Geometria Computacional

Departamento de Ciência da Computação – IME/USP

Primeiro Semestre de 2022

Lista 2

1. [Exercício 1.1.4.6 do O'Rourke — guardando a parede] Construa um polígono P e disponha guardas em P de tal forma que os guardas vêem todos os pontos em ∂P, mas existem pontos em P que não são vistos/cobertos pelos guardas.

2. [Exercício 1.1.4.6 do O'Rourke — guardas em poliedros] Descreva um poliedro em $\mathbb{R}^3$ que mesmo colocando-se guardas em todos os vértices existam pontos do poliedro que não são cobertos pelos guardas. **Sugestão.** Veja o Capítulo 9 do O'Rourke (1987).

3. ['Tetraedrização' de poliedros] Descreva um politopo (um politopo é um poliedro limitado) de genus zero (ou seja o politopo não tem 'buracos') em $\mathbb{R}^3$ que não pode ser particionado em tetrahedros tendo vértices selecionados dentre os vértices do politopo. **Sugestão.** Veja o Capítulo 10 do O'Rourke (1987). **Observação.** Ruppert e Seidel mostraram que o seguinte problema é NP-completo: dado um politopo P em $\mathbb{R}^3$, decidir se P pode ser tetraedrizado. Below, De Loera e Richter-Gebert provaram que o problema de minimizar o número de tetraedros em uma tetraedrização de um politopo convexo em $\mathbb{R}^3$ é NP-difícil. (Note que isto, em particular, significa que politopos convexos possuem tetraedrizações com um número diferente de tetraedros — em dimensão 2 não temos um fato semelhante.)

4. Pelo Teorema da Galeria de Arte sabemos que $\lfloor n/3 \rfloor$ guardas são ocasionalmente necessários e sempre suficientes para cobrir qualquer polígono com n vértices. Tendo este teorema em mente o professor Maqui Sperto fez a seguinte afirmação: Seja $P = (v_0, v_1, \ldots, v_n)$ um polígono (vértices em sentido anti-horário a medida que ocorrem quando percorremos ∂P) e $V_k := \{v_i \mid i \mod 3 = k\}$ $(k = 0, 1, 2)$. Então guardas colocados nos vértices em V_k cobrem o polígono P para algum $k \in \{0, 1, 2\}$. Apresente um exemplo que mostra que o professor Sperto está enganado.

5. [Exercício 1.1.4.2 do O'Rourke — visibilidade clara] Seja $G'(n)$ o menor número de guardas suficientes para verem claramente cada ponto de um polígono com n vértices. Qual é a relação entre $G(n)$ e $G'(n)$? A prova de Fisk estabelece que $G'(n) \leq \lfloor n/3 \rfloor$? Tente determinar $G'(n)$ exatamente.

6. [Exercício 1.1.4.3 do O'Rourke — guardas nos vértices] Tente resolver o exercício anterior com a restrição que os guardas só podem ser colocados em vértices do polígono.

7. [Exercício 1.2.5.1 do O´Rourke — soma dos ângulos externos] Qual é a soma dos ângulos externos de um polígono com n vértices.

8. O professor Maqui Sperto (novamente) propôs uma alteração para a prova do Lema 6 (Meister). Ele sugeriu que o vértice t, escolhido na demonstração, fosse um vértice tal que a distância entre v e t fosse mínima e afirmou que escolhendo t dessa maneira vt é uma diagonal do polígono P. O professor conseguiu dar um palpite correto desta vez? (Você precisa ver a demonstração do lema para fazer este exercício.)

9. [Minimizar o número de guardas está em NP] Descreva um algoritmo de complexidade de tempo polinomial que resolve o seguinte problema de decisão: dados um polígono P e pontos $p_1, \ldots, p_k$, decidir se guardas colocados nos pontos $p_1, \ldots, p_k$ cobrem P.

10. [Minimizar o número de guardas é NP-díficil] Considere o problema de decisão: dados um polígono P e um inteiro positivo k, decidir se P pode ser coberto por k guardas. Mostre que este problema é NP-completo. **Sugestão.** Veja o Capítulo 9 do O'Rourke (1987).