clique

Problema: Dado um grafo G e um inteiro k , G possui um clique com $\geq k$ vértices?

Exemplos:



clique com k vértices = subgrafo completo com k vértices

Clique é NP-completo

Clique está em NP e 3-Satisfatibilidade $\leq_P$ Clique.

Clique é NP-completo

Clique está em NP e 3-Satisfatibilidade $\leq_P$ Clique.

Descreveremos um algoritmo polinomial T que recebe uma fórmula booleana ϕ com k cláusulas e exatamente 3 literais por cláusula e devolve um grafo G tais que

ϕ é satisfatível $\Leftrightarrow G$ possui um clique $\geq k$.

Clique é NP-completo

Clique está em NP e 3-Satisfatibilidade $\leq_P$ Clique.

Descreveremos um algoritmo polinomial T que recebe uma fórmula booleana ϕ com k cláusulas e exatamente 3 literais por cláusula e devolve um grafo G tais que

ϕ é satisfatível $\Leftrightarrow G$ possui um clique $\geq k$.

Para cada cláusula, o grafo G terá três vértices, um correspondente a cada literal da cláusula. Logo, G terá $3k$ vértices.

Clique é NP-completo

Clique está em NP e 3-Satisfatibilidade $\leq_P$ Clique.

Descreveremos um algoritmo polinomial T que recebe uma fórmula booleana ϕ com k cláusulas e exatamente 3 literais por cláusula e devolve um grafo G tais que

ϕ é satisfatível $\Leftrightarrow G$ possui um clique $\geq k$.

Para cada cláusula, o grafo G terá três vértices, um correspondente a cada literal da cláusula.

Logo, G terá $3k$ vértices.

Teremos uma aresta ligando vértices u e v se

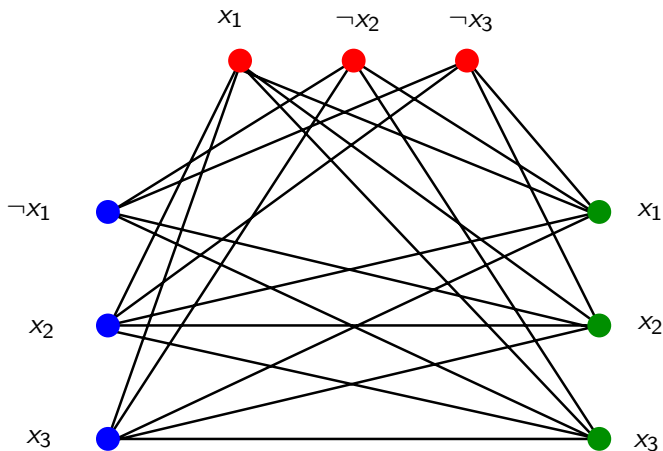
- ▶ u e v são vértices que correspondem a literais em diferentes cláusulas; e
- ▶ se u corresponde a um literal x então v não corresponde ao literal $\neg x$.

Clique é NP-completo (cont.)

$$\phi = (x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_3)$$

Clique é NP-completo (cont.)

$$\phi = (x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_3)$$



Cobertura por vértices

Um conjunto S de vértices de um grafo G é uma **cobertura** se toda aresta de G tem uma ponta em S .

Cobertura por vértices

Um conjunto S de vértices de um grafo G é uma **cobertura** se toda aresta de G tem uma ponta em S .

Problema: Dado um grafo G e um inteiro k , G possui uma cobertura com $\leq k$ vértices?

Cobertura por vértices

Um conjunto S de vértices de um grafo G é uma **cobertura** se toda aresta de G tem uma ponta em S .

Problema: Dado um grafo G e um inteiro k , G possui uma cobertura com $\leq k$ vértices?

Você consegue provar que este problema é NP-completo?

Subset sum

Problema: Dado um conjunto S de números naturais e um número natural t , existe um subconjunto S' de S cujos elementos somam t ?

Subset sum

Problema: Dado um conjunto S de números naturais e um número natural t , existe um subconjunto S' de S cujos elementos somam t ?

Você consegue provar que este problema está em NP?

Subset sum

Problema: Dado um conjunto S de números naturais e um número natural t , existe um subconjunto S' de S cujos elementos somam t ?

Você consegue provar que este problema está em NP?

Vamos provar que Cobertura por vértices $\leq_P$ Subset sum.

(Na aula só...)

Problemas NP-difíceis

Um problema Π , não necessariamente em NP , é **NP-difícil** se a existência de um algoritmo polinomial para Π implica que $P = NP$.

Problemas NP-difíceis

Um problema Π , não necessariamente em NP , é **NP-difícil** se a existência de um algoritmo polinomial para Π implica que $P = NP$.

Todo problema **NP-completo** é **NP-difícil**.

Problemas NP-difíceis

Um problema Π , não necessariamente em NP , é NP -difícil se a existência de um algoritmo polinomial para Π implica que $P = NP$.

Todo problema NP -completo é NP -difícil.

Exemplos:

- ▶ Encontrar um ciclo hamiltoniano é NP -difícil, mas **não** é NP -completo, pois não é um problema de decisão e portanto não está em NP .
- ▶ Satisfabilidade é NP -completo e NP -difícil.

Mais problemas NP-difíceis

Os seguintes problema são NP-difíceis:

- ▶ mochila booleana
- ▶ caminho máximo
- ▶ caminho hamiltoniano
- ▶ escalonamento de tarefas
- ▶ subset-sum
- ▶ clique máximo
- ▶ cobertura por vértices
- ▶ sistemas 0-1

e mais um montão deles ...

Mais exercícios

Exercício 25.J [CLRS 34.2-8]

Uma fórmula booleana ϕ é uma **tautologia** se $t(\phi) = \text{verdade}$ para toda atribuição de $t : \{\text{variáveis}\} \rightarrow \{\text{verdade}, \text{falso}\}$. Mostre que o problema de decidir se uma dada fórmula booleana é uma tautologia está em **co-NP**.

Exercício 25.K [CLRS 34.2-9]

Prove que $P \subseteq \text{co-NP}$.

Exercício 25.L [CLRS 34.2-10]

Prove que se $\text{NP} \neq \text{co-NP}$, então $P \neq \text{NP}$.

Exercício 25.M [CLRS 34.2-11]

Se G é um grafo conexo com pelo menos 3 vértices, então G^3 é o grafo que se obtém a partir de G ligando-se por uma aresta todos os pares de vértices que estão conectados em G por um caminho com no máximo três arestas. Mostre que G^3 é hamiltoniano.

Exercício 25.N [CLRS 34.3-2]

Mostre que se $\Pi_1 \leq_P \Pi_2$ e $\Pi_2 \leq_P \Pi_3$, então $\Pi_1 \leq_P \Pi_3$.

Mais exercícios

Exercício 25.O [CLRS 34.3-7]

Suponha que Π e Π' são problemas de decisão sobre o mesmo conjunto de instâncias e que $\Pi(I) = \text{sim}$ se e somente se $\Pi'(I) = \text{não}$. Mostre que Π é NP-completo se e somente se Π' é co-NP-completo. (Um problema Π' é co-NP-completo se Π' está em co-NP e $\Pi \leq_P \Pi'$ para todo problema Π em co-NP.)

Exercício 25.P [CLRS 34.4-4]

Mostre que o problema de decidir se uma fórmula booleana é uma tautologia é co-NP-completo. (Dica: veja o exercício 25.O.)

Exercício 25.Q [CLRS 34.4-6]

Suponha que ALG' é um algoritmo polinomial para Satisfatibilidade. Descreva um algoritmo polinomial ALG que recebe um fórmula booleana ϕ e devolve uma atribuição $t : \{\text{variáveis}\} \rightarrow \{\text{verdade}, \text{falso}\}$ tal que $t(\phi) = \text{verdade}$.

Exercício 25.Q [CLRS 34.5-3]

Prove que o problema Sistemas lineares 0-1 é NP-completo.

Exercício 25.R [CLRS 34.5-6]

Mostre que o problema Caminho hamiltoniano é NP-completo.

Exercício 25.S [CLRS 34.5-7]

Mostre que o problema de encontrar um ciclo de comprimento máximo é NP-completo.