

MAC 6711 - Tópicos de Análise de Algoritmos
Departamento de Ciência da Computação
Primeiro semestre de 2025

Lista 3

1. Exercícios C.2-2, C.2-3, C.2-4, C.2-7, C.2-8 e C.2-9.
2. Exercícios C.3-2 e C.3-8.
3. Considere dois sorteios aleatórios independentes e uniformes, de um inteiro entre 1 e k , obtendo valores X_1 e X_2 .
 - (a) Quanto é $\mathbf{E}[\max\{X_1, X_2\}]$ e $\mathbf{E}[\min\{X_1, X_2\}]$?
 - (b) Verifique que $\mathbf{E}[\max\{X_1, X_2\}] + \mathbf{E}[\min\{X_1, X_2\}] = \mathbf{E}[X_1] + \mathbf{E}[X_2]$.
 - (c) Prove que a identidade acima vale quaisquer que sejam as variáveis aleatórias X_1 e X_2 .
4. Considere o seguinte algoritmo para calcular o máximo de um vetor $v[1..n]$.

Algoritmo Máximo (v, n)

1. $m \leftarrow v[1]$
2. **para** $i = 2$ **até** n **faça**
3. **se** $v[i] > m$
4. **então** $m \leftarrow v[i]$
5. **devolva** m

Suponha que v é uma permutação escolhida uniformemente dentre todas as permutações de 1 a n . Qual é o número esperado de vezes que a linha 4 do algoritmo acima é executada?

5. Considere o seguinte algoritmo que determina o segundo maior elemento de um vetor $v[1..n]$ com $n \geq 2$ números positivos distintos.

Algoritmo Máximo (v, n)

1. $maior \leftarrow 0$
2. $segundo_maior \leftarrow 0$
3. **para** $i \leftarrow 1$ **até** n **faça**
4. **se** $v[i] > maior$
5. **então** $segundo_maior \leftarrow maior$
6. $maior \leftarrow v[i]$
7. **senão se** $v[i] > segundo_maior$
8. **então** $segundo_maior \leftarrow v[i]$
9. **devolva** $segundo_maior$

Suponha que v é uma permutação de 1 a n escolhida ao acaso dentre todas as permutações de 1 a n , de acordo com a distribuição uniforme de probabilidade. Seja X o número de vezes que a variável $segundo_maior$ é alterada (ou seja, o número de execuções das linhas 5 e 8 do algoritmo) numa chamada de Máximo(v, n). Note que X é uma variável aleatória. Calcule o valor esperado de X .

6. Considere o seguinte algoritmo que calcula o maior e o menor elemento de um vetor $v[1 \dots n]$ com elementos distintos.

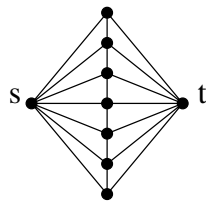
Algoritmo MaiorMenor (v, n)

```
1. maior  $\leftarrow v[1]$ 
2. menor  $\leftarrow v[1]$ 
3. para  $i \leftarrow 2$  até  $n$  faça
4.     se  $v[i] > maior$ 
5.         então  $maior \leftarrow v[i]$ 
6.         senão se  $v[i] < menor$ 
7.             então  $menor \leftarrow v[i]$ 
8. devolva  $maior, menor$ 
```

Suponha que a entrada do algoritmo é uma permutação de 1 a n escolhida uniformemente dentre todas as permutações de 1 a n .

Qual é o número esperado de comparações executadas na linha 6 do algoritmo? Qual é o número esperado de atribuições efetuadas na linha 7 do algoritmo?

7. Na aula 7, vimos um algoritmo aleatorizado Select-Alea que pode ser usado para, em tempo esperado linear, devolver a mediana de um trecho de vetor. Escreva uma versão do Quicksort que use esse algoritmo para bem escolher o pivô a ser usado no Particione. Qual será o consumo de tempo dessa variante do Quicksort?
8. Modifique o Quicksort da questão acima, como fizemos com o Mergesort na primeira aula, para obter um outro algoritmo para contar as inversões de um vetor. O consumo de tempo esperado do seu algoritmo deve ser $O(n \log n)$, onde n é o número de elementos do vetor.
9. Exercício 1 do cap. 13 do KT.
10. Exercício 12 do cap. 13 do KT.
11. Exercício 15 do cap. 13 do KT.
12. Considere a seguinte instância do s - t corte.



Mostre que a probabilidade do algoritmo de Karger sugerido no exercício 12 do KT dar uma resposta correta, ou seja, um s - t corte mínimo, é exponencialmente pequena no número n de vértices deste grafo.